

TP20 : Filtrage numérique

MP 2025-2026, Lycée Baimbridge

16 mars 2026

Matériel

GBF, Oscilloscope, résistances et condensateurs. **Venir avec un ordinateur.**

Objectif

Visualiser l'influence d'un filtre analogique sur la forme et le spectre d'un signal analogique.

Réaliser un filtre numérique.

Compétences évaluées

- Réaliser un filtre passe-haut ou passe-bas
- Discrétiser une équation différentielle
- Réaliser un filtre numérique

Consignes pour le compte rendu de TP :

- *Décrire le protocole expérimental utilisé*
- *Utiliser un maximum de schémas*
- *Apporter un soin particulier aux chiffres significatifs et au traitement des incertitudes*
- *Si la question n'est pas aboutie, indiquer tout de même ce que vous avez fait, vos mesures, et ce que vous auriez fait si vous aviez eu plus de temps*
- *Ne pas y passer trop de temps, vous êtes avant tout là pour manipuler !*

1 Introduction

En 2017, le premier événement de fusion de deux trous noirs a été observé par trois interféromètres de Michelson (deux situés aux Etats-Unis et un en Italie) dont la longueur des bras était d'environ 4 km. Ces interféromètres ont été capables de détecter une déformation de l'espace de l'ordre d'une fraction de longueur d'onde sur la longueur des bras. Cette déformation a été interprétée comme l'effet d'un paquet d'ondes gravitationnelles qui a été produit par le phénomène de fusion des trous noirs.

Nous constatons sur la première ligne que le rapport signal sur bruit de ces signaux est de l'ordre de 1.

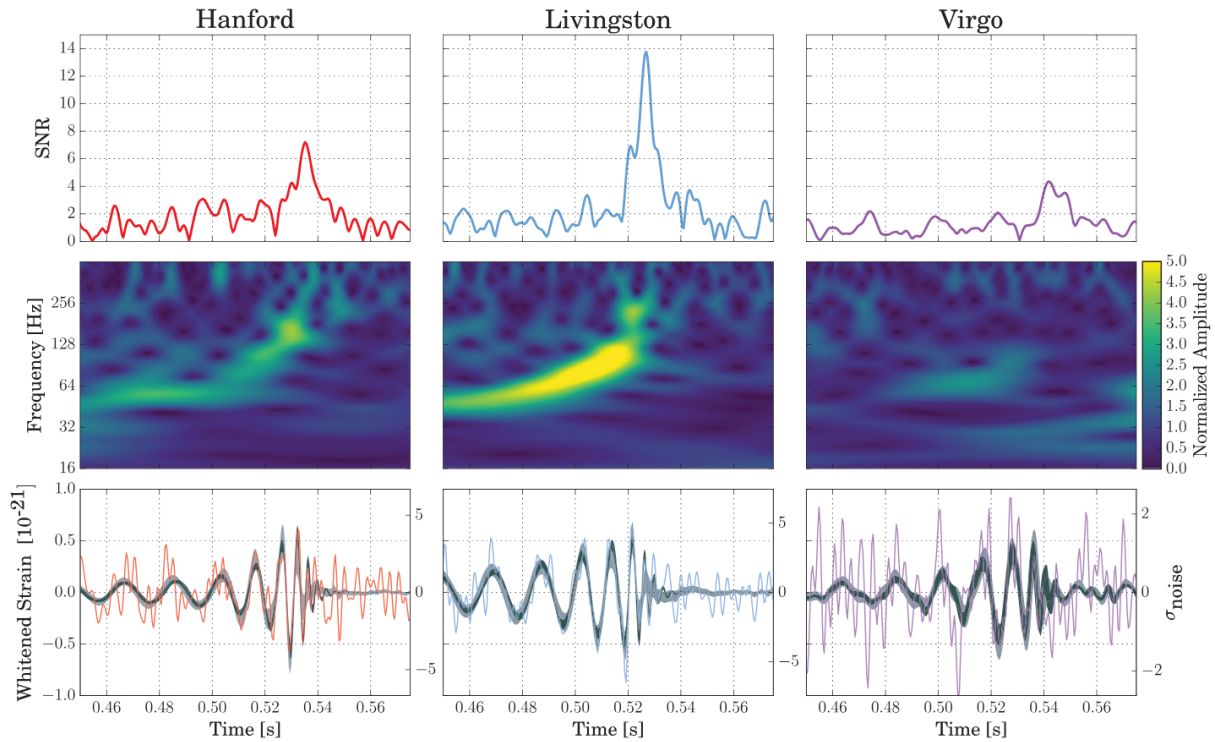


FIGURE 1 – Premières mesures du train d’ondes gravitationnelles en 2017. Chaque colonne représente un interféromètre de Michelson. En haut : le rapport signal sur bruit pour chaque interféromètre. Au milieu : la fréquence du signal mesuré en fonction du temps. Nous y voyons que le signal d’intérêt présente des fréquences entre 20 Hz et 400 Hz. En bas : le signal mesuré en fonction du temps (en couleur), ainsi que le modèle issu de la théorie de la relativité d’Einstein (en noir).

□ 1 – Commenter ce rapport. Est-il plutôt bon ou mauvais ? Expliquer pourquoi un filtrage du signal peut aider à isoler le signal des ondes gravitationnelles.

2 Filtrage analogique

Nous allons pour commencer étudier l’impact du filtrage sur la structure de signaux à l’aide de filtres analogiques. Nous rappelons (cf TP10 sur l’échantillonnage) que tous les signaux périodiques se décomposent comme une somme d’harmoniques. Par ailleurs :

- Les signaux sinusoïdaux n’ont qu’un seul harmonique ;
- Les signaux triangulaires ont des harmoniques dont l’amplitude décroît rapidement en $1/n^2$;
- Les signaux créneaux ont des harmoniques dont l’amplitude décroît lentement en $1/n$.

2.1 Filtre passe-bas

□ 2 – Réaliser un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est de l’ordre du kHz. Présenter le schéma électrique réalisé et le calcul de la fonction de transfert.

□ 3 – Envoyer dans ce filtre des signaux sinusoïdaux, créneaux et triangle dont la fréquence est légèrement inférieure à la fréquence de coupure du filtre. Dans chacun des cas, expliquer les observations à partir de l'effet du filtre sur les harmoniques.

□ 4 – Répéter l'opération à une fréquence grande devant la fréquence de coupure du filtre. En approximant la fonction de transfert, montrer alors que le filtre a un comportement intégrateur et expliquer les observations.

2.2 Filtre passe-haut

□ 5 – Réaliser désormais un filtre passe-haut. Répéter les opérations précédentes et interpréter ce qui se passe (pour gagner du temps, il n'est pas nécessaire de réaliser une description de ces observations dans le compte rendu).

□ 6 – Dans quel domaine de fréquences le passe-haut se comporte-t-il comme un dérivateur ?

3 Filtrage numérique

Pour filtrer notre signal d'ondes gravitationnelles, il est possible d'utiliser un filtre analogique, mais aujourd'hui le filtrage se fait généralement de façon numérique. Nous allons donc procéder avec Python.

Vous disposez des fichiers contenant les observations brutes réalisées par les trois interféromètres de Michelson lors de l'événement d'ondes gravitationnelles. Les données sont acquises avec une fréquence d'échantillonnage $f_e = 16384$ Hz, et se présentent sous la forme d'une suite de nombres $h_n = h(t_n)$ avec $t_n = nT_e$.

□ 7 – Quelle est la période d'échantillonnage T_e ? Indiquer sa valeur dans le code.

3.1 Observation des données brutes

Les fichiers contiennent des observations brutes qui sont affectées par toutes sortes de bruits issus des instruments de mesure et de l'environnement naturel et anthropique. Il suffit d'un déplacement des bras de l'interféromètre de quelques nanomètres pour provoquer un signal mesurable.

□ 8 – A l'aide du code fourni, afficher les valeurs de déformation mesurées par les trois interféromètres. Correspondent-elles aux graphiques du bas de la figure 1 ?

□ 9 – Proposer quelques sources possibles de bruit qui peuvent affecter la position des miroirs et donc polluer le signal.

Nous allons donc filtrer numériquement les données, et pour cela nous allons sélectionner les données entre 20 Hz et 400 Hz. On se propose, ainsi, d'appliquer un filtre passe-bas de fréquence de coupure 400 Hz et un filtre passe-haut de fréquence de coupure 20 Hz.

3.2 Filtre passe-bas

□ 10 – Écrire l'équation différentielle associée au filtre passe-bas analogique construit en partie I en faisant apparaître un temps caractéristique $\tau = \frac{1}{2\pi f_c}$.

Nous allons réaliser ce filtre de façon numérique : nous allons placer en entrée un signal e_n et en sortie un signal s_n .

□ 11 – A partir de la méthode d'Euler, montrer que l'on peut modéliser numériquement ce filtre par la relation :

$$s_{n+1} = s_n \left(1 - \frac{T_e}{\tau} \right) + e_n \frac{T_e}{\tau} \quad (1)$$

□ 12 – Implémenter cette expression dans la fonction `passe_bas` du code.

3.3 Filtre passe-haut

□ 13 – Par une modélisation similaire, proposer une relation entre s_{n+1} , s_n , e_{n+1} et e_n permettant de modéliser un filtre passe-haut et l'implémenter.

3.4 Observation du signal final

Le code fourni est découpé en plusieurs parties :

- Une première partie permet de retirer le bruit instrumental du signal. Elle utilise des transformées de Fourier calculées sur une partie du signal dans laquelle il n'y a pas d'ondes gravitationnelles. Vous n'avez pas besoin de comprendre le fonctionnement détaillé de cette partie.
- Dans la seconde partie, on définit un filtre passe-haut et un filtre passe-bas que l'on applique au signal pour sélectionner les fréquences des ondes gravitationnelles.

□ 14 – Lancer le code avec vos filtres passe-haut et passe-bas. Observe-t-on les ondes gravitationnelles désormais ? Commenter l'accord avec la figure 1, issue d'un article de recherche.

□ 15 – Qualifier aussi précisément que possible le paquet d'ondes observé.

□ 16 – Présenter plusieurs arguments qui suggèrent que ce signal n'est pas un bruit mais correspond bien à des ondes gravitationnelles.