

# Rayonnement dipolaire

## Chapitre 19

### 1 Antenne assimilable à un dipôle oscillant

On considère une antenne hertzienne de taille  $\ell$  très petite, alimentée en son milieu par un circuit qui délivre l'intensité  $I_{\text{circuit}} = I_0 \cos(\omega t)$ . Dans l'antenne, l'intensité dépend de  $z$  et du temps et elle est nulle aux deux extrémités de cote  $z = \pm \ell/2$ . La longueur  $\ell$  étant petite, on suppose que l'intensité peut être modélisée par la loi linéaire :

$$I(z, t) = I_{\text{circuit}}(t) \left(1 - \frac{2|z|}{\ell}\right) \quad (1)$$

1. Préciser l'hypothèse "  $\ell$  est très petite " pour que l'antenne puisse être considérée comme un dipôle oscillant.
2. En une dimension, la loi locale de conservation de la charge s'écrit :

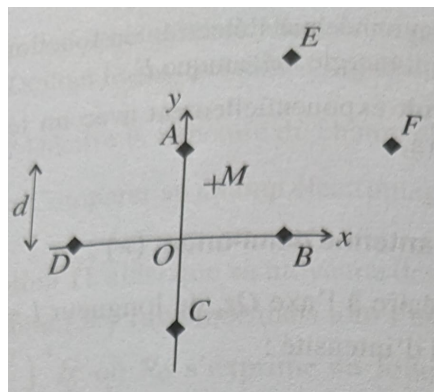
$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

où  $\lambda$  est la densité linéique de charge. Après avoir expliqué le sens physique de chacun des termes, déterminer  $\lambda(z, t)$ .

3. En déduire le moment dipolaire instantané de l'antenne.

### 2 Positionnement par comparaison de puissance

Un téléphone portable capte des signaux émis par des antennes relais  $A, B, C, D, E$  et  $F$  réparties sur un réseau carré de demi-diagonale  $d$ , comme représenté sur la figure. Il s'agit d'une vue de dessus, et le plan  $(Oxy)$  correspond au plan horizontal.



Au point  $M$ , la puissance du signal provenant d'une antenne est inversement proportionnel à la distance de  $M$  à cette antenne, la constante de proportionnalité étant la même pour toutes les antennes, qui sont identiques. La position  $M$  du téléphone portable est repérée par ses coordonnées  $(x, y)$ .

1. Exprimer simplement  $K_1 = \frac{\frac{1}{P_A} - \frac{1}{P_C}}{\frac{1}{P_B} - \frac{1}{P_D}}$  en fonction de  $x$  et  $y$ , puis  $K_2 = \frac{\frac{1}{P_E} - \frac{1}{P_B}}{\frac{1}{P_F} - \frac{1}{P_A}}$  en fonction de  $d, x$  et  $y$ .
2. Exprimer  $x$  et  $y$  en fonction de  $d, K_1$  et  $K_2$ .
3. Présenter une autre méthode de triangulation, basée non pas sur la mesure des puissances reçues par chaque antenne, mais du déphasage entre les signaux reçus par chaque antenne.

### 3 Diffusion de la lumière par des particules chargées

On rappelle qu'un dipôle placé en  $O$  dont le moment dipolaire, dirigé suivant  $Oz$ , est décrit par  $\vec{p} = p(\omega) \cos(\omega t) \vec{e}_z$  et engendre, en un point  $M$  situé à grande distance  $r$  de  $O$ , un champ de rayonnement dont le vecteur de Poynting a pour expression :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 p(\omega)^2 \omega^4 \cos^2(\omega(t - \frac{r}{c}))}{16\pi^2 r^2 c} \sin^2 \theta \vec{e}_r \quad (3)$$

avec  $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$  et  $\theta$  l'angle entre  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{e}_z$ .

Une onde monochromatique plane, progressive et polarisée rectilignement suivant  $Oz$ , arrive dans une région de l'espace où se trouvent des atomes modélisés de la façon suivante : le noyau de la charge  $+q$  est supposé fixe en  $P$ , le nuage électronique est représenté par une charge ponctuelle  $N$  de charge  $q$  et de masse  $m$  rappelée vers le noyau par une force du type  $-m\omega_0^2 \overrightarrow{PN}$  où  $\omega_0$  est une constante. Cette charge  $N$  est de plus soumise à une force de frottement que l'on négligera mais dont l'action aboutit à l'amortissement des éventuels régimes transitoires. Dans la suite, les charges  $N$  seront appelées "charges liées". Ceci est le modèle "élastiquement lié".

Le champ électromagnétique incident est caractérisé par  $\vec{E} = E_0 \exp(i(kx - \omega t)) \vec{e}_z$ .

On supposera que le milieu est assez dilué (atomes assez peu nombreux par unité de volume) pour que l'on puisse considérer que ce champ électromagnétique se propage pratiquement dans le vide. On supposera également dans la suite que  $\omega \ll \omega_0$ .

1. Quelle est l'expression du champ  $\vec{B}$  correspondant à l'onde incidente ?
2. On admet que sous l'action du champ électromagnétique incident, les charges liées se mettent en mouvement avec une vitesse faible devant  $c$  et on négligera le ou les termes en  $v/c$ . Quel est alors, en régime permanent, le mouvement de ces charges liées ?
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par une charge liée ?

4. On admet que  $E_0$  est indépendante de  $\omega$ , et donc de la longueur d'onde  $\lambda$ . Estimer numériquement le rapport entre la puissance rayonnée dans le rouge et entre la puissance rayonnée dans le bleu. En déduire la couleur du ciel.

## 4 Calcul classique de la durée de vie d'une transition atomique

Un électron est en orbite circulaire de rayon  $r$  autour d'un proton considéré comme infiniment massif et immobile à l'origine  $O$  du repère. On néglige toute correction relativiste.

On rappelle la formule de Larmor qui indique la puissance moyenne rayonnée par un dipôle  $\vec{p}(t)$  vaut :

$$\mathcal{P}_m = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left\langle \ddot{\vec{p}}(t)^2 \right\rangle \quad (4)$$

1. Calculer la vitesse  $v$  et l'accélération  $a$  de l'électron, la période  $T$  de son mouvement et l'énergie mécanique  $E$  de ce système en fonction de  $r, e$  et  $m_e$ . Évaluer ces quantités pour  $r = 0.1 \text{ nm}$ , l'approximation non relativiste est-elle justifiée ?
2. Calculer numériquement l'énergie perdue sur un tour  $\Delta E$  et en déduire  $\Delta E/E$ .
3. En déduire que le rayon ne peut pas rester constant et calculer sa variation relative à chaque tour.
4. En admettant, comme le montre l'exemple précédent, qu'à chaque révolution, l'orbite de l'électron reste circulaire avec une bonne approximation, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $r$  et en déduire sa loi d'évolution.
5. En déduire le temps à partir duquel le rayon devient nul. Que pouvez vous en conclure ?
6. On montre en mécanique quantique que les niveau électroniques d'un électron autour d'un noyau d'hydrogène sont donnés par  $E_n = -E_0/n^2$  avec  $E_0 = 13.6 \text{ eV}$ . En utilisant le modèle classique précédent, calculer le temps  $\tau$  nécessaire pour que l'énergie passe de la valeur  $E_2$  à la valeur  $E_1$ . L'expérience montre que le temps de transition vaut  $\tau' = 1.3 \text{ ns}$ , que peut-on conclure ?