

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

à rendre pour le 26 mars 2026

Physique Chimie

DM 20

Les marées

(Adapté de E3A PC 2015 et Centrale PC 2004)

Données :

- distance Terre Lune : $d_L = 3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$
- distance Terre Soleil : $d_S = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
- rayon de la Terre : $R_T = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$
- masse du Soleil : $m_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- masse de la Terre : $m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
- masse de la Lune : $m_L = 7,3 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
- constante de gravitation universelle : $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

Lexique :

- pleine mer (PM): hauteur maximale de la marée
- basse mer (BM): hauteur minimale de la marée
- marnage : différence de hauteurs entre une pleine mer et une basse mer consécutives
- vive-eau : marée pendant laquelle le marnage est maximal
- phase de la pleine mer : heure à laquelle la pleine mer est atteinte

1 Etude d'une carte de marée

La carte reproduite dans la figure ci-dessous représente l'évolution de la marée réelle dans la Manche. Les nombres indiqués sous certains ports sont la phase de la pleine mer et le marnage par vive-eau.

On trouve deux types de courbes :

- Les lignes cotidales (avec une indication en heures) représentent les points dans le même "état de marée" (pleine mer) à un instant donné (les valeurs données correspondent à la date de la pleine mer par rapport à une référence arbitraire).
- Les lignes iso-marnage (avec une indication en mètres) représentent les points avec un même marnage (le marnage est la différence de hauteur entre la pleine mer et la basse mer).



□ 1 — À quels endroits de la carte les marées sont-elles les plus importantes ? Est-ce dû à une particularité géographique ? On attend une réponse brève.

□ 2 — On peut envisager l'évolution spatiale et temporelle de la hauteur d'eau due aux marées comme résultant de la propagation d'une *onde de marée*. Dans quel sens se déplace cette onde de marée dans la Manche ? Une explication basée sur la rotation propre de la Terre est-elle satisfaisante ? Justifier.

□ **3** – Donner (sans explication) un ordre de grandeur de la périodicité des marées océaniques. Donner un ordre de grandeur de la vitesse de phase de l'onde de marée dans la Manche (à titre de point de repère, la distance entre Saint-Malo et Brest est de l'ordre de 200 km). En déduire un ordre de grandeur de la longueur d'onde associée.

□ **4** – Dans la Manche la marée est déviée vers les côtes françaises, ce qui a pour conséquence des marnages plus importants que sur les côtes anglaises. Interpréter cette déviation (un schéma clair est attendu).

□ **5** – A l'ouest de la ville de Saint-Malo, on distingue sur la carte l'estuaire de la Rance où est implantée une usine marémotrice. Justifier ce choix d'implantation; pourquoi ne pas avoir fait de même sur l'estuaire de la Seine, au niveau du Havre (Normandie, Seine-Maritime)?

2 Champ de marée

Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.

□ **6** – Donner sans justification l'expression du champ de gravitation $\vec{g}_A(M) = \frac{\vec{F}_{A/M}}{m}$ créé par un astre centré en A de masse m_A en un point M de masse m en dehors de l'astre. On pourra noter $r = AM$ la distance entre A et M et $\vec{e}_r$ un vecteur unitaire dirigé de A vers M .

L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique. On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_{\text{hélio}}$ comme galiléen.

□ **7** – Définir le référentiel géocentrique. Décrire son mouvement par rapport au référentiel héliocentrique. En déduire l'expression de la force d'inertie d'entraînement sur un point matériel M de masse m dans le référentiel géocentrique. On notera $\vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_{\text{hélio}}}$ l'accélération de T (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.

□ **8** – Établir que $\vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_{\text{hélio}}} = \vec{g}_S(T)$, où $\vec{g}_S(T)$ est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la terre T . En déduire une expression de $\vec{F}_{ie}$.

□ **9** – En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d’inertie d’entraînement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel M de masse m s’écrit :

$$m \vec{\mathcal{C}}_S(M) \quad \text{avec} \quad \vec{\mathcal{C}}_S(M) = -G m_S \left(\frac{\vec{SM}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3} \right) \quad (1)$$

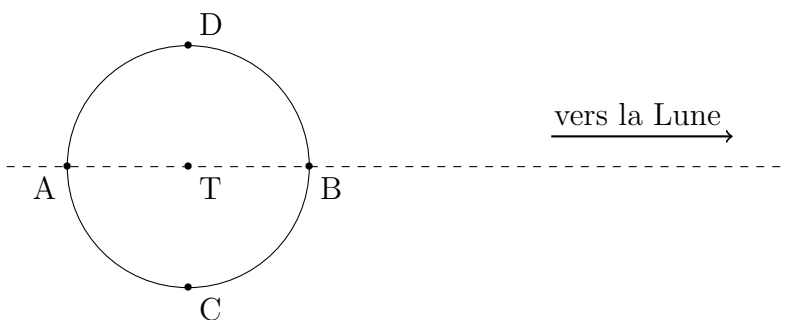
où S désigne le centre du Soleil, m_S sa masse, et G la constante de gravitation universelle.

$\vec{\mathcal{C}}_S(M)$ est appelé *champ de marée* du Soleil au point M .

Les marées sont essentiellement dues à l’influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l’influence de la Lune. Le résultat de la question ?? est transposable à n’importe quel astre, l’expression du champ de marée dû à la Lune est donc (L désignant le centre de la Lune) :

$$\vec{\mathcal{C}}_L(M) = -G m_L \left(\frac{\vec{LM}}{LM^3} - \frac{\vec{LT}}{LT^3} \right) \quad (2)$$

Sur le schéma de la figure ci-dessous on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.



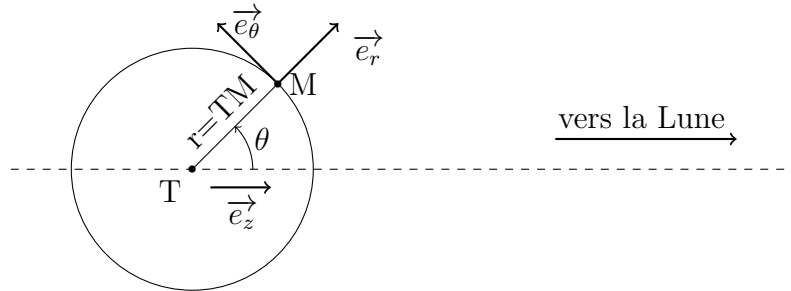
□ **10** – Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d’inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).

□ **11** – Indiquer les points (parmi A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?

□ **12** – En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.

□ **13** – Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point M à la surface de la terre, $TM \ll TL$ et en effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{TM}{TL}$. On posera $TM = r$ et $TL = d_L$, et on repérera la position de M , dans le plan contenant L , T et M , en coordonnées polaires.



□ 14 – Montrer que $\overrightarrow{LM} = -d_L \vec{e}_z + r \vec{e}_r$. En déduire que, au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$, on a $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{d_L^3} \left(1 + \frac{3r \cos(\theta)}{d_L} \right)$.

□ 15 – En déduire que, toujours au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$:

$$\vec{C}_L(M) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} (3 \cos(\theta) \vec{e}_z - \vec{e}_r) \quad (3)$$

En projetant $\vec{e}_z$ sur la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, on obtient finalement :

$$\vec{C}_L(M) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} ((3 \cos^2(\theta) - 1) \vec{e}_r - 3 \sin(\theta) \cos(\theta) \vec{e}_\theta) \quad (4)$$

□ 16 – Montrer que l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.

□ 17 – Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

3 Ondes de marée dans un bassin océanique

En réalité, ces phénomènes n'agissent que comme un forçage pour les marées. Ce forçage excite des ondes de gravité à la surface de l'eau, dont la relation de dispersion est donnée par :

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 \right) \tanh(kH) \quad (5)$$

où H est la profondeur moyenne de l'océan, ρ la masse volumique de l'eau et $\gamma = 72 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$ la tension de surface de l'eau.

La propagation de ces ondes cause une perturbation de la hauteur d'eau notée $\xi(\vec{r}, t)$, telle que la hauteur d'eau s'écrive :

$$h(\vec{r}, t) = H + \xi(\vec{r}, t) \quad \text{avec} \quad \xi \ll H \quad (6)$$

La géométrie du bassin océanique ou de la baie joue un rôle très important dans la propagation de ces ondes, que nous allons étudier dans cette partie.

Dans toute cette partie, on suppose que le phénomène des marées est parfaitement périodique, de période $T = 12.4 \text{ h}$.

□ **18** – Quelle est l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ d'une onde de marée ? En déduire que la relation de dispersion se simplifie, et que l'onde de marée satisfait l'équation de d'Alembert, avec une célérité $c = \sqrt{gH}$.

3.1 Résonance de marée dans une baie

On considère une baie parallélépipédique, de longueur L , de profondeur moyenne H , ouverte sur l'océan en $x = 0$, fermée en $x = L$ et dont les rives sont supposées verticales. La marée océanique impose à l'entrée de la baie :

$$\xi(x = 0, t) = \xi_0 \cos(\omega t) \quad \text{avec} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (7)$$

On se place dans une approche unidimensionnelle. On cherche $\xi(x, t)$ (indépendante de y) dans la baie sous la forme :

$$\xi(x, t) = f(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (8)$$

□ **19** – Donner deux arguments justifiant la forme sous laquelle on cherche $\xi(x, t)$, puis donner la forme générale de la fonction $f(x)$.

□ **20** – On admet que la condition aux limites en $x = L$, liée au fait que la vitesse de l'eau est normale à la côte, implique que $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x = L, t) = 0$. En déduire la surélévation $\xi(x, t)$ dans la baie.

□ **21** – A quelle condition sur L a-t-on une résonance de marée dans la baie ? C'est le cas de la baie du Mont Saint-Michel ou plus encore de la baie de Fundy sur la côte sud-est du Canada où l'amplitude de la marée atteint une vingtaine de mètres. Sa longueur est d'environ 250 km. Que vaut sa profondeur moyenne ? La comparer à la longueur d'onde de l'onde de marée.

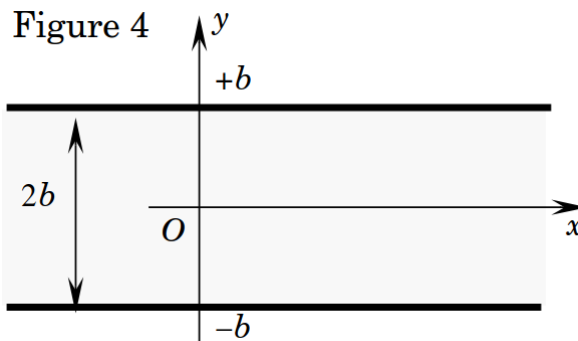
3.2 Amplitude de la marée dans une mer fermée

On considère maintenant une mer parallélépipédique fermée, de longueur , de profondeur moyenne H . On cherche encore la surélévation de la surface libre sous la forme $\xi(x, t) = g(x) \cos(\omega t)$.

□ **22** – Déterminer complètement $\xi(x, t)$ à une constante multiplicative près. A quelle condition sur L une telle onde de marée peut-elle s'établir avec une amplitude notable dans cette mer ?

□ **23** – Le bassin occidental de la Méditerranée a une longueur $L = 1500$ km et une profondeur moyenne $H = 2$ km. Interpréter la quasi-absence de marée en Méditerranée. Peut-on encore considérer que l'on est en eau peu profonde ?

3.3 Influence de la rotation de la Terre sur les marées océaniques dans un bassin limité



Le bassin considéré est assimilable à un canal d'axe Ox , de profondeur H uniforme et de largeur $2b$ uniforme selon Oy . Ce bassin est en contact en avec un océan qui excite ainsi, dans le bassin, une onde qu'on supposera parfaitement harmonique, de période $T = 12.4$ h. On cherche à prendre en compte l'influence de la force de Coriolis. Pour simplifier, on suppose toujours petites les dimensions du bassin par rapport au rayon de la Terre, si bien qu'on suppose que la latitude Λ est uniforme dans le bassin. Supposons que le bassin est contenu dans l'hémisphère Nord, que l'axe Ox est orienté vers l'est et l'axe Oy est orienté vers le nord. Dans ce repère le vecteur rotation propre de la Terre a donc pour coordonnées :

$$\vec{\Omega} = \omega(\cos \Lambda \vec{e}_y + \sin \Lambda \vec{e}_z) \quad (9)$$

avec $\Omega = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut montrer alors que, en incluant la force d'inertie de Coriolis, sous les hypothèses précédentes, l'équation de D'Alembert satisfaite par l'onde est modifiée et devient :

$$\Delta \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\gamma^2}{c^2} \xi \quad (10)$$

où $\gamma = 2\Omega \sin \Lambda$.

□ **24** – On cherche une onde de marée de la forme $\underline{\xi}(x, y, t) = \underline{f}(x, y)e^{i\omega t}$. Montrer que la fonction $\underline{f}$ vérifie la relation :

$$\Delta \underline{f} + \frac{\omega^2 - f^2}{gH} \underline{f} = 0 \quad (11)$$

Commenter.

□ **25** – Montrer que l'onde de marée suivante convient :

$$\underline{\xi}(x, y, t) = \xi_0 \exp\left(-\frac{\gamma y}{c}\right) \exp\left(i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \quad (12)$$

Elle est dite "Onde de Kelvin".

□ **26** – Caractériser la nature de cette solution (progressive ou stationnaire) selon les directions x et y . De quel type d'onde s'agit-il ? À quelle vitesse se propagent les ondes de marée représentées par ce type de solution ?

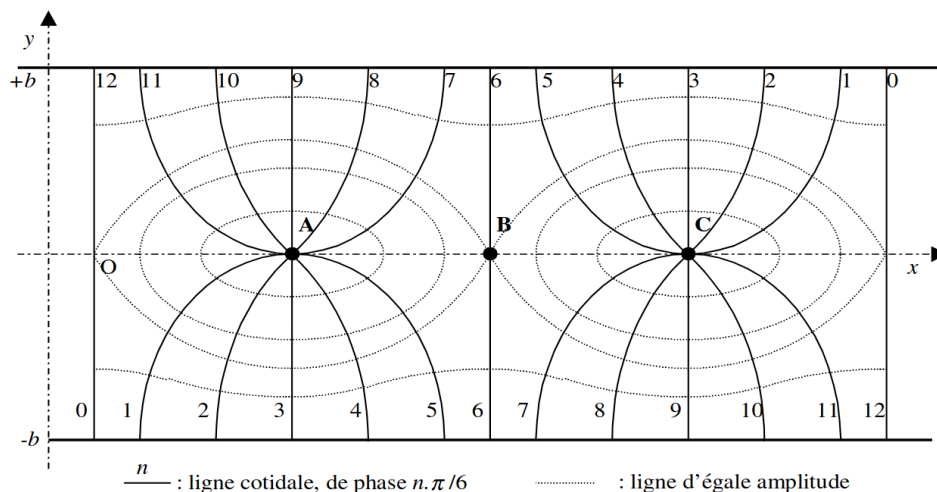
□ **27** – Donner la géométrie des lignes d'égale amplitude et des lignes d'égale phase. Représenter quelques lignes de chaque type sur un schéma.

On considère maintenant deux ondes de Kelvin se propageant en sens inverse dans le canal :

$$\underline{\xi}(x, y, t) = \xi_0 e^{i\omega t} \left[\exp\left(-\frac{\gamma y + i\omega x}{c}\right) + \exp\left(+\frac{\gamma y + i\omega x}{c}\right) \right] \quad (13)$$

Le coefficient α caractérise le rapport de leurs amplitudes.

□ **28** – Montrer qu'il existe des points à marnage nul (dits "points amphidromiques"). Comparer la longueur d'onde avec la distance entre deux points amphidromiques consécutifs. Ce résultat vous semble-t-il surprenant ?



La figure ci-dessus donne une représentation de l'onde précédente. En un point M du bassin, on peut écrire que :

$$\xi(x, y, t) = \Re(\underline{\xi}) = h_0(x, y) \cos[\omega t - \varphi(x, y)] \quad (14)$$

$h_0(x, y)$ représente l'amplitude de l'onde de marée en ce point et $\varphi(x, y)$ sa phase (on ne cherchera pas à calculer ces grandeurs). Sont représentées :

- en pointillés, les lignes d'égale amplitude ou de marnage,
- en traits pleins, les lignes cotidales : il s'agit des lignes d'égale phase. La phase de la ligne cotidale indicée par n est $\varphi_n = n \frac{\pi}{6}$.

□ **29** – Quel est le sens de propagation de l'onde de marée sur la rive $y = -b$? Sur la rive $y = +b$? À quoi correspondent les points A et C ?

□ **30** – La carte ci-après donne les représentations de l'onde de marée en Mer du Nord ; la première figure du sujet donne les mêmes courbes dans la Manche. Commenter à l'aide des conclusions théoriques de cette partie.

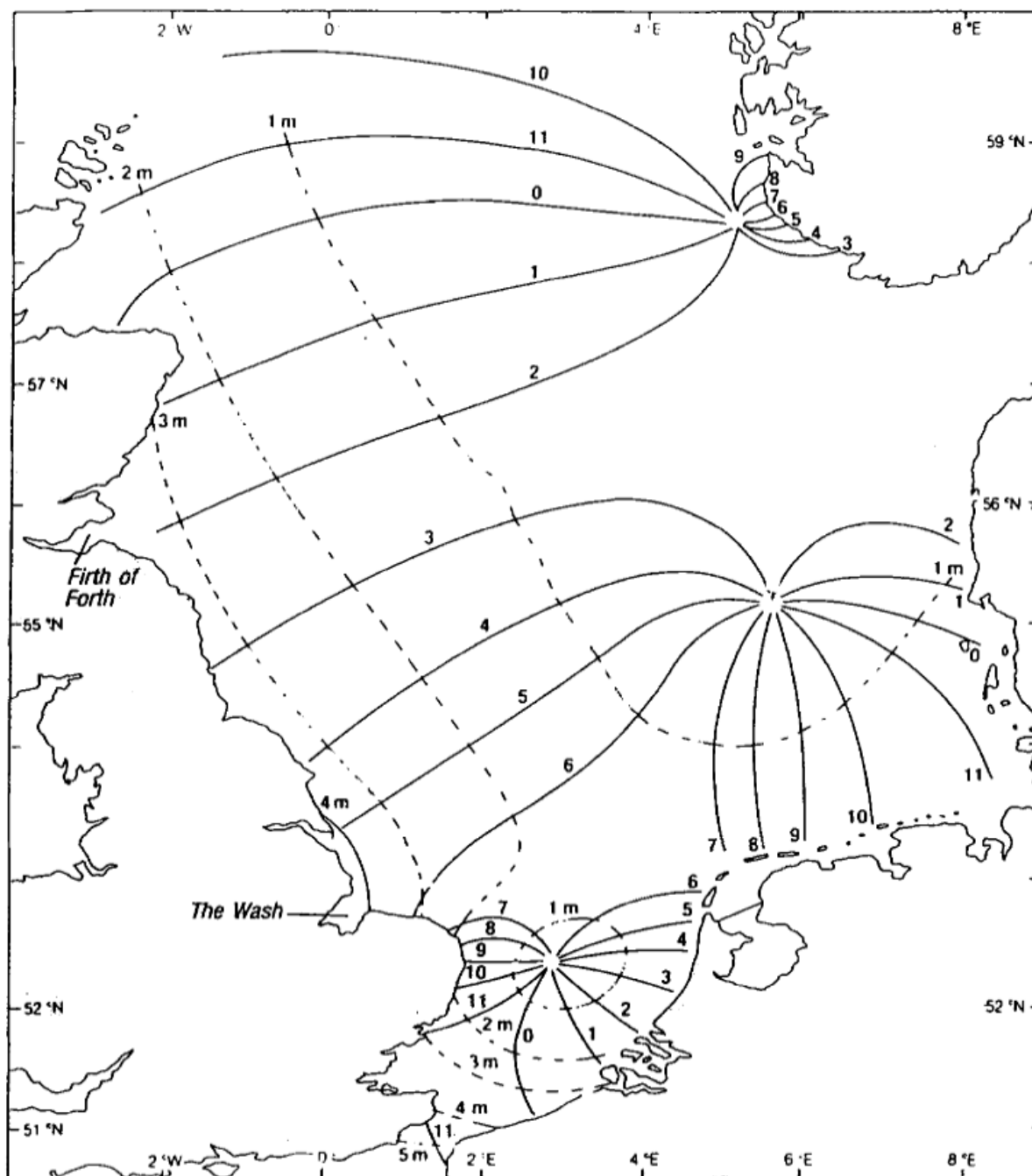


Figure 6 : Onde de marée en Mer du Nord