

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

28 mars 2026

Physique Chimie

DS 9

Type Mines

Durée : 4 heures

*Calculatrice **interdite***

Le sujet est constitué d'un unique problème découpé en trois parties largement indépendantes.

Les réponses doivent systématiquement être justifiées (sauf mention explicite du contraire). La clarté de la rédaction et la justesse du raisonnement mené seront valorisées, même si la tentative de réponse n'est pas aboutie ou si la réponse obtenue à la fin de la question est incorrecte.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur de sujet, merci de l'indiquer clairement sur votre copie, et de poursuivre votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené.e à prendre.

Comme au concours, le sujet est long. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.

Mesures optiques en astronomie

Ce sujet comporte trois parties indépendantes présentant des méthodes d'observation astronomiques utilisant divers dispositifs optiques. La partie 1 décrit une structure courante de l'univers, les étoiles binaires, avant de présenter une méthode interférométrique pour mesurer leur écart angulaire. La partie 2 s'intéresse à la structure fine des raies d'émission de l'atome d'hydrogène et à leur mesure interférométrique. La partie 3 explique le spectre lumineux de la lumière reçue par la Lune lors d'une éclipse.

Pour toutes les applications numériques, on se contentera de deux chiffres significatifs. Les données nécessaires, accompagnées d'un formulaire utile à la simplification des relations trigonométriques, sont regroupées en fin d'énoncé.

1 Les étoiles binaires et leur mesure

En astronomie, on parle d'étoile double pour une paire d'étoiles qui apparaissent comme proches l'une de l'autre dans le ciel lorsqu'on les observe depuis la Terre. Dans certains cas il s'agit d'un système binaire d'étoiles en orbite mutuelle : elles tournent toutes les deux autour de leur barycentre commun sous la seule action des forces gravitationnelles. Dans d'autres cas, leur alignement est simplement fortuit et ce cas ne nous concerne pas dans ce qui suit.

1.1 Structure gravitationnelle d'une étoile binaire

1.1.1 Un premier modèle très simple

On étudie le système formé de deux étoiles assimilées à deux points matériels A et B , de même masse M , toutes les deux en orbite circulaire de rayon r autour de leur barycentre commun O , lui-même immobile dans le référentiel galiléen d'étude $(Oxyz)$ (figure 1). On note $\mathcal{G}$ la constante de la gravitation universelle.

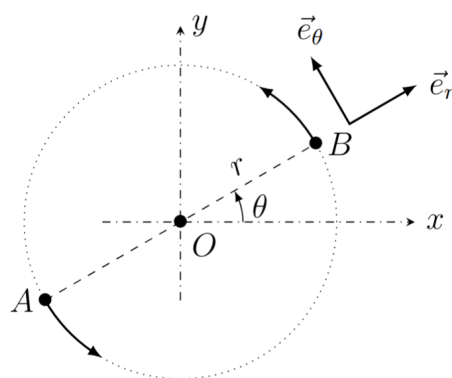


FIGURE 1 – Étoile binaire symétrique en mouvement circulaire

□ 1 – Exprimer les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées au sein du système en fonction notamment de M et r . Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à ces forces.

□ 2 – Exprimer la période T_1 du mouvement des deux composantes de l'étoile binaire en fonction de r , M et $\mathcal{G}$. *Application numérique* : Le système est formé de deux étoiles de même masse que le Soleil, distantes l'une de l'autre de la même distance que la distance moyenne Terre–Soleil (dite unité astronomique UA). Calculer la valeur de la période T_1 associée que l'on exprimera en années terrestres.

□ 3 – Exprimer, en fonction de $\mathcal{G}$, M et r , l'énergie mécanique totale du système. Commenter brièvement le signe de l'expression obtenue.

1.1.2 Généralisation partielle du modèle

On étudie maintenant, relativement au référentiel galiléen $(Oxyz)$, le mouvement du système binaire formé de deux étoiles ponctuelles A et B de masses $m_A > m_B$. On notera $\vec{R} = \overrightarrow{AB}$ leur position relative et $R = \|\vec{R}\|$. Le vecteur $\vec{R}$ est a priori variable (figure 2) ; le barycentre des deux étoiles, noté G , est donc aussi mobile.

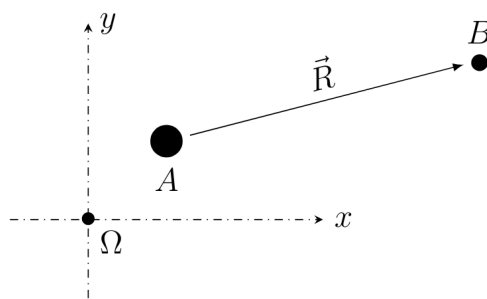


FIGURE 2 – Étoile binaire quelconque en mouvement arbitraire.

□ 4 – Exprimer en fonction de $m_A, m_B, \mathcal{G}$ et $\vec{R}$ les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_A$ exercées sur les deux étoiles. Ces forces dépendent-elles du référentiel d'étude ?

□ 5 – Montrer que le référentiel $(Gxyz)$ est également galiléen. Toute la suite de l'étude sera menée relativement à ce nouveau référentiel.

□ 6 – Établir les relations $\overrightarrow{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \vec{R}$ et $\overrightarrow{GA} = -\frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{R}$. En déduire la relation $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = -K \frac{\vec{R}}{R^n}$ et expliciter les constantes K et n .

□ 7 – Si l'étoile binaire forme un système lié, justifier que son mouvement est périodique et déterminer l'expression de la période T_2 du mouvement en fonction notamment des deux masses et d'une longueur que l'on précisera.

1.2 Mesure de l'écartement angulaire des étoiles doubles

Lorsque les deux étoiles sont très proches, elles peuvent être difficiles à distinguer. L'étude menée ici sera faite dans le domaine visible et on prendra pour longueur d'onde $\lambda_0 = 550 \text{ nm}$ d'un éclairage supposé ici monochromatique, avec un télescope constitué d'un

miroir parabolique (dont on admettra qu'il est équivalent à une lentille mince, unique et convergente) de distance focale $f' = 33$ m et de diamètre d'ouverture $d = 5$ m. On rappelle l'expression $\sin \theta \sim \lambda/d$ reliant l'échelle angulaire du phénomène de diffraction et la taille caractéristique de l'ouverture diffractante.

□ 8 – En déduire la valeur du pouvoir séparateur (ou résolution angulaire) du télescope utilisé. Montrer qu'un système binaire formé de deux étoiles distantes d'une unité astronomique ne peut pas être séparé s'il est, par rapport à l'observateur, distant de $L > L_{\max}$. Déterminer la valeur de $L_{\max}$ en années-lumière.

Lorsque la distance à laquelle se trouve le système double est trop élevée pour pouvoir en offrir une image bien séparée, on peut utiliser un dispositif interférométrique comme celui installé en 1920 par Michelson et Pease devant le télescope américain Hooker (figure 3).

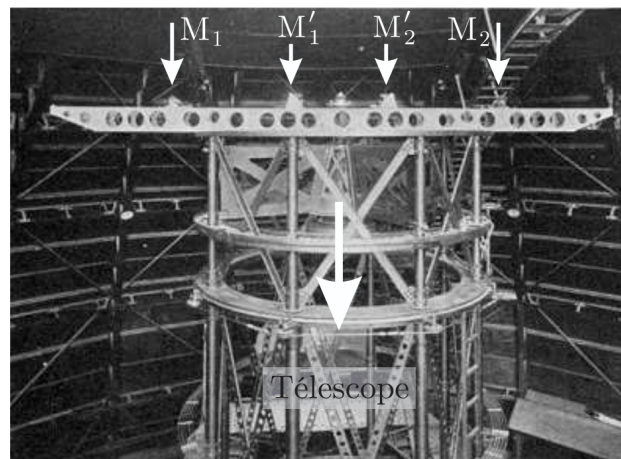


FIGURE 3 – Le dispositif interférométrique réel.

Le schéma décrivant le dispositif est proposé figure 4. On y remarquera que l'axe du télescope y est représenté horizontal pour plus de lisibilité et que ce dernier a été remplacé par une lentille équivalente.

Le faisceau parallèle issu de l'étoile A parvient dans la direction de l'axe optique sur le système, avant d'être réfléchi et diffracté par les miroirs M_1 et M_2 . Les miroirs auxiliaires M'_1 et M'_2 renvoient ces faisceaux vers le télescope avant de converger dans son plan focal image, au point F' pour le faisceau non diffracté et en d'autres points P pour le faisceau diffracté.

□ 9 – Rappeler l'énoncé du théorème de Malus (ou de Malus et Dupin). En déduire l'expression de la différence de marche $\delta_A = (AM_1P) - (AM_2P)$ en fonction de la géométrie du dispositif et d'une coordonnée cartésienne de P . *Application Numérique* : On donne $a = 2.50$ m. Calculer et commenter l'interfrange i .

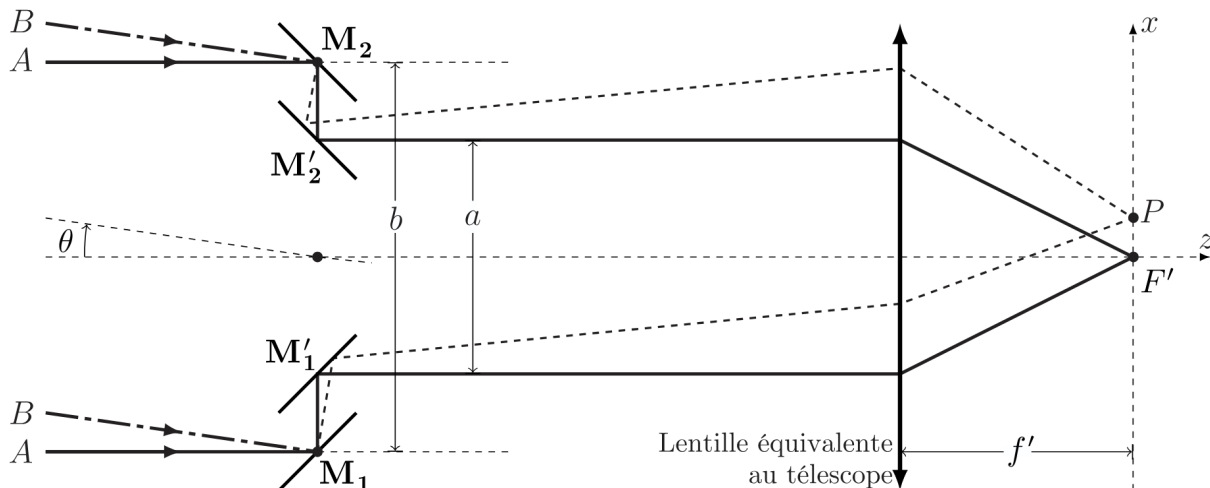


FIGURE 4 – Le schéma équivalent au dispositif interférentiel.

□ **10** – Exprimer l'intensité lumineuse (ou éclairement) $I_A(P)$ observée au point P en fonction de λ_0, a, f', x et de I_{0A} qui désigne l'intensité totale issue de A et parvenant sur l'un des miroirs M_1 ou M_2 .

On prend en compte maintenant la lumière provenant de l'étoile B , à la même longueur d'onde λ_0 mais décalée d'un angle θ . On note I_{0B} l'intensité totale issue de B . Sur la figure 4 ci-dessus on supposera $\theta > 0$.

□ **11** – Les sources A et B sont-elles cohérentes entre elles ? Calculer $\delta_B = (BM_1P) - (BM_2P)$ en fonction de δ_A, θ et b .

□ **12** – Exprimer l'intensité lumineuse totale $I(P)$ en utilisant la formule géométrique affirmée en annexe pour l'exprimer sous la forme :

$$I(P) = K \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) V(\theta) \right] \quad (1)$$

dans laquelle on explicitera uniquement les constantes K et Δx ainsi que la fonction $V(\theta)$ en fonction des données du problème.

□ **13** – Quelles sont les significations physiques de x_0 et x ? Expliquez comment l'étude des franges permet de mesurer l'écartement angulaire des deux composantes d'une étoile double à l'instant de l'observation. Comment, à votre avis, peut-on ainsi distinguer un vrai système binaire d'une étoile double par alignement fortuit ?

□ **14** – Quelle valeur faut-il donner à la largeur commune des miroirs auxiliaires M'_1 et M'_2 pour pouvoir observer en tout au moins une dizaine de franges de part et d'autre de la frange centrale ?

2 La raie rouge de l'hydrogène

La raie rouge de l'hydrogène est utilisée pour observer les étoiles et en particulier le Soleil. On observe notamment les phénomènes d'éruption solaire à l'aide de cette raie.

2.1 Les raies d'émission de l'atome d'hydrogène

2.1.1 Le modèle de Bohr et les raies de Balmer

En 1913, le physicien danois Niels Bohr propose un modèle semi-classique permettant d'estimer l'énergie de l'électron (masse m_e , charge e) au sein de l'atome formé d'un proton (charge $+e$ fixe à l'origine O des coordonnées). Dans un modèle classique et non relativiste, la seule force prise en compte est la force d'attraction électrique entre les deux charges. On notera ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide.

□ **15** – Montrer que dans ce modèle le mouvement de l'électron est plan. On notera r la distance de l'électron à O , $\frac{dr}{dt} = \dot{r}$ et σ l'amplitude du moment cinétique de l'électron.

□ **16** – Etablir l'équation de conservation $\frac{1}{2}m_e\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{cte}$ et exprimer l'énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r)$ en fonction de e, ϵ_0, m_e et σ .

□ **17** – Quelle est la signification physique d'un minimum de l'énergie potentielle effective ? En déduire le rayon r et l'énergie E d'une trajectoire circulaire en fonction de σ, m_e, ϵ_0 et e .

La raie rouge de l'hydrogène correspond à un rayonnement visible ($\lambda_0 = 656 \text{ nm}$) émis lors de la désexcitation de l'électron depuis la trajectoire circulaire de niveau $\sigma = 3\hbar$ vers le niveau $\sigma = 2\hbar$ où $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck.

□ **18** – Expliciter l'écart ΔE d'énergie entre ces deux niveaux puis λ_0 en fonction de h, c (célérité de la lumière dans le vide), e, m_e et ϵ_0 .

2.2 Une correction relativiste

L'expression établie ci-dessus constitue une première approximation qui doit être corrigée si on veut rendre compte des valeurs exactes des longueurs d'onde d'émission par une lampe à vapeur d'hydrogène atomique. Une de ces corrections est de nature relativiste. Nous allons seulement en chercher un ordre de grandeur.

□ **19** – On appelle *constante de structure fine* la grandeur $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 h c}$. Préciser sa dimension puis estimer son ordre de grandeur.

Dans le cadre relativiste, l'énergie mécanique totale d'une particule de masse m et de vitesse v a pour expression :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2)$$

□ **20** – Exprimer le développement limité de E à l'ordre 4 en v/c sous la forme $E = E_0 + \kappa v^2 + \mu v^4 + o(v^4/c^4)$ en précisant les expressions de κ et μ . Proposer une interprétation simple des deux premiers termes E_0 et κv^2 .

□ **21** – La correction relativiste à l'énergie E d'une transition entre niveaux d'énergie s'écrit sous la forme $\frac{\Delta E_{\text{relat}} - \Delta E}{\Delta E} \sim \alpha^p$. Dédurre de ce qui précède l'entier p puis conclure, numériquement.

2.3 Spectrométrie interférentielle

2.3.1 La méthode de Michelson

L'appareil utilisé est constitué (voir la figure 5) d'une lame séparatrice S semi-réfléchissante et d'une lame dite compensatrice C , parallèle à la précédente, de même épaisseur et de même indice optique. Ces deux lames sont toutes deux parallèles au plan (Ouz) où l'axe (Ou) est la première bissectrice des axes (Oy) et (Ox) qui sont orthogonaux aux miroirs plans M_f (fixe) et M_m (mobile le long de (Ox) à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$).

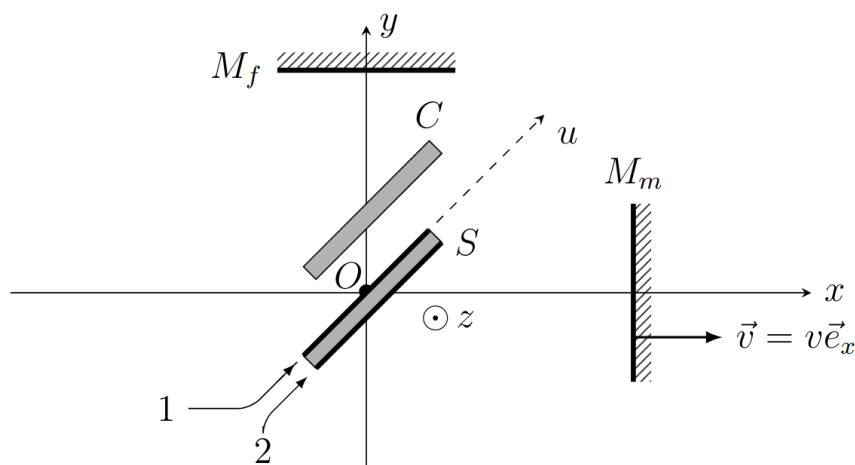


FIGURE 5 – L'interféromètre de Michelson

□ **22** – Expliquez, au moyen d'un schéma, le rôle de la lame (C) . Précisez en particulier, dans le cas de la figure 5, si la face réfléchissante de la lame (S) est la face supérieure (1) ou la face inférieure (2).

□ **23** – L'appareil est éclairé par une source de lumière étendue. Quelle est la nature des franges ? Où peut-on les observer ?

□ **24** – On utilise une source monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On choisit l'instant $t = 0$ au moment du contact optique et on note I_0 l'intensité lumineuse totale en sortie de l'appareil sur l'axe (Oy) lorsqu'un des deux miroirs est obstrué. Exprimer, en fonction de I_0, λ_0, v et t , l'intensité $I(t)$ observée sur cet axe lorsque les deux miroirs sont éclairés.

En 1892, Michelson installe, au bureau international des poids et mesures (BIPM) de Sèvres, un interféromètre identique à celui décrit ci-dessus pour rechercher parmi les lampes spectrales connues (hydrogène, cadmium, etc.), celle qui présenterait la meilleure monochromaticité et établir ainsi un étalon de longueur optique.

2.3.2 La mesure de la structure fine de la raie rouge

On éclaire maintenant l'appareil décrit ci-dessus au moyen d'une source bichromatique émettant deux raies de longueurs d'onde voisines, de longueurs d'onde $\lambda_1 = \lambda_0$ et d'intensités I_1 et $I_2 < I_1$.

□ **25** – En admettant que $|\Delta\lambda| \ll \lambda_0$, montrer que l'expression du contraste des franges s'écrit de la manière suivante :

$$C(t) = \sqrt{1 - \frac{4I_1I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(2\pi vt \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)} \quad (3)$$

puis calculer les contrastes maximal et minimal en fonction de I_1 et I_2 .

□ **26** – Réalisant la mesure du spectre de cette raie, Michelson a observé, en déplaçant le miroir mobile d'une longueur $x = 8.5 \text{ mm}$ depuis le contact optique, une diminution progressive du contraste qui atteint alors sa valeur minimale $C_{\min} \approx 15\%$. En déduire I_2/I_1 puis la valeur de $\Delta\lambda/\lambda_0$.

□ **27** – Commenter l'ordre de grandeur obtenu au regard des développements mécaniques qui précèdent.

3 Couleur de la Lune totalement éclipcée

Lorsqu'une éclipse de Lune se produit, cet astre change d'aspect durant plusieurs heures. Lorsqu'elle se trouve totalement immergée dans l'ombre de la Terre, la Lune prend une couleur évocatrice dont l'analyse fait l'objet de cette dernière partie.

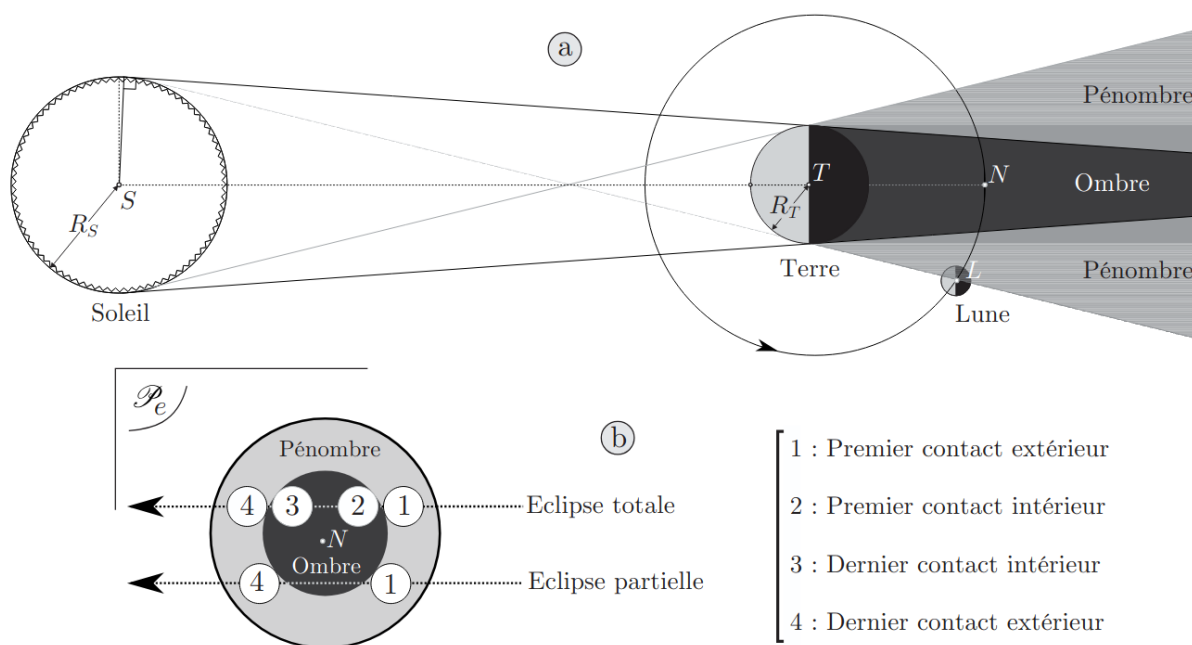


FIGURE 8 – Chronologie d'une éclipse de Lune : a) Phénomène général; b) Vision depuis la Terre de l'évolution dans une section droite du cône d'ombre terrestre au niveau de l'orbite lunaire. Les disques blancs contenant un chiffre représentent le disque lunaire dans l'étape repérée par ce chiffre

Une éclipse se produit lorsque la Lune entre dans le cône d'ombre de la Terre (Fig. 8a). On note N le point situé sur l'axe ST de symétrie de révolution du cône d'ombre terrestre (S centre du Soleil et T centre de la Terre) à la distance $r_L = TL$ de T (L centre de la Lune) à l'opposé du Soleil (Fig. 8a). Dans un plan frontal $\mathcal{P}_e$ orthogonal à ST , et placé en N , l'éclipse suit la chronologie indiquée sur la figure 8b. On note respectivement R_S , R_T et R_L les rayons solaire, terrestre et lunaire. Des considérations de géométrie élémentaire montrent que dans le plan $\mathcal{P}_e$, la Lune tient plus de deux fois dans le cône d'ombre de la Terre. Pourtant, durant la totalité (entre le premier contact intérieur et le dernier contact intérieur), c'est-à-dire lorsque la Lune est entièrement plongée dans l'ombre de la Terre, elle est nettement visible dans le ciel !

3.1 Sources de lumière éclairant la Lune

La photographie reproduite sur la figure 9 a été prise, depuis Toulouse, lors de l'éclipse totale de Lune du 28 septembre 2015. La direction du zénith (sens de la verticale ascendante) est indiquée sur la figure.

□ **28** – Situer la photographie de la figure 9 dans la chronologie de la figure 8b.

Eclipse de Lune du 28 septembre 2015



FIGURE 9 – Éclipse de Lune

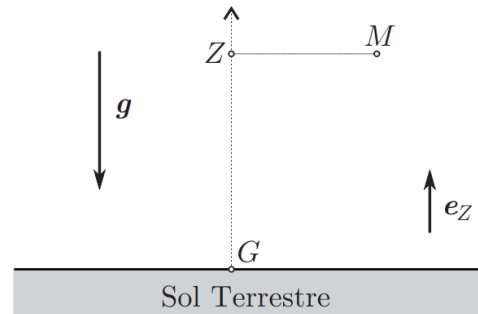


FIGURE 10 – Un point dans l'atmosphère terrestre.

On suppose désormais que la Lune est totalement immergée dans l'ombre de la Terre (éclipse totale) et que son centre L occupe le point N de son orbite.

Imaginons, pour commencer l'analyse, que la Terre soit dépourvue d'atmosphère.

□ **29** – Proposer un ordre de grandeur de l'angle θ_d caractéristique de la diffraction de la lumière solaire par la Terre, en admettant que cet angle est identique au phénomène de diffraction produit par une ouverture circulaire de même diamètre que la Terre, éclairé par une onde plane de direction ST . En déduire la taille caractéristique a_d de la figure de diffraction dans le plan d'observation $\mathcal{P}_e$. La diffraction peut-elle éclairer le disque lunaire durant la phase de totalité ? Citer, dans le contexte de l'hypothèse envisagée, d'autres sources possibles d'éclairage du disque lunaire.

On tiendra désormais compte de la présence de l'atmosphère terrestre, toutes les autres sources de lumière envisageables étant insusantes pour expliquer l'éclairement de la Lune durant la phase de totalité.

3.2 Modèle d'atmosphère isotherme

On suppose que l'atmosphère terrestre est en équilibre mécanique à une température $T \approx 20^\circ\text{C}$ uniforme et stationnaire. On cherche le profil altimétrique de masse volumique : c'est-à-dire l'expression de la masse volumique ρ_a en fonction de l'altitude Z mesurée depuis un point G de la surface terrestre (Fig. 10). Le vecteur unitaire $\vec{e}_Z$ sera dirigé dans le sens de la verticale ascendante, et on note $g \approx 9.80 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ l'intensité du champ de pesanteur terrestre. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. On note $R \approx 8.31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ la constante des gaz parfaits.

□ **30** – Déterminer le profil altimétrique de masse volumique $\rho_a(Z)$ en fonction de $\rho_a(0)$ et d'une hauteur caractéristique H_c que l'on exprimera et dont on calculera la valeur numérique.

□ **31** – Evaluer numériquement la masse volumique de l’air au niveau de la mer (pression d’environ 1 bar) puis en déduire celle de l’air au sommet du mont Everest (8848 m d’altitude) : on indique que $\exp(-1) \approx 1/3$. Les valeurs moyennes annuelles de pression et de température relevées au sommet de l’Everest sont respectivement 321 hPa et -23°C . Le modèle isotherme est-il réaliste ?

3.3 Onde électromagnétique incidente

Une onde électromagnétique plane, progressive et monochromatique, se propage dans le vide illimité le long et dans le sens d’un axe $(O, \vec{e}_x)$, l’espace étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ dans lequel on note x, y et z les coordonnées spatiales d’un point de l’espace et t , le temps. Le champ électrique de l’onde est polarisé rectilignement selon $\vec{e}_y$. On note $\mu_0 \approx 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide, c la constante d’Einstein (célérité dans le vide des ondes électromagnétiques), $E_m > 0$ l’amplitude du champ électrique, $B_m > 0$ celle du champ magnétique, ω la pulsation de l’onde, $E(x, t)$ la composante du champ électrique et $B(x, t)$, celle du champ magnétique. La phase du champ électrique, à l’origine spatio-temporelle, est nulle.

□ **32** – Donner les expressions réelles des champs de vecteur électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ puis exprimer B_m en fonction notamment de E_m . Représenter sur un même graphique, à une date t donnée, l’évolution spatiale du champ électrique ainsi que celle du champ magnétique.

□ **33** – Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}(x, t)$ en fonction notamment de E_m . Calculer l’ordre de grandeur de E_m pour une onde électromagnétique véhiculant une intensité $I_0 = 1 \text{ kW}\cdot\text{m}^{-2}$.

3.4 Transfert du rayonnement solaire à travers l’atmosphère terrestre

L’onde électromagnétique précédente se propage désormais dans l’atmosphère terrestre et rencontre sur son trajet, des molécules du gaz atmosphérique, mais aussi, dans la stratosphère (entre 15 et 20 km d’altitude), de fines poussières en suspension (aérosols). Le gaz atmosphérique a pour effet de diffuser sélectivement l’onde incidente (dépendance fréquentielle), réduisant ainsi la puissance transportée par l’onde. On modélise la diffusion atmosphérique en supposant que chaque molécule rencontrée diffuse, en moyenne temporelle, la puissance $\mathcal{P}_a$ donnée par :

$$\mathcal{P}_a = k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 I \quad (4)$$

où k_a et ω_0 sont des constantes qui caractérisent la composition chimique du gaz atmosphérique et I l’intensité de l’onde électromagnétique. On note $\eta_a(x)$ le nombre de molécules par unité de volume du gaz atmosphérique, x désignant toujours l’abscisse mesurée le long de la direction de propagation. Les poussières ont pour effet d’absorber non sélectivement (indépendance fréquentielle) l’onde incidente, réduisant aussi la puissance transportée. On modélise l’effet des poussières sur le rayonnement en supposant

que chaque poussière rencontrée absorbe, en moyenne temporelle, la puissance $\mathcal{P}_p$ donnée par :

$$\mathcal{P}_p = k_p I \quad (5)$$

où k_p est une constante qui caractérise la composition chimique des poussières. On note $\eta_p(x)$ le nombre de poussières par unité de volume.

□ **34** – Exprimer $\eta_a(x)$ en fonction notamment de la masse volumique du gaz atmosphérique $\rho_a(x)$ au point d'abscisse x .

□ **35** – Effectuer un bilan unidimensionnel de puissance électromagnétique moyenne pour une tranche d'air limitée par les plans d'abscisse x et $x + dx$; en déduire la relation liant l'intensité $I(x + dx)$ de l'onde en $x + dx$ en fonction notamment de l'intensité $I(x)$ en x : il faudra prendre en compte les deux phénomènes, de diffusion et d'absorption.

□ **36** – Montrer qu'il est possible d'écrire $I(x)$ sous la forme suivante :

$$I(x) = I(0) \exp[-d_o(x)] \quad (6)$$

où $d_o(x)$ est un facteur, appelé *densité optique*, que l'on exprimera en fonction des quantités intégrales :

$$\int_0^x \eta_a(\xi) d\xi \quad \text{et} \quad \int_0^x \eta_p(\xi) d\xi \quad (7)$$

3.5 Réfraction atmosphérique

Lorsqu'un rayon lumineux solaire traverse l'atmosphère terrestre, il subit une réfraction (Fig. 11).

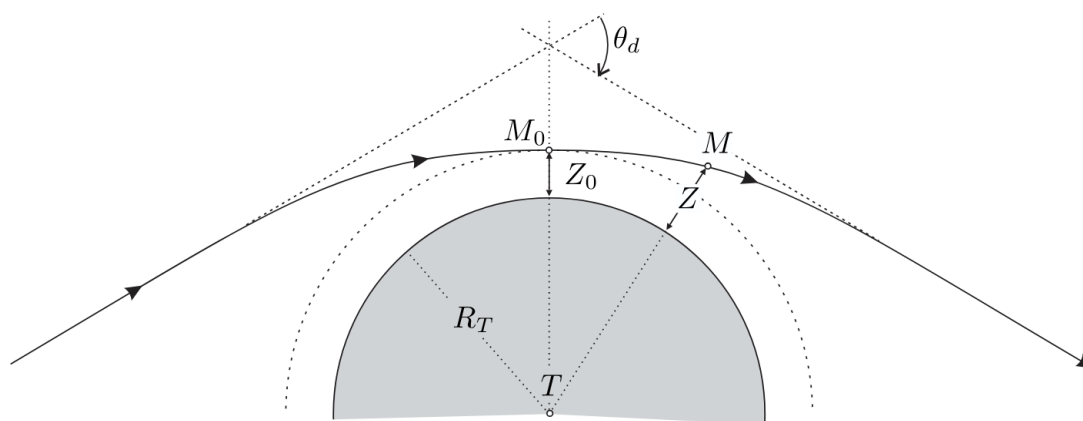


FIGURE 11 – Déviation d'un rayon lumineux par l'atmosphère terrestre.

On note M un point quelconque sur la trajectoire du rayon, et Z , son altitude. On note M_0 le point de la trajectoire le plus proche du sol, et Z_0 son altitude. On pose :

$$r = TM = R_T + Z \quad \text{et} \quad r_0 = TM_0 = R_T + Z_0 \quad (8)$$

Pour une longueur d'onde donnée, l'indice de l'air $n(Z)$ dépend de l'altitude, selon la loi de variation suivante :

$$n(Z) = 1 + \epsilon_\lambda \frac{\rho_a(Z)}{\rho_a(0)} \quad \text{avec} \quad \epsilon_\lambda = a + \left(\frac{\lambda_r}{\lambda} \right)^2 \quad (9)$$

avec $a = 2.8 \cdot 10^{-4}$ et $\lambda_r = 0.42 \text{ nm}$. On note $n_0 = n(Z_0)$.

L'angle θ_d , de déviation totale du rayon après traversée de l'atmosphère (Fig. 11), est donné par :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx 2 \int_1^{n_0} \left\{ \left[\frac{r(n)}{r_0(n_0)} \right]^2 - 1 \right\}^{-1/2} dn \quad (10)$$

□ **37** – Pourquoi l'atmosphère terrestre réfracte-t-elle les rayons lumineux qui la traversent ?

□ **38** – En tenant compte des ordres de grandeur du problème, précisément $Z \ll R_T$ et $Z_0 \ll R_T$, exprimer $\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1}$ en fonction de $u = Z - Z_0$. Exprimer dn en fonction de $d\rho_a$ puis $d\rho_a$ en fonction de $H_c, \rho_a(Z_0), u$ et du .

On donne la valeur de l'intégrale suivante, qui se ramène aisément à l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv = \sqrt{\pi} \quad (11)$$

□ **39** – Dédurre des expressions obtenues à la question précédente que l'angle de déviation totale, d'un rayon monochromatique passant en M_0 , s'écrit :

$$\theta_d(Z_0, \lambda) \approx \Theta(Z_0) \epsilon_\lambda \quad (12)$$

où $\Theta(Z_0)$ est une fonction de Z_0 que l'on exprimera en fonction de R_T, H_c et Z_0 . Pour quelle valeur particulière de Z_0 , notée Z_m , la déviation d'un rayon lumineux est-elle maximale ?

□ **40** – Exprimer l'écart de déviation $\delta\theta_d$ correspondant à deux rayons incidents passant au même point M_0 (et donc caractérisés par le même Z_0) mais possédant des longueurs d'ondes qui diffèrent de $\delta\lambda$.

La minute d'arc ($1'$), soit le soixantième de degré, vaut environ : $1' \approx 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. En adoptant la valeur numérique réaliste $H_c \approx 7.3 \text{ km}$ du profil atmosphérique de masse volumique, et pour la longueur d'onde $\lambda_m = 504 \text{ nm}$ du maximum d'émission spectrale solaire : $\theta_d(Z_m, \lambda_m) \approx 70'$. Avec les valeurs $\delta\lambda \approx 350 \text{ nm}$, $Z_0 = Z_m$ et $\lambda = \lambda_m$, sur l'étendue du domaine visible, l'application numérique donne $|\delta\theta_d| \approx 0.25'$. La dépendance chromatique de la déviation étant négligeable devant l'angle de déviation, on supposera que les rayons sont identiquement déviés, indépendamment de leur longueur d'onde, avec un angle pouvant varier entre $0'$ et $\theta_{d,M} = 70'$.

□ 41 – L'angle sous lequel le rayon terrestre est vu depuis N est d'environ $\theta_T \approx 57'$ tandis que celui sous lequel le rayon solaire est vu depuis la Terre vaut environ $\theta_S \approx 16'$. L'atmosphère terrestre est-elle capable de dévier la lumière solaire pour éclairer le point N ? On justifiera quantitativement la réponse en s'appuyant sur un schéma.

3.6 Prédiction du spectre de la lumière reçue par la Lune

Le spectre de la lumière solaire hors de l'atmosphère terrestre est donné sur la partie gauche de la figure 12 (spectre de référence E-490-00). Le calcul numérique basé sur le modèle qui vient d'être développé permet de tracer, sur la partie droite de la figure 12, l'atténuation $\exp(-d_o)$ en N en fonction de la longueur d'onde de l'onde incidente.

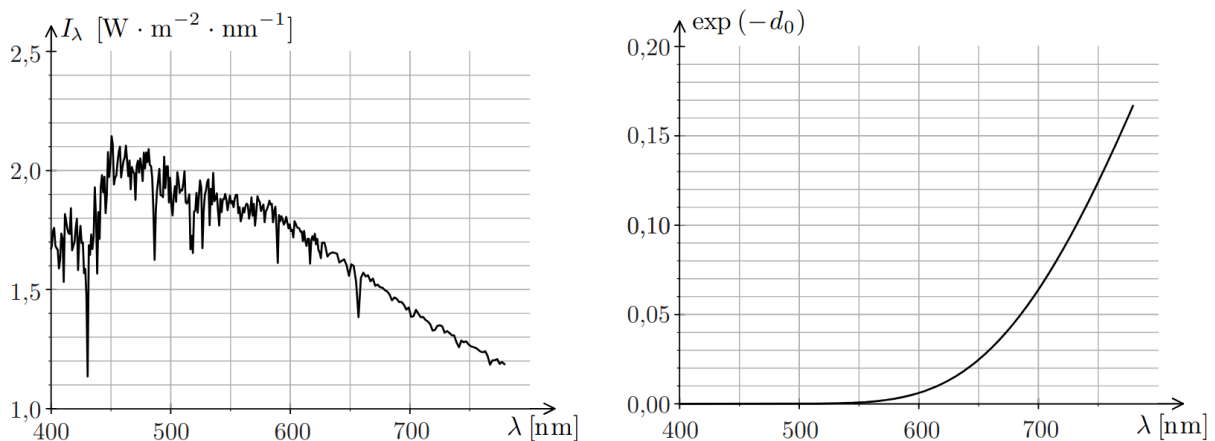


FIGURE 12 – À gauche : Spectre solaire hors de l'atmosphère terrestre. À droite : facteur d'atténuation spectrale $\exp(-d_o)$

□ 42 – À l'aide des deux schémas de la figure 12, déterminer quelques points du spectre de la lumière reçue par la Lune en N permettant de représenter la courbe correspondante sur la feuille réponse. Conclure sur la couleur de la Lune totalement occultée.

Données numériques

Année-lumière	$1 \text{ AL} = 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Constante de la gravitation universelle	$\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
Distance Terre-Soleil (unité astronomique)	$d = 1 \text{ UA} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du Soleil	$M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Période du mouvement de la Terre (année)	$T_0 = 365,25 \text{ j} = 3,16 \cdot 10^7 \text{ s}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

$$\sqrt{2} \simeq 1,41, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71$$

Distance Terre-Lune (centre à centre) : $r_L = TL \approx 3,84 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon du Soleil : $R_S \approx 6,96 \times 10^8 \text{ m}$

Rayon de la Terre : $R_T \approx 6,37 \times 10^6 \text{ m}$

Rayon de la Lune : $R_L \approx 1,74 \times 10^6 \text{ m}$

Formulaire

Pour tous $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\theta_1 \in \mathbb{R}$ et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = a \cos \left[\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \varphi \right] ,$$

avec respectivement :

$$a = (a_1 + a_2) \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}} \quad \text{et} \quad m = \frac{2\sqrt{a_1 a_2}}{a_1 + a_2} ,$$

tandis que $\varphi \in \mathbb{R}$ est donné par :

$$\tan \varphi = \frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \tan \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} .$$

