

Dynamique en référentiel non galiléen

Chapitre 21

I - Révisions

1 Mission Apollo

Ce problème aborde quelques aspects du Programme Apollo, qui permit à l'humain de faire son premier pas sur la Lune le 21 juillet 1969. La première partie étudie le départ de la Terre, la seconde l'arrivée sur la Lune.

La fusée lancée de Cap Canaveral en Floride, se met tout d'abord en orbite circulaire basse autour de la Terre. Elle est ensuite placée sur une orbite elliptique de transfert pour rejoindre finalement une orbite circulaire autour de la Lune. La durée d'une mission est typiquement d'une semaine.

1. Définir les référentiels terrestre et géocentrique, notés respectivement $\mathcal{R}_T$ et $\mathcal{R}_G$. Dans toute la suite, $\mathcal{R}_G$ sera le référentiel d'étude, considéré comme galiléen. Justifier ce choix.

Une fusée de masse m_F décolle du point B , sans vitesse initiale par rapport à la Terre, pour atteindre une orbite circulaire autour de la Terre avec la vitesse finale v_0 par rapport à $\mathcal{R}_G$. On note ΔE_c la variation d'énergie cinétique de la fusée entre le point B et l'orbite parcourue à la vitesse v_0 .

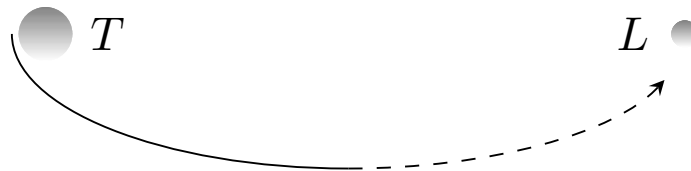
2. La Terre, associée à une sphère de rayon $R_T = 6.38 \times 10^3$ km et de centre T , est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Sud-Nord Tz , à la vitesse angulaire $\Omega = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

(a) Donner la nature de la trajectoire d'un point B à la surface de la Terre, situé à la latitude λ . Établir l'expression de la norme v_B de la vitesse de B . Application numérique : calculer v_{B1} pour la base de lancement de Cap Canaveral aux États-Unis ($\lambda_1 = 28,5^\circ$) et v_{B2} pour la base de Kourou en Guyane ($\lambda_2 = 5,2^\circ$).

(b) Calculer numériquement l'économie relative réalisée, définie par $\epsilon = \frac{\Delta E_{c1} - \Delta E_{c2}}{\Delta E_{c1}}$, en choisissant la base de Kourou plutôt que celle de Cap Canaveral, avec $v_0 = 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Commenter.

3. En utilisant le théorème de Gauss gravitationnel, déterminer l'expression de la norme du champ de pesanteur g_T à la surface de la Terre, avec $\mathcal{G} \times m_T = 4.0 \times 10^{14} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$. Réaliser ensuite l'application numérique.
4. La fusée de masse $m_F = 100 \times 10^3$ kg est à présent en orbite autour de la Terre.

- (a) Montrer que la trajectoire est plane. On admettra par la suite qu'elle est circulaire de rayon r_0 .
 - (b) Exprimer la norme de la vitesse v_0 de la fusée sur son orbite circulaire, ainsi que son énergie cinétique E_{c0} , en fonction de $\mathcal{G}$, m_F , m_T et r_0 .
 - (c) Exprimer le rapport $\frac{T_0^2}{r_0^3}$, où T_0 représente la période de révolution du satellite, en fonction de $\mathcal{G}$ et m_T . Quel est le nom de cette loi ? Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r_0 par a , demi-grand axe de l'ellipse.
 - (d) Donner enfin l'expression de l'énergie mécanique de la fusée en fonction de $\mathcal{G}$, m_T , m_F et r_0 puis sa valeur numérique. On supposera pour cela que l'énergie potentielle gravitationnelle $E_p(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$. Dans la suite, on admettra que ce résultat se généralise aux orbites elliptiques en remplaçant r_0 par a , demi-grand axe de l'ellipse.
5. La fusée Saturn V est d'abord placée en orbite circulaire autour de la Terre, dans un plan contenant l'axe Terre-Lune. Les moteurs du troisième étage sont alors allumés pendant une durée très courte : la vitesse de la fusée passe quasi instantanément de la vitesse v_0 à la vitesse v_1 , de telle sorte que la nouvelle trajectoire soit elliptique de grand axe $2a \simeq d_{TL}$, où d_{TL} représente la distance Terre-Lune.



- (a) Exprimer l'énergie mécanique E_{m1} de la fusée lorsqu'elle suit cette nouvelle trajectoire.
 - (b) En déduire l'expression de la norme de la vitesse v_1 . Faire l'application numérique.
 - (c) Évaluer numériquement la durée t_1 du transfert Terre-Lune (parcours de la moitié de l'ellipse). On donne $d_{TL} = 3.8 \times 10^8$ m.
6. Au voisinage de la Lune, de rayon R_L et de masse m_L , l'attraction de la Lune devient prépondérante et l'attraction de la Terre devient négligeable .

L'étude se fait désormais dans le référentiel lunocentrique, supposé galiléen.

Les paramètres du vol sont calculés pour qu'en cas de panne des moteurs, la fusée contourne la Lune pour revenir sur la Terre. (Ce fut le cas lors de la mission Apollo XIII). À l'approche de la Lune, les moteurs de la fusée sont rallumés, de façon à placer la fusée sur une orbite circulaire basse ($r \simeq R_L$) autour de la Lune.

- (a) Faut-il freiner ou accélérer ? Justifier qualitativement.
- (b) Déterminer numériquement v_2 , vitesse associée à une orbite circulaire basse autour de la Lune, avec $\mathcal{G} \times m_L = 4.9 \times 10^{12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$ et $R_L = 1.74 \times 10^3 \text{ km}$.

II - Référentiels en translation

2 Pendule dans un train

Un pendule simple est formé d'un fil inextensible de masse nulle et de longueur ℓ auquel est accroché un mobile M de masse m . Son extrémité O est accrochée au plafond d'un train en accélération uniforme horizontale $\vec{a} = a\vec{e}_y$. L'angle d'inclinaison du fil est noté $\theta(t)$.

1. (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi de la quantité de mouvement.
- (b) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant la loi du moment cinétique par rapport à l'axe Ox .
- (c) Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant le théorème de l'énergie mécanique.
2. Déterminer l'angle d'équilibre θ_{eq} .
3. On étudie les petites oscillations autour de la position d'équilibre en posant $\theta(t) = \theta_{\text{eq}} + \epsilon(t)$ avec $\epsilon \ll 1$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\epsilon(t)$ et en déduire la période T des petites oscillations.

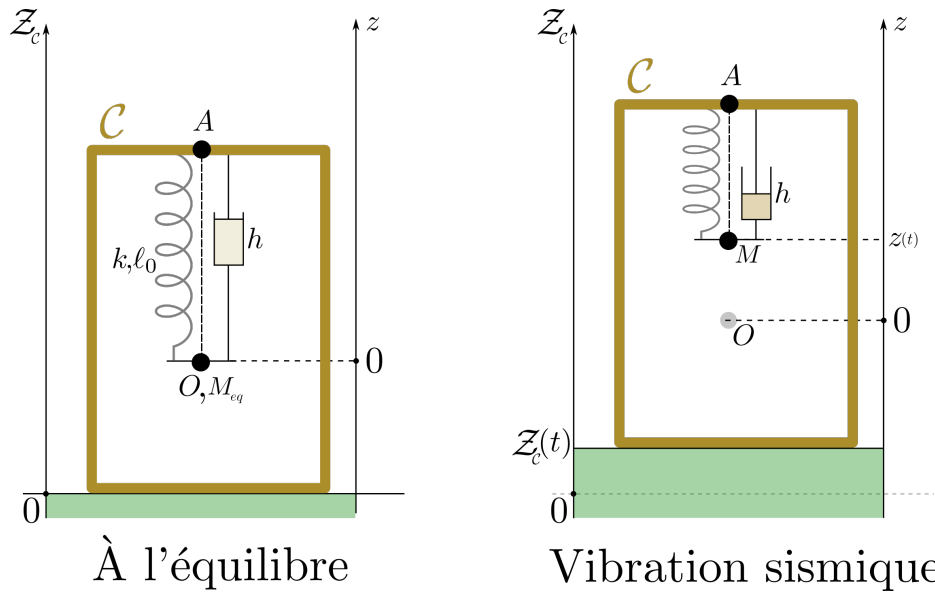
3 Sismographe

Soit le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen et un sismographe formé d'un cadre solide $\mathcal{C}$ et d'un point matériel mobile M de masse m , relié au cadre par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Le mobile subit une force de frottement fluide lors de son mouvement. Cette force fluide, modélisée par un amortisseur fluide, est proportionnelle à la vitesse relative de M par rapport au référentiel cadre $\mathcal{R}_C$: $\vec{f} = -h\vec{v}_r$.

Le cadre est, lors d'une vibration sismique du sol, mis en mouvement: le mouvement vertical du cadre est caractérisé par $Z_c(t) = Z_0 \cos(\omega t)$ où Z_0 est l'amplitude de l'onde sismique et ω_0 sa pulsation.

On note g l'accélération de la pesanteur.

On note $z(t) = OM(t)$ le déplacement vertical de la masse M mesurée relativement au cadre ; l'origine de l'axe (Oz) est la position de M_{eq} de M en l'absence d'onde sismique.



1. Exprimer la longueur ℓ_{eq} du ressort à l'équilibre en fonction de sa longueur à vide ℓ_0 , de sa raideur k et de la masse m .
2. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel non galiléen $\mathcal{R}_C$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$.
3. À quelle condition le régime transitoire associé est-il critique? On se placera dans ce cas dans la suite et on posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Quel est l'intérêt de ce choix?
4. Déterminer la réponse $z(t)$ en régime harmonique forcé.
5. Tracer les diagrammes de Bode correspondants. À quelle condition l'appareil fournit-il une mesure fiable de l'amplitude de l'onde sismique? Commenter.

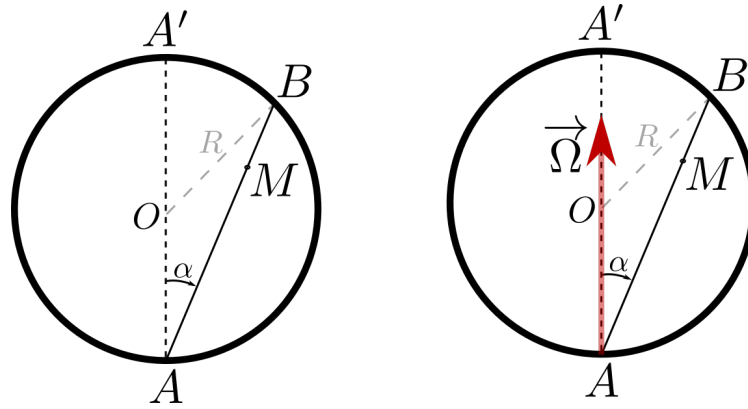
III - Référentiels en rotation

4 Anneau sur une tige en rotation

Le référentiel terrestre est considéré galiléen.

Soit un cercle de rayon R , placé dans un plan vertical et fixe par rapport à la Terre (figure de gauche ci-dessous). On considère une corde AB du cercle sur laquelle l'anneau M, assimilé à un point matériel de masse m , peut coulisser sans frottement. On lâche l'anneau sans vitesse initiale de B.

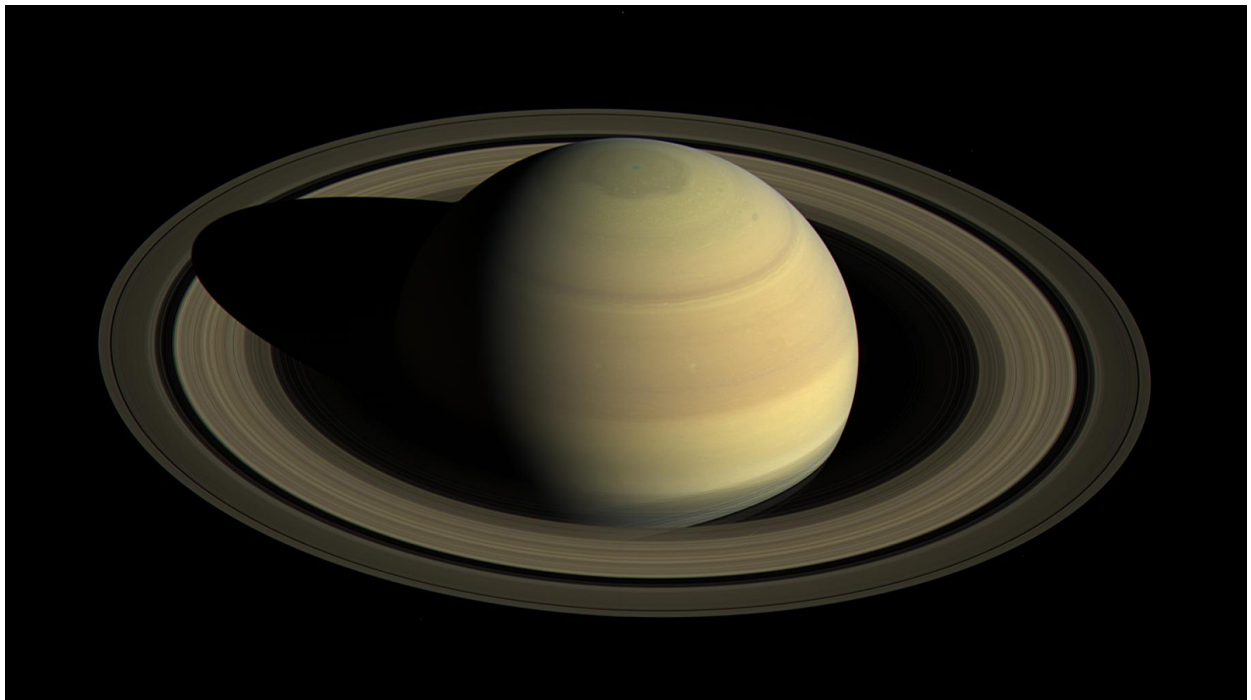
1. Déterminer la durée du parcours de la corde AB.



2. Le cercle est maintenant animé, par rapport à la Terre, d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe vertical AA' et de vecteur rotation $\vec{\Omega}$ (figure de droite ci-dessus). Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau par rapport au cercle. Étudier leur stabilité.

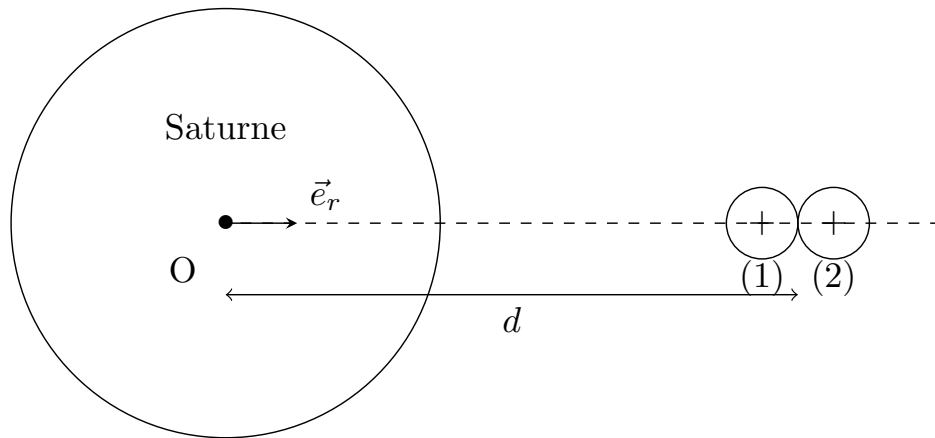
5 Limite de roche

Lorsque l'on regarde les anneaux de Saturne, on constate qu'ils se trouvent tous au-delà d'un rayon minimal.



Pour comprendre ce phénomène, on cherche à déterminer la distance en dessous de laquelle un astéroïde s'approchant de Saturne se sépare en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marées.

- L'astéroïde de masse volumique μ est en orbite circulaire de rayon d autour de Saturne.
- L'astéroïde est assimilable à deux sphères de rayon r et de masse m . Les trois centres restent alignés au cours du mouvement. Les deux masses sont liées par leur attraction mutuelle.
- Saturne est de masse M_s et de rayon R_s .



1. Montrer que le mouvement du centre d'inertie de la comète est plan. En le supposant circulaire, montrer qu'il est uniforme et déterminer la vitesse de rotation Ω en fonction de d , M_s notamment.
2. On note $\vec{R}$ la réaction de la sphère de gauche (1) sur la sphère de droite (2) de l'astéroïde. Pour quelle distance d_{lim} le contact est-il rompu ? Exprimer $\frac{d_{lim}}{R_s}$ en fonction de μ et μ_s masses volumiques respectives de l'astéroïde et de Jupiter.
3. Application numérique : on donne $M_s = 5.7 \times 10^{26} \text{ kg}$; $R_s = 6.0 \times 10^4 \text{ km}$; $\mu = 5000 \text{ kg m}^{-3}$. Calculer $\frac{d_{lim}}{R_s}$ et comparer à la photo de Saturne.

6 Sécurité routière

Cet exercice s'intéresse à quelques aspects de la sécurité routière. La première partie étudie la distance de freinage en fonction de l'état de la chaussée, la deuxième partie analyse le principe du relèvement d'un virage.

Dans tout le problème, on considérera que l'accélération de pesanteur vaut $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

Distance nécessaire pour s'arrêter sur une ligne droite horizontale On considère un véhicule roulant sur une route rectiligne horizontale Ox à la vitesse v_0 prise égale pour l'instant à 130 km.h^{-1} avec un mouvement uniforme. On notera $\vec{e}_x$ le vecteur unitaire de l'axe Ox dans le sens du déplacement. On donne les coefficients de frottement statiques suivants :

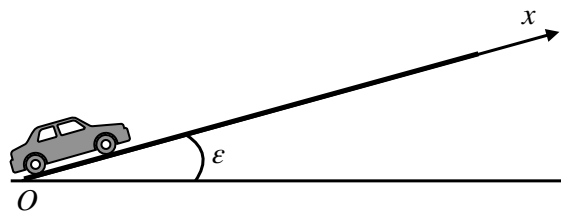
Matériaux	Coefficient de frottement statique μ_0
pneu sur béton sec	0,80
pneu sur béton mouillé	0,60

On prendra l'origine des temps à l'instant où un obstacle a surgi dans le champ de vision du conducteur, et l'origine O de l'espace à la position du véhicule à l'instant initial $t = 0$ s. Pour les applications numériques, on prendra $t_R = 1.0$ s.

1. À la suite de l'apparition d'un obstacle dans le champ de vision du conducteur, on peut distinguer une première phase du mouvement dont la durée correspond au temps de réaction du conducteur t_R . Que peut-on dire de la nature du mouvement au cours de cette phase ? En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ puis de la position $x(t)$ du véhicule au cours du temps durant cette première phase, et l'abscisse du point R atteint au bout du temps de réaction.

Au bout d'un temps t_R , le conducteur réagit et écrase la pédale de frein. Le véhicule freine et s'arrête en un point A . Il a alors parcouru une distance d'arrêt totale d_A depuis O .

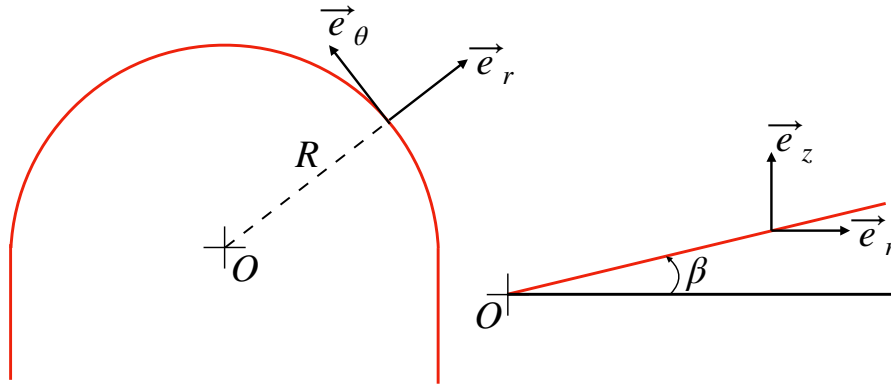
2. Déterminer le travail de chaque force appliquée au véhicule entre les positions R et A .
3. À l'aide d'un théorème énergétique, exprimer la distance d'arrêt d_A en fonction de v_0 , μ_0 et t_R . Faire l'application numérique pour chaussée sèche et mouillée.
4. Considérons le cas où la chaussée est sèche. On considère que la route n'est pas rigoureusement horizontale, mais qu'elle a une pente d'un angle $\varepsilon = 5^\circ$. Le véhicule se déplace dans le sens ascendant de la pente, avec la même vitesse initiale que précédemment. On conserve l'axe Ox selon la direction de la route, comme représenté ci-contre.



Déterminer la distance d'arrêt d_A dans ce cas. Faire l'application numérique.

Relèvement d'un virage On revient au cas d'une route sèche et horizontale mais elle n'est plus rectiligne. On la modélise par un arc de cercle horizontal de rayon R et de centre O . La route est relevée d'un angle β .

1. Rappeler les expressions de la vitesse et de l'accélération d'un mouvement circulaire en coordonnées polaires (R, θ) d'origine O et d'axe vertical Oz .



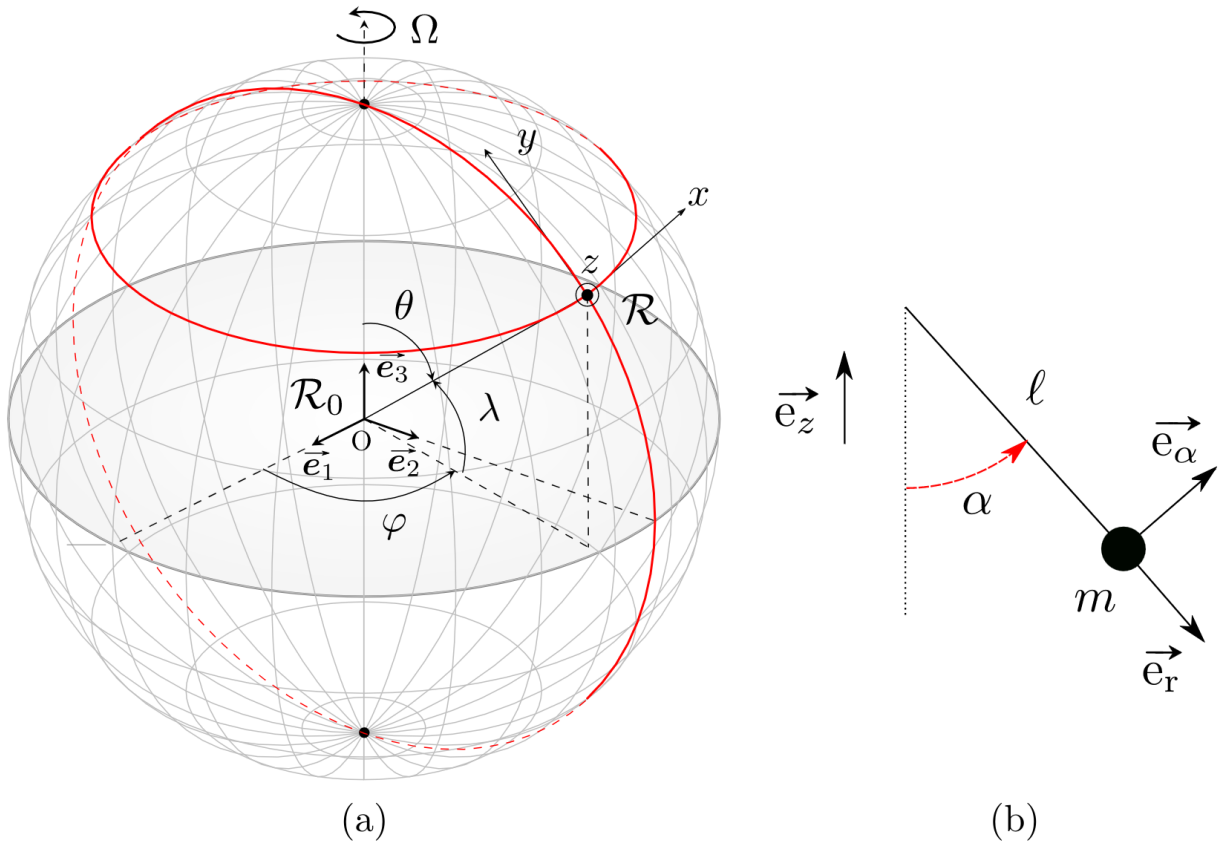
- On veut parcourir cette portion de route à vitesse constante v avec un véhicule de masse m . Que peut-on dire de la vitesse angulaire de rotation $\dot{\theta}$ sur l'arc de cercle ? En déduire l'expression du vecteur accélération du véhicule. Quelle pseudo-force ce mouvement induit-il dans le référentiel de la voiture ?
- Exprimer la composante normale N de la réaction de la route, puis la composante tangentielle T .
- Quelle est la condition à respecter pour que la voiture ne dérape pas ? Montrer que pour qu'il en soit ainsi, la vitesse ne doit pas dépasser une valeur maximale v_{max} qu'on exprimera en fonction de μ_0 , g , R et β .
- On considère le cas $\beta = 0$. Donner la valeur numérique de v_{max} sur route sèche avec $R = 50$ m. Si le virage est mouillé voire verglacé, que peut-on dire de la vitesse maximale avec laquelle on peut aborder le virage ? Vers quelle limite tend v_{max} quand le frottement tend à s'annuler ?
- Quel est l'effet sur v_{max} si on incline la route d'un angle $\beta = 10^\circ$?

7 Pendule de Foucault (difficile)

Le pendule de Foucault est un instrument historique qui a contribué à la mise en évidence de la rotation de la Terre sur elle-même. On le modélise par un fil de longueur $\ell = 67$ m de masse négligeable, au bout duquel est accrochée une masse $m = 36$ kg.

La Terre est supposée en mouvement de rotation uniforme à la vitesse de rotation angulaire Ω . On néglige toutes les forces de frottement dans cette partie.

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base fixe du référentiel géocentrique considéré galiléen (voir figure a). La position de la masse m est donnée par ses coordonnées dans le repère $(Oxyz)$ de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel terrestre. Cette base est dite locale. On note α l'angle entre le pendule et l'axe vertical dirigé par le vecteur $\vec{e}_z$ (voir figure b). On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ la base mobile suivant le mouvement de la masse dans le référentiel terrestre.



1. Dans un premier temps, on néglige la force d'inertie de Coriolis.
 - (a) Dans toute la suite on négligera la force d'inertie d'entraînement, et on considérera que le poids est parallèle à l'axe Oz . Justifier ces approximations par une analyse en ordres de grandeur.
 - (b) Écrire l'équation vectorielle du mouvement de la masse m , puis la projeter dans la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\alpha)$ définie sur la figure b (on supposera son mouvement plan).
 - (c) Dans quelle limite le pendule simple peut-il être approximé par un oscillateur harmonique ? On se placera dans cette limite par la suite. Exprimer sa pulsation propre ω_0 . Déterminer la période d'oscillation du pendule et l'estimer numériquement pour le pendule de Foucault.
 - (d) Justifier que dans l'approximation précédente le mouvement de la masse est horizontal au premier ordre en α .
2. On s'intéresse maintenant à la modification du mouvement engendrée par la présence de la force d'inertie de Coriolis. Paris est située à une latitude $\lambda = 49^\circ$ comme définie sur la figure précédente. On considérera que le mouvement de la masse est plan dans le repère local et on négligera vitesse et accélération selon l'axe Oz . On admettra que l'effet des forces autres que la force de Coriolis se met sous la forme $\vec{F} = -m\omega_0^2 x \vec{e}_x - m\omega_0^2 y \vec{e}_y$.
 - (a) Comparer numériquement les pulsations Ω et ω_0 .

- (b) Décomposer le vecteur $\vec{e}_3$ dans la base locale et en déduire que les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\tilde{\Omega}\dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\tilde{\Omega}\dot{x} \end{cases} \quad (1)$$

Exprimer la constante $\tilde{\Omega}$.

- (c) Pour résoudre ce système, on pose la variable complexe $\underline{u} = x + iy$. Déterminer l'équation vérifiée par $\underline{u}$. Résoudre cette équation et donner l'expression de $\underline{u}(t)$ en fonction de deux inconnues $\underline{A}$ et $\underline{B}$.
- (d) On prend $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ et une vitesse initiale nulle. Déterminer l'expression de $\underline{u}$.
- (e) En utilisant le résultat de la question 2a, simplifier l'expression de $\underline{u}(t)$. Interpréter l'expression obtenue.
- (f) Déterminer l'expression de l'angle ψ duquel a tourné le plan d'oscillation du pendule en 24 h à Paris ($\lambda = 49^\circ$) dans le référentiel terrestre. L'estimer numériquement en degrés. Faire de même pour Pointe-à-Pitre ($\lambda = 16^\circ$) Y a-t-il des points sur le globe où le plan d'oscillation du pendule reviendrait à sa position initiale après 24 h ?
- (g) Justifier brièvement les valeurs inhabituelles choisies par Foucault pour la masse m et la longueur ℓ .
- (h) Sur la figure suivante, on voit le professeur Tournesol utiliser son pendule pour se repérer et se diriger sur Terre. Cela vous semble-t-il possible ? Justifier votre réponse.

