

DS9 - Type Mines Correction

I - Les étoiles binaires et leur mesure

1. La force exercée par A sur B est $\vec{F}_B = -G \frac{M^2}{(2r)^2} \vec{e}_r = -\frac{GM^2}{4r^2} \vec{e}_r$

De même la force exercée par B sur A est $\vec{F}_A = +\frac{GM^2}{4r^2} \vec{e}_r$

Ces deux forces sont chacune associées à une énergie potentielle:

$$E_p(r) = -\frac{GM^2}{2r}$$

(on ne compte E_p qu'une fois car $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ reflètent la même interaction)

2. Le mouvement étant circulaire uniforme, l'accélération des planètes est donnée par $\vec{a}(B) = -\vec{a}(A) = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$.

On applique le PFD à la étoile B dans le référentiel galiléen d'étude; on obtient: $M r \dot{\theta}^2 = \frac{GM^2}{4r^2}$ d'où $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{4r^3}}$.

Or $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T_1}$ d'où

$$T_1 = 4\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

On a donc $T_1 \approx \frac{4\pi}{\sqrt{2 \cdot 10^{30}}} \times \sqrt{\frac{0.5 \cdot 10^{-33}}{7 \cdot 10^{-11}}} \approx 2 \cdot 10^{-15} \sqrt{10^{44}} \approx 2 \cdot 10^7 \text{ s}$

$$T_1 \approx 0,6 \text{ an}$$

3. L'énergie cinétique de l'étoile A et de l'étoile B est:

$$E_{c,A}(r) = E_{c,B}(r) = \frac{1}{2} M r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} r \times \frac{GM^2}{4r^2} = \frac{GM^2}{8r}$$

D'où: $E_c(r) = \frac{GM^2}{4r}$ et

$$E_m(r) = E_p + E_c = -\frac{GM^2}{4r}$$

Cette énergie est négative, donc on se trouve dans un état lié: les deux étoiles restent en orbite l'une autour de l'autre.

4. On a $\vec{F}_B = - \frac{G m_A m_B}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$ et $\vec{F}_A = \frac{G m_A m_B}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R}$.

Ces forces sont toujours les mêmes et ne dépendent pas du référentiel d'étude.

5. On applique le PFD à l'ensemble des deux étoiles, qui n'est soumis à aucune force extérieure (seulement des forces intérieures), dans le référentiel d'étude galiléen. Mais ce système est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel d'étude, il est donc également possible de considérer que $(Gxyz)$ est galiléen : $(Gxyz)$ est en translation rectiligne uniforme par rapport à $(Oxyz)$.

6. On a par définition de G : $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$

De plus $\vec{AB} = \vec{R} = \vec{GB} - \vec{GA}$

D'où : $m_A (\vec{GB} - \vec{R}) + m_B \vec{GB} = \vec{0}$

On en déduit : $\vec{GB} = \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot \vec{R}$, de même $\vec{GA} = - \frac{m_B}{m_A + m_B} \vec{R}$

Par ailleurs on peut appliquer le PFD à l'étoile B dans le référentiel barycentrique $(Gxyz)$: $m_B \frac{d^2 \vec{GB}}{dt^2} = \vec{F}_B$

Ainsi : $\frac{m_A m_B}{m_A + m_B} \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = - \frac{G m_A m_B}{R^3} \vec{R}$

On en déduit encore $\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = - K \frac{\vec{R}}{R^3}$ où

$$\begin{cases} K = G(m_A + m_B) \\ n = 3 \end{cases}$$

7. Supposons que A et B sont en mouvement circulaire uniforme, on peut alors en déduire que $\vec{R}$ a également un mouvement circulaire uniforme et sa vitesse angulaire Ω est telle que :

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = - \vec{R} \Omega^2 = - G(m_A + m_B) \frac{\vec{R}}{R^3}$$

Alors $\Omega^2 = \left(\frac{2\pi\tilde{\nu}}{T_2}\right)^2 = \frac{G(m_A+m_B)}{R^3}$ d'où $I_2 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{G(m_A+m_B)}}$

(On retrouve bien le résultat de Q2 si on prend $R = 2r$ et $m_A = m_B = M$)

8. Pour que deux taches de diffraction soient séparées, il faut que l'écart angulaire entre les deux dépasse la largeur du pic de diffraction donc $\Delta\theta \geq \frac{\lambda}{L}$, ainsi la résolution angulaire est $\Delta\theta_{\min} = \frac{\lambda}{L} = \frac{5,5 \cdot 10^{-7}}{5} = 1,1 \cdot 10^{-7}$ rad.

Le système de deux étoiles séparées d'une distance R et situé à une distance L a un écart angulaire $\Delta\theta = \frac{R}{L}$ (si $L \gg R$).

On aura bien séparation des taches de diffraction si $\Delta\theta \geq \Delta\theta_{\min}$

donc si $L < L_{\max}$ où

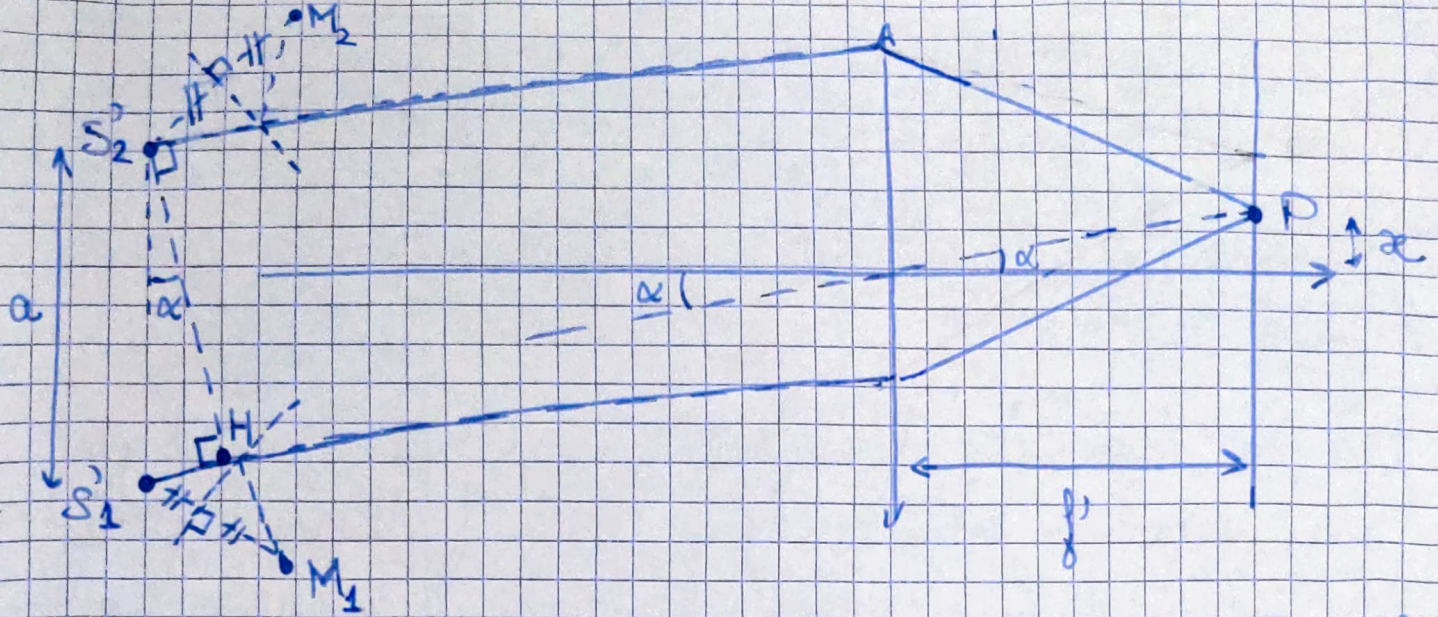
$$L_{\max} = \frac{R L}{\lambda}$$

Ici $L_{\max} = \frac{15 \cdot 10^{11} \times 5}{5,5 \cdot 10^{-7}} \times \frac{1}{10^{16}} = 150$ années lumière
conversion en AL

9. D'après le théorème de Malus, les rayons lumineux sont perpendiculaires aux surfaces d'onde. De plus on sait que les surfaces d'onde sont des surfaces de phase constante.

Les rayons considérés sont diffractés par M_1 et M_2 donc tout se passe comme si on avait deux sources cohérentes en M_1 et M_2 , de plus les rayons arrivant de A en M_1 et M_2 sont en phase car A est sur l'axe optique donc $(AM_1) = (AM_2)$.

On peut refaire le schéma avec les sources fictives S'_1 et S'_2 images de M_1 et M_2 par M'_1 et M'_2 :



Par théorème de Malus et principe de retour inverse de la lumière on a $(S_1'P) = (HP)$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \delta &= (AM_1P) - (AM_2P) \\ &= (AM_1) - (AM_2) + (S_1'P) - (S_2'P) \\ &= (S_1'H) \\ &= a \tan(\alpha) \\ &= a \times \frac{x}{D} \quad \text{ainsi} \end{aligned}$$

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

L'interfrange i est tel que $\delta(x+i) = \delta(x) + \lambda$ d'où $i = \frac{\lambda D}{a}$

Ici $i = \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \times 33}{2,5} \approx 7 \mu\text{m}$ Cet interfrange est a priori

faible devant les dimensions du capteur, il faudra pour l'observer par exemple une barrette CCD de haute résolution.

10. On utilise la formule de Fraunhofer:

$$I_n(P) = 2\sqrt{I_{0A} I_{0B}} \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) + I_{0A} + I_{0B}$$

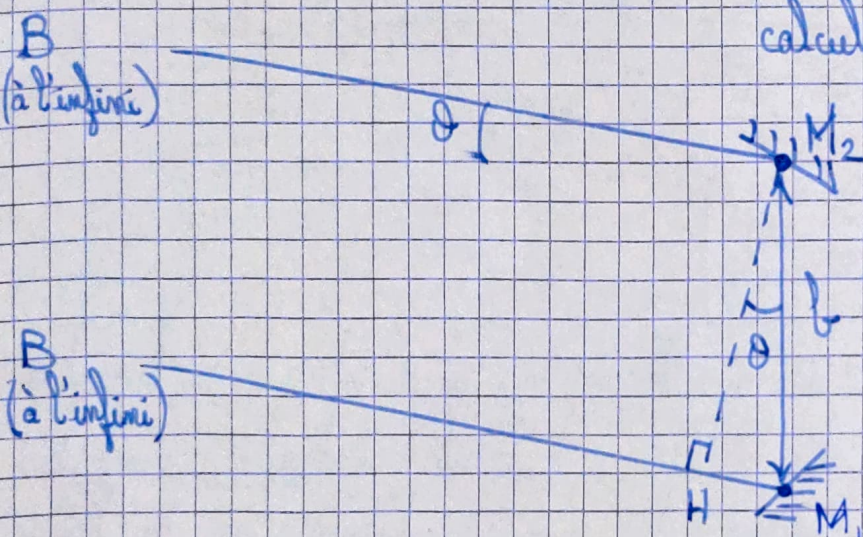
$$I_n(P) = 2I_{0A} \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{ax}{\lambda D}\right)\right)$$

[Rq: il y a une erreur d'écriture car a priori I_n dépend de x : l'intensité]

diffraction par le miroir et maximum pour $x=0$, l'image du point A en optique géométrique, et est réduite autour.

11. Les deux sources sont des étoiles différentes donc elles sont nécessairement incohérentes entre elles. On a :

$$\begin{aligned}\delta_B &= (BM_1P) - (BM_2P) \\ &= (BM_1) - (BM_2) + \underbrace{(M_1P) - (M_2P)}_{\text{calculé en Q9 : } \frac{ax}{f} = \delta_A}\end{aligned}$$



Par théorème de Males
on a $(BM_2) = (BH)$
et $(HM_1) = b \sin \theta$

Ainsi : $\delta_B = b \sin \theta + \frac{ax}{f}$

On en déduit : $\boxed{\delta_B = \delta_A + b \sin \theta}$

12. On a alors :

$$\begin{aligned}I_B &= 2I_{0B} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta_B}{\lambda} \right) \right) \\ &= 2I_{0B} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{ax}{\lambda f} + 2\pi \frac{b \sin \theta}{\lambda} \right) \right)\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}I(P) &= I_A + I_B \\ &= 2(I_{0A} + I_{0B}) + I_{0A} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f} \right) + I_{0B} \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda f} + \frac{2\pi b \sin \theta}{\lambda} \right) \\ &= K \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} \right) \right] V(\theta) \quad \text{avec, en utilisant la}\end{aligned}$$

formule de l'éclaire, $R = 2(I_{0A} + I_{0B})$

$$R \times V(\theta) = 2(I_{0A} + I_{0B}) \sqrt{1 - m^2 \sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{a}\right)}$$

$$\text{où } m = \frac{2\sqrt{I_{0A}I_{0B}}}{I_{0A} + I_{0B}}$$

Soit : $V(\theta) = \sqrt{1 - \frac{4I_{0A}I_{0B}}{(I_{0A} + I_{0B})^2} \sin^2\left(\frac{\pi b \sin \theta}{a}\right)}$

$$\text{Et } 2\pi \frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{2\pi a x}{\lambda p} + \frac{2\pi b \sin \theta}{2\lambda} + \varphi$$

Par identification :

$$\Delta x = \frac{\lambda p}{a}$$

13. x indique la position à laquelle on mesure l'intensité sur le capteur.
 x_0 indique la position de la frange brillante centrale correspondant au système de franges somme des systèmes de chacune des deux étoiles. C'est un point pour lequel les franges de A et de B sont toutes deux brillantes.

Si on a un vrai système binaire, θ va varier au cours du temps et I_{0A} et I_{0B} seront du même ordre de grandeur, ainsi m sera d'ordre 1 $\Rightarrow V(\theta)$ va varier significativement au cours du temps. Dans le cas d'un alignement fortuit, θ est constant et les étoiles sont à des distances très différentes et $I_{0A} \gg I_{0B}$ (ou l'inverse), on aura ainsi $m \ll 1$ et $V(\theta) \approx 1$.

14. On veut pouvoir observer au moins dix franges à l'intérieur du pic de diffraction, pour cela il faut que sur le schéma fait en Q9 on ait $\alpha \leq \frac{1}{2} \delta \theta_{\min}$ lorsque $\alpha = 10^\circ$
 demi-largeur du pic de diffraction

Donc il faut que : $\frac{10i}{\lambda} = \tan(\alpha) \leq \tan(\theta_{\min}) = \frac{\lambda}{d}$

ou encore : $d \leq \frac{\lambda}{10i} = \frac{\lambda}{10} \times \frac{a}{\lambda} = \frac{a}{10} = \boxed{0,25 \text{ m}}$

(Rq : d'habitude on cherche à maximiser d pour avoir la figure la plus petite possible et faire une image géométrique ; ici c'est le contraire : on veut une grande figure de diffraction pour voir les interférences dedans, un peu comme dans l'expérience des trous d'Young).

II - Raie rouge de l'hydrogène

15. L'atome n'étant soumis à aucune force extérieure, dans le cas d'un gaz parfait, on pourra considérer que le référentiel du noyau est galiléen. Dans ce référentiel, on applique le théorème du moment cinétique à l'électron, soumis à la seule force électrique. Cette force étant centrale, son moment en O est nul et :

$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0}$ donc le moment cinétique de l'électron en O est constant, or $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m_e \frac{d\vec{OM}}{dt}$ donc le mouvement se fait dans le plan passant par O et normal à $\vec{L}_0$. Dans ce plan, on se place en coordonnées cylindriques, telles que $\vec{L}_0 = \sigma \vec{e}_z$ et $\sigma = m r^2 \dot{\theta}$.

16. L'énergie cinétique de l'électron est :

$$E_c = \frac{1}{2} m \left\| \frac{d\vec{OM}}{dt} \right\|^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2 m r^2}$$

De plus l'électron a une énergie potentielle :

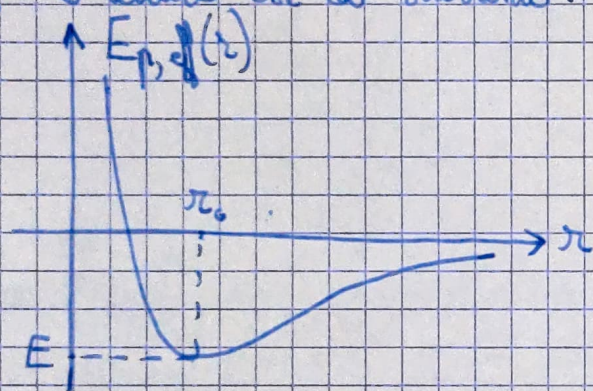
$$E_p = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Par le théorème de l'énergie mécanique appliqué à l'électron dans le référentiel du noyau: $E_m = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 + \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = c^2$

Or on peut définir
$$U_{\text{eff}}(r) = \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Alors le mouvement se réduit à un mouvement fictif à une dimension selon r avec une énergie potentielle effective $U_{\text{eff}}(r)$.

17. L'allure est la suivante:



Un minimum d'énergie potentielle effective correspond à une possible trajectoire circulaire pour laquelle $\frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 = 0$ donc $\dot{r} = 0$ (position d'équilibre pour le rayon)

Ici $U_{\text{eff}}'(r) = -\frac{\sigma^2}{m_e r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$U_{\text{eff}}'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{4\pi\epsilon_0 \sigma^2}{m_e e^2}$

Alors $U_{\text{eff}}(r) = \frac{\sigma^2}{2m_e r^2} - \frac{\sigma^2}{m_e r^2} = -\frac{\sigma^2}{2m_e r^2}$ et on

a $E_{\text{eff}} = \frac{1}{2} m_e \dot{r}^2 = 0$ d'où $E = -\frac{\sigma^2}{2m_e r^2}$

18. On a $E = -\frac{\sigma^2}{2m_e} \times \frac{m_e^2 e^4}{16\pi^2 \epsilon_0^2 \sigma^4} = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \sigma^2}$

$\Delta E = E(\sigma = 3\hbar) - E(\sigma = 2\hbar)$

$$= \frac{m_e e^4}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) = \frac{5 m_e e^4}{288 \epsilon_0^2 \hbar^2}$$

 $= (2\pi)^2 \times 8 \text{ et } 2\pi\hbar = \hbar$

et $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$ ainsi

$$\lambda = \frac{288 \epsilon_0^2 h^3 c}{5 m_e e^4}$$

19. On remarque que :

$$\alpha = \underbrace{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \lambda}}_{\text{énergie}} \times \underbrace{\frac{\lambda}{hc}}_{\text{l'inverse d'une énergie}} \times \underbrace{2\pi}_{\text{sans unité}} \quad \text{donc } \alpha \text{ est sans unité}$$

De plus $\alpha \approx \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{12 \times 10^{-11} \times 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} \approx \frac{2 \cdot 10^{-38}}{4 \cdot 10^{-36}} \approx \boxed{5 \cdot 10^{-3}}$

20. On a : $E = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

$$= mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \frac{v^4}{c^4} \right] \quad \text{à l'ordre 2 en } (v/c)^2$$

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2}$$

On a ainsi $\kappa = \frac{1}{2}m$ et $\mu = \frac{3m}{8c^2}$

Le premier terme indique l'énergie "de masse" de la particule qui lui est intrinsèque (hors programme)

Le second terme correspondant à l'énergie cinétique en mécanique classique.

21. Nous avons vu que $E = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2}$

En supposant la particule non relativiste $v \ll c$ et $\frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2} \ll \frac{1}{2} m v^2$.

Alors $E_{\text{relat}} - E = \frac{3}{8} \frac{m v^4}{c^2}$

Or $\sigma = m r^2 \dot{\theta} = m \cdot r \cdot v$ donc $v = \frac{\sigma}{m r}$

En réutilisant Q17 on a :

$$v = \frac{\sigma}{m_e} \times \frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 \sigma^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sigma}$$

On en déduit

que $E_{\text{relat}} - E = \frac{3}{8} \frac{m_e}{c^2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \sigma} \right)^4$

Par ailleurs on a vu en Q18 que ΔE et E sont proportionnels (il suffit de multiplier par $\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}$ où $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$) et donc on a :

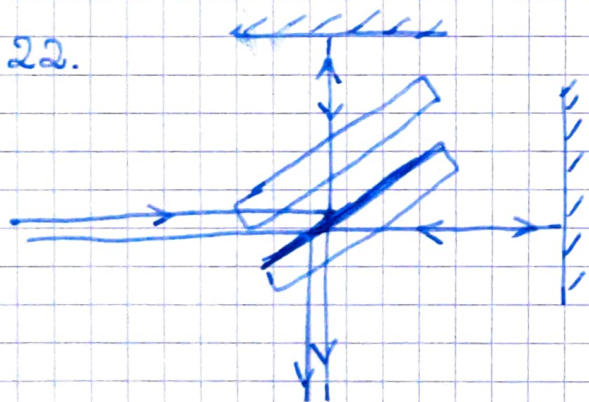
$$\frac{\Delta E_{\text{relat}} - \Delta E}{\Delta E} \propto \frac{E_{\text{relat}} - E}{E} \propto \frac{3}{8} \frac{m_e}{c^2} \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 \sigma} \right)^4 \frac{32\pi^2 \epsilon_0^2 \sigma^2}{m_e e^4}$$

$$\frac{\Delta E_{\text{relat}} - \Delta E}{\Delta E} \sim \frac{3}{4} \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2} \times \frac{1}{\sigma^2 c^2} \propto \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 c^2} \quad \text{car } \sigma \propto \hbar \text{ dans le modèle de Bohr}$$

On conclut que $\frac{\Delta E_{\text{relat}} - \Delta E}{\Delta E} \propto \alpha^2$ d'où $\boxed{\mu = 2}$

Et $\alpha^2 \sim 2 \cdot 10^{-5} \ll 1$ donc cette correction est très faible.

22.



Les deux rayons traversent trois fois une lame de verre grâce à la compensatrice. Ceci permet d'éviter une différence de marche additionnelle entre les deux rayons liée à la lame de verre.

On en déduit que la face réfléchissante est la face supérieure de la séparatrice.

23. On observe des franges d'égal inclinaison (donc en forme d'anneaux) qui sont localisées à l'infini.

24. La différence de marche entre les deux rayons est $S = 2x(t)$ avec $x(t) = vt$ ($x = 0$ à $t = 0$ car on est au contact optique). Ainsi on peut écrire par la formule de Fresnel :

$$I(t) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos\left(2\pi \frac{S}{\lambda}\right)$$

$$\boxed{I(t) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi vt}{\lambda}\right) \right)}$$

25. Les longueurs d'onde étant incohérentes entre elles, leurs intensités s'ajoutent. On a donc:

$$I_{\text{tot}}(t) = 2I_1 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi v t}{\lambda_1}\right) \right) + 2I_2 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi v t}{\lambda_2}\right) \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_0} \quad \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \underset{\cos \Delta\lambda \ll \lambda_0}{\approx} \frac{1}{\lambda_0} \left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \right) \approx \frac{1}{\lambda_0} - \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

On en déduit:

$$I_{\text{tot}}(t) = 2(I_1 + I_2) + 2I_1 \cos\left(\frac{4\pi v t}{\lambda_0}\right) + 2I_2 \cos\left(\frac{4\pi v t}{\lambda_0} - \frac{4\pi v t \Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$$

Par la formule de l'annexe et un raisonnement identique à Q12 on aboutit à:

$$C(t) = \sqrt{1 - m^2 \sin^2\left(\frac{2\pi v t \Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)} \quad \text{où } m = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

ce qui correspond bien à l'énoncé.

Les contrastes maximal et minimal sont atteints lorsque $\sin^2\left(\frac{2\pi v t \Delta\lambda}{\lambda_0^2}\right)$

prend 0 ou 1, on a donc:

$$C_{\min} = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2}} = \sqrt{\left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\right)^2} = \boxed{\frac{|I_1 - I_2|}{I_1 + I_2}}$$

$$\text{Et } \boxed{C_{\max} = 1}$$

26. On a $C_{\min} = \frac{1 - \frac{I_2}{I_1}}{1 + \frac{I_2}{I_1}}$ d'où $\left(1 + \frac{I_2}{I_1}\right) C_{\min} = 1 - \frac{I_2}{I_1}$

$$\text{et } \boxed{\frac{I_2}{I_1} = \frac{1 - C_{\min}}{1 + C_{\min}}} = \frac{0,85}{1,15} \approx \boxed{0,7}$$

De plus $C = C_{\min}$ est atteint pour la première fois pour

$$\frac{2\pi v t \Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{avec } x = vt \quad \text{donc } \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{4x}}$$

On trouve ainsi $\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} \approx \frac{6 \cdot 10^{-7}}{4 \cdot 8,5 \cdot 10^{-3}} \sim \boxed{1,5 \cdot 10^{-5}}$ car la raie est rouge

27. Cet écart est de l'ordre de la correction relativiste trouvée en Q21. Il doit donc probablement s'expliquer, à l'aide de la théorie de la relativité et indiquer que la raie est en réalité composée de deux raies très proches.

III - Couleur de la Lune totalement éclipsée

28. La Terre tourne d'Ouest en Est et dans le même sens que la Lune, puisque cette dernière montre toujours la même face à la Terre. Donc sur la figure 8a, le Nord est au recto du schéma et le Sud au verso. Comme Toulouse se situe dans l'hémisphère Nord, le zénith pointe vers le haut de la figure 8b. La photographie se trouve donc entre les phases 3 et 4 lorsque la Lune sort du cône d'ombre.

29. Cet angle, pour une longueur d'onde λ , est de l'ordre de $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{2R_T}$. En supposant $R_T \ll r_L$ on peut également écrire $\theta_2 \approx \tan(\theta_2) = \frac{a_2}{r_L}$ ainsi :

$$\boxed{a_2 = \frac{\lambda r_L}{2R_T}}$$

Les applications numériques avec $\lambda \approx 500 \text{ nm}$ (visible) donnent alors $\theta_2 \sim \frac{5 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 7 \cdot 10^6} \sim 3 \cdot 10^{-14} \text{ rad}$

$$\text{et } a_2 \sim \frac{5 \cdot 10^{-7} \cdot 4 \cdot 10^8}{2 \cdot 7 \cdot 10^6} \sim 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m} \sim \boxed{15 \mu\text{m}}$$

Cette taille est évidemment très faible devant R_T et la diffraction ne peut pas éclairer la lune lors de la phase de totalité.

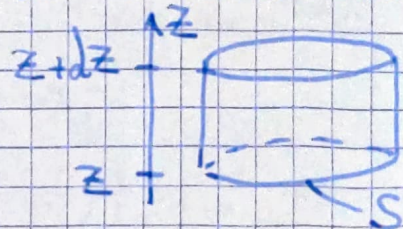
D'autres sources possibles d'éclairage pourraient être :

- * Autres étoiles
- * Lumière artificielle émise sur la face nocturne de la Terre
- * Lumière du Soleil réfléchi par les autres planètes

En pratique toutes ces sources sont extrêmement faibles et incapables d'expliquer les observations.

30. On note $p(z)$ la pression à la cote z et on étudie une colonne d'air de section S . Dans le

référentiel terrestre supposé galiléen, la tranche d'atmosphère comprise entre z et $z+dz$ est soumise à la force de pression exercée sur ses faces supérieure et inférieure :



Et à son poids $\vec{P} = m \vec{g} = - S dz \times \rho_a(z) g \vec{e}_z$

La tranche étant à l'équilibre, ces forces se compensent :

$$- \rho_a(z) \times S dz g - S \frac{dp}{dz} \cdot dz = 0$$

Or, par la loi des gaz parfaits $p = \frac{nRT}{V} = \frac{\rho_a \cdot RT}{M_a}$ et

donc :

$$\frac{d\rho_a}{dz} \times \frac{RT}{M_a g} + \rho_a = 0$$

Potons $H_c = \frac{RT}{M_a g}$, donc $H_c \approx \frac{8 \cdot 300}{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10} \approx 8 \text{ km}$

et on a une décroissance exponentielle de la densité avec la hauteur caractéristique H_c :

$$\rho_a(z) = \rho_a(0) e^{-z/H_c}$$

31. On a $\rho_a(0) = \frac{M_a p}{RT} \sim \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^5}{8 \cdot 300} \sim 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Au sommet de l'Everest:

$$\rho_{\text{Er}} = \rho_a(0) e^{-z_{\text{Er}}/H_c} \approx \frac{\rho_a(0)}{e} \approx \boxed{0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$$

En réalité $\rho_{\text{Er}} = \frac{M_a \cdot \rho_{\text{Er}}}{R T_{\text{Er}}} = \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 3,2 \cdot 10^4}{8 \times 250} \approx \boxed{0,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}$

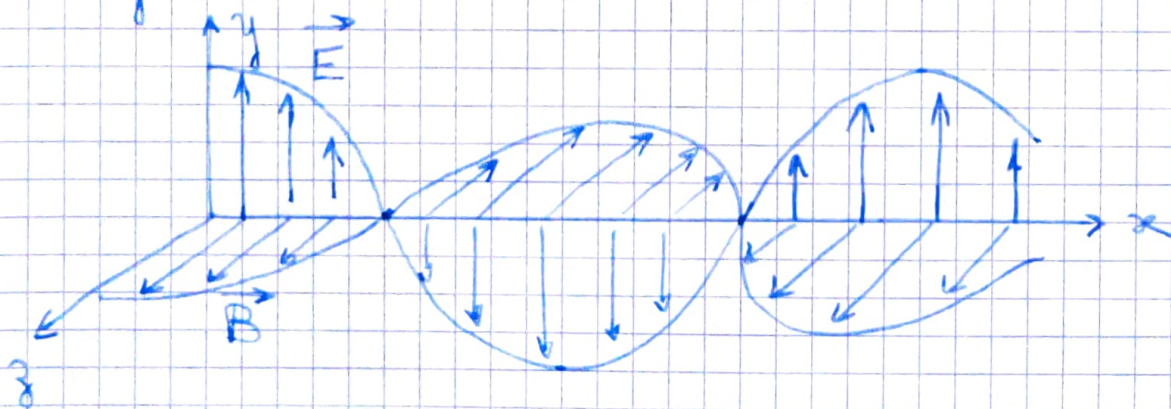
On constate un écart de l'ordre de 20% donc le modèle semble relativement réaliste d'autant plus qu'une partie de cet écart peut venir des erreurs d'arrondi.

32. On a $\boxed{\vec{E} = E_m \cos\left(\omega t - \frac{x}{c}\right) \vec{e}_y}$

Par la relation de structure pour les ondes planes progressives dans le vide: $\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} = B_m \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_z}$

avec $\boxed{B_m = \frac{E_m}{c}}$

Le champ électrique et le champ magnétique sont en phase et orthogonaux:



33. On a $\boxed{\vec{R}(x,t) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_m^2}{c} \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \vec{e}_x}$

Alors: $\langle \vec{R}(x,t) \rangle = \frac{E_m^2}{2c\mu_0} \vec{e}_x = I_0 \vec{e}_x$

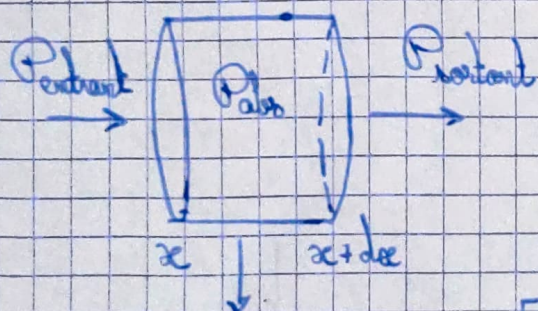
On en déduit $E_m = \sqrt{2c\mu_0 I_0} \approx \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 12 \cdot 10^{-7} \cdot 10^3}$

d'où $E_m \approx 9 \cdot 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

34. Le nombre de molécules par unité de volume est relié au nombre de moles par la relation $\eta_a(x) = N_A \times \frac{n}{V}$.

Or $\rho_a(x) = \frac{m}{V} = \frac{nM}{V}$ d'où $\eta_a(x) = \frac{N_A}{M} \times \rho_a(x)$

35. On considère une tranche entre x et $x+dx$, la puissance entrant dans la tranche est $P_{\text{entrant}} = I(x) \times S$ où S est la section de la tranche.



De même la puissance sortante est $P_{\text{sortant}} = I(x+dx) \times S$

Enfin on a une puissance diffusée et absorbée:

$$P_{\text{diff}} = S dx \eta_a(x) \times P_a = S \eta_a(x) \cdot k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 I(x) dx$$

$$P_{\text{abs}} = S dx \eta_p(x) \times P_p = S \eta_p(x) \cdot k_p I(x) dx$$

Par conservation de l'énergie $P_{\text{entrant}} = P_{\text{sortant}} + P_{\text{diff}} + P_{\text{abs}}$

D'où: $\frac{dI}{dx} + \left(k_p \eta_p(x) + k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \eta_a(x) \right) I(x) = 0$

On encore: $\frac{d \ln I}{dx} = - \left(k_p \eta_p(x) + k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \eta_a(x) \right)$

En intégrant de 0 à x on trouve

$$-\ln \left(\frac{I}{I(0)} \right) = d_0(x) = \int_0^x \left(k_p \eta_p(\xi) + k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \eta_a(\xi) \right) d\xi$$

D'où $I(x) = I(0) e^{-d_0(x)}$ avec:

$$d_0(x) = k_a \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \int_0^x \eta_a(\xi) d\xi + k_p \int_0^x \eta_p(\xi) d\xi$$

37. L'indice optique n dépend de la densité et donc de l'altitude, on peut voir l'atmosphère comme l'équivalent d'un dioptre avec une variation continue d'indice optique entre l'espace ($n=1$) et la surface ($n>1$): les rayons sont réfractés vers le milieu le plus réfringent donc vers la Terre.

38. On a $r^2 = (R_T + z)^2 = (r_0 + u)^2$ avec $u \ll r_0$

Ainsi: $\sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \approx \sqrt{\left(1 + \frac{u}{r_0}\right)^2 - 1} \approx \sqrt{\frac{2u}{r_0}}$

De plus: $dn = \epsilon_\lambda \frac{dp_a}{p_a(0)}$ avec $p_a = p_a(0) e^{-\frac{z}{H_c}}$

D'où $dp_a = -\frac{dz}{H_c} p_a(0) e^{-\frac{z}{H_c}} = -\frac{du}{H_c} \times \underbrace{p_a(z_0) e^{-\frac{u}{H_c}}}_{= p_a(0) e^{-\frac{z}{H_c}}}$

Ainsi $dn = -\epsilon_\lambda \frac{du}{H_c} e^{-\frac{u+z_0}{H_c}}$

39. Alors on réinjecte dans l'expression donnée, on a:

$$\Theta(z_0, \lambda) = 2 \int_{-\infty}^0 \frac{-\epsilon_\lambda \frac{du}{H_c} e^{-\frac{u+z_0}{H_c}}}{\sqrt{\frac{2u}{r_0}}}$$

où les bornes sont prises telles que $\begin{cases} n(\infty) = 1 \\ n(0) = n_0 \end{cases}$

$$= \epsilon_\lambda \cdot \sqrt{\frac{2r_0}{H_c}} \int_0^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{v}} e^{-\left(v + \frac{z_0}{r_0}\right) \frac{r_0}{H_c}} = \epsilon_\lambda \sqrt{\frac{2r_0}{H_c}} e^{-\frac{z_0}{H_c}}$$

Or $r_0 = R_T + z_0$ donc $\Theta(z_0, \lambda) = \epsilon_\lambda \Theta(z_0)$

où $\Theta(z_0) = \sqrt{\frac{2R_T}{H_c} (R_T + z_0)} e^{-\frac{z_0}{H_c}} \approx \sqrt{\frac{2R_T}{H_c}} e^{-\frac{z_0}{H_c}}$ car $z_0 \ll R_T$

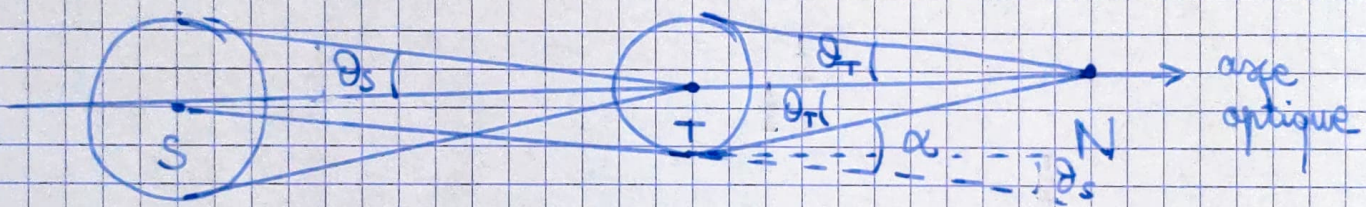
La déviation est donc maximale pour $z_0 = 0$, c'est-à-dire lorsque le rayon passe très proche de la surface.

40. On a $\delta\theta_2 = \delta(E_2) \times \Theta(z_0)$.

On $\delta E_2 = \delta\lambda \times \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2} \right) = - \frac{2\lambda_0^2 \delta\lambda}{\lambda^3}$

D'où: $\boxed{\delta\theta_2 = - \frac{2\lambda_0^2}{\lambda^3} \Theta(z_0) \delta\lambda}$

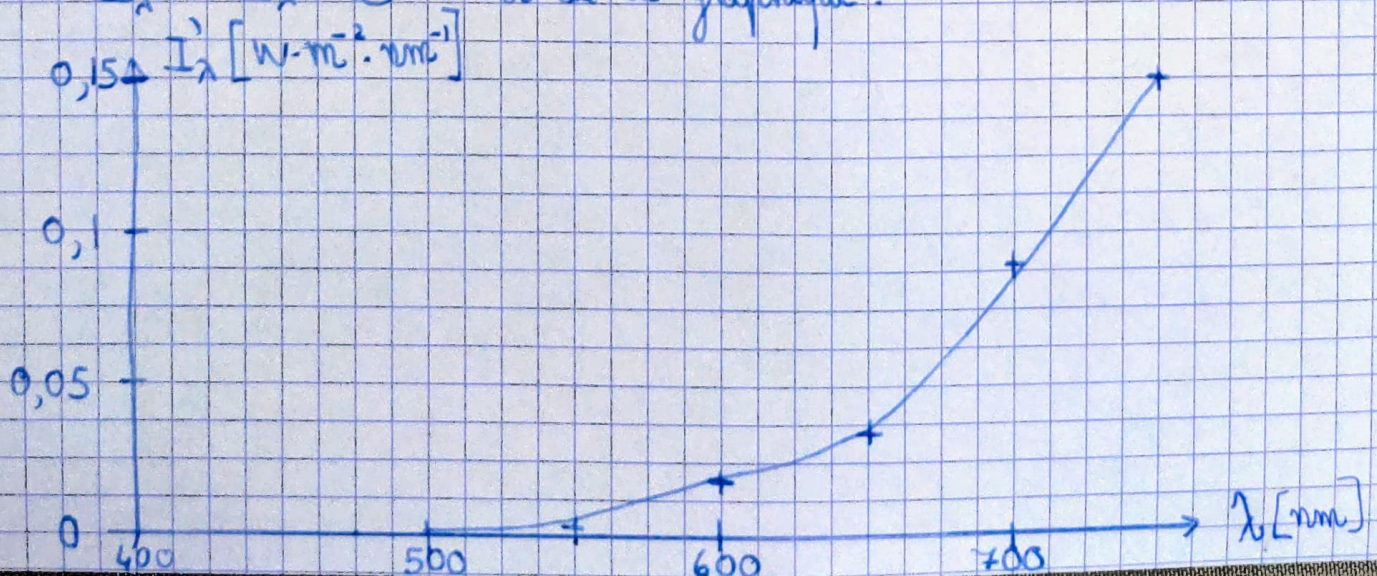
41.



Pour éclairer le point N, un rayon doit être dévié de l'angle $\alpha = \theta_T + \theta_S = 73'$

On a $\alpha > \theta_{\lambda N}$ mais notre modèle est grossier; en ordre de grandeur la réfraction par l'atmosphère permet d'expliquer le fait que la lune soit éclairée au cours de l'éclipse.

42. L'intensité après traversée de l'atmosphère et déviation vaut $I_\lambda' = I_\lambda \times e^{-\tau_0}$ d'où le graphique:



On constate que la longueur d'onde principale est élevée ($> 700 \text{ nm}$)
ce qui correspond à du rouge sombre (teinte cuivrée) : c'est
effectivement la couleur de la Lune lors des éclipses.