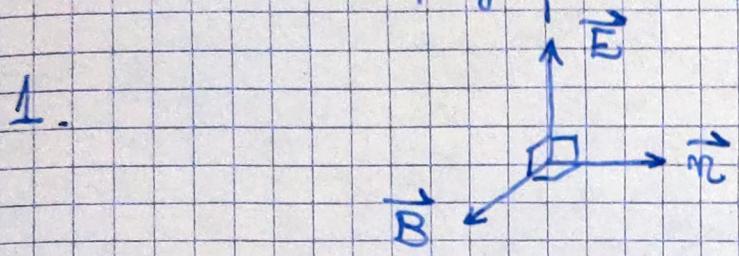


DS9 - Type ENS
Correction

I - Préambule: physique du rayonnement



le trièdre $(\vec{n}, \vec{E}, \vec{B})$ est direct en raison de la relation de structure.

2. On a :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\Pi}) &= \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) \\ &= \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot \text{rot}(\vec{E}) - \vec{E} \cdot \text{rot}(\vec{B})] \quad \text{d'après la formule} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[-\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \quad \text{d'après les équations} \\ &\quad \text{de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère dans le vide} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) \end{aligned}$$

D'où : $\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0$ où $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$

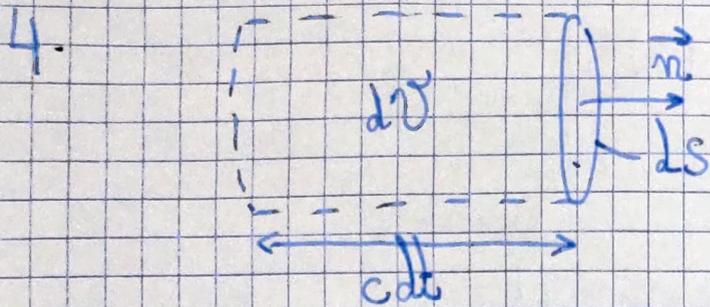
3. On a $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{n} \wedge \vec{E}}{c} \right)$ par la relation de structure

$$= \frac{1}{\mu_0 c} \left[E^2 \vec{n} - (\vec{E} \cdot \vec{n}) \vec{E} \right]$$

Or, $\frac{1}{\mu_0 c} = \epsilon_0 \cdot c$ et $\vec{E} \cdot \vec{n} = 0$ car l'onde est transverse

ce qui découle de la propriété $\text{div}(\vec{E}) = 0$: pour une onde plane progressive monochromatique $\text{div} \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{k} = k \vec{n}$ d'où $\vec{n} \cdot \vec{E} = 0$

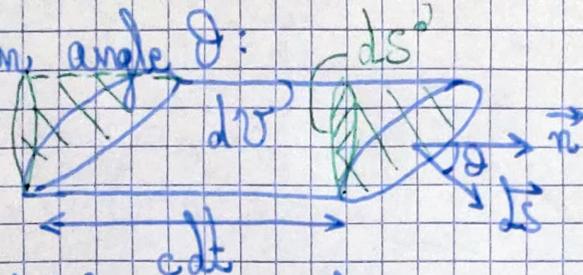
On conclut que $\vec{\Pi} = \epsilon_0 E^2 \cdot c \cdot \vec{n}$ = $c \cdot u \cdot \vec{n}$



L'énergie se propage à la vitesse c , donc l'énergie traversant dS pendant dt est celle contenue dans le volume dV

Ainsi: $dE = u dV = u \cdot c \cdot dS dt$.

Si on a un angle θ :



En "déplaçant" la zone hachurée en vert de la droite à la gauche du cylindre on a $dV' = c dt \times dS' = c dt \cdot dS \cos \theta$

D'où: $dE = u \cdot c \cdot dS dt \cdot \cos \theta$.

5. Chaque photon portant une énergie $\frac{hc}{\lambda}$ on a:

$$\underbrace{u_\lambda d\lambda}_{\text{énergie entre } \lambda \text{ et } \lambda+d\lambda} = \underbrace{n_\lambda d\lambda}_{\text{photons entre } \lambda \text{ et } \lambda+d\lambda} \times \underbrace{\frac{hc}{\lambda}}_{\text{énergie d'un photon}} \quad \text{donc } u_\lambda = hc \cdot \frac{n_\lambda}{\lambda}$$

Et $u = \int_0^\infty u_\lambda d\lambda$ ou encore

$$u = hc \int_0^\infty \frac{n_\lambda}{\lambda} d\lambda$$

6. Cette énergie peut alors s'écrire:

$$dE_\lambda = \underbrace{u_\lambda d\lambda}_{\text{énergie volumique entre } \lambda \text{ et } \lambda+d\lambda} \times c dS dt \cos \theta = \frac{hc^2}{\lambda} n_\lambda dS dt d\lambda \cos \theta$$

7. On a: $\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\Omega = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi [-\cos \theta]_0^{\pi}$

D'où: $\int d\Omega = \Omega_0 = 4\pi$ est l'angle solide associé à toutes

les directions de l'espace.

8. On réutilise le résultat de Q6 avec $n_\lambda d\lambda$ le nombre de photons impliqués, que l'on doit remplacer ici par $N_\lambda(\theta, \phi) d\lambda d\Omega$

On a donc:

$$dE_\lambda = \frac{hc^2}{\lambda} N_\lambda(\theta, \phi) dS dt d\Omega d\lambda \cos\theta$$

Par identification avec la formule de l'énoncé:

$$I_\lambda(\theta, \phi) = \frac{hc^2}{\lambda} N_\lambda(\theta, \phi)$$

9. On a $F_\lambda = \iint_{\Omega_0} I_\lambda(\theta, \phi) \cos(\theta) d\Omega$ avec $\begin{cases} d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \\ \theta \in [0, \pi] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{cases}$

D'où:

$$F_\lambda = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} I_\lambda(\theta, \phi) \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

10. L'intensité restante est obtenue en intégrant exclusivement au-dessus de la surface donc pour $\theta < \frac{\pi}{2}$. Nous avons alors:

$$F^+ = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} B_\lambda(T) \cdot \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

$$= 2\pi B_\lambda(T) \cdot \int_{\sin\theta=0}^1 \sin\theta d(\sin\theta) = 2\pi B_\lambda(T) \int_0^1 \xi d\xi$$

$$\text{d'où } F^+ = \pi B_\lambda(T)$$

le flux total est: $F = \int_{\lambda=0}^{\infty} F^+(\lambda) d\lambda$

$$F = 2\pi hc^2 \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1\right)} \times \frac{1}{\lambda^3} \times \frac{d\lambda}{\lambda^2} \quad \text{or } \frac{d\lambda}{\lambda^2} = -d\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

on pose $x = \frac{hc}{\lambda k_B T}$ $dx = -\frac{hc d\lambda}{\lambda^2 k_B T}$

Alors $\frac{-d\lambda}{\lambda^2} = \frac{k_B T}{hc} dx$ et $\frac{1}{\lambda^3} = \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^3 x^3$

D'où: $F = 2\pi hc^2 \times \left(\frac{k_B T}{hc}\right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$

$= \frac{2\pi^{5/2} k_B^4 T^4}{15 h^3 c^2} = \sigma T^4$ où $\sigma = \frac{2\pi^{5/2} k_B^4}{15 h^3 c^2}$

11. La luminosité émise est la puissance totale, qui s'obtient en multipliant la puissance surfacique F par la surface du corps $S = 4\pi R^2$:

$$\mathcal{L} = F \times 4\pi R^2 = 4\pi \sigma R^2 T^4$$

On a par ailleurs $\mathcal{L}_\lambda = F_\lambda(A) \times 4\pi R^2$ d'où:

$$\mathcal{L}_\lambda = 4\pi R^2 B_\lambda(T)$$

12. La puissance totale émise est \mathcal{L} . Comme le problème est à symétrie sphérique elle se répartit également sur toute la surface. Pour le capteur étudié elle vaut donc $\mathcal{W} = \mathcal{L} \times \frac{S}{4\pi D^2} = S \sigma \left(\frac{R}{D}\right)^2 T^4$.

On a $\mathcal{W}_\lambda = \frac{\mathcal{L}_\lambda S}{4\pi D^2} = \frac{\pi R^2}{D^2} B_\lambda(T)$.

[Rq: on peut retrouver ces résultats en intégrant les angles θ, ϕ, ψ et φ sur la figure de l'émission. C'est beaucoup plus long et calculatoire que d'utiliser la symétrie sphérique...]

II - Détection par la méthode des vitesses radiales

1 - Réduction du problème de Kepler à deux corps

13. On peut appliquer dans \mathcal{R} le principe fondamental de la dynamique à chacun des deux corps soumis à la seule force gravitationnelle :

$$m \frac{d^2 \vec{R}_P}{dt^2} = - \frac{G m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (*) \quad M \frac{d^2 \vec{R}_E}{dt^2} = + \frac{G m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (**)$$

$$\text{d'où } \vec{e}_r = \frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|} = \frac{\vec{EP}}{\|\vec{EP}\|}$$

14. Le centre de masse C est tel que $\vec{CP} \times m + \vec{CE} \times M = \vec{0}$.

$$\text{Or } \vec{CP} = \vec{R}_P - \vec{OC} = \vec{R}_P - \vec{R}_C \quad \text{et} \quad \vec{CE} = \vec{R}_E - \vec{R}_C$$

$$\text{D'où : } (m+M) \vec{R}_C = m \vec{R}_P + M \vec{R}_E$$

$$\text{Ou encore } \vec{R}_C = \frac{m}{m+M} \vec{R}_P + \frac{M}{m+M} \vec{R}_E$$

15. On applique le principe d'inertie au système {planète + étoile} qui n'est soumis à aucune force, son centre de masse est donc en translation rectiligne uniforme dans \mathcal{R}

(On peut aussi remarquer que $(*) + (**)$ donne $\frac{d^2 \vec{R}_C}{dt^2} = \vec{0}$)

$$16. \text{ On a } \begin{cases} (m+M) \vec{R}_C = m \vec{R}_P + M \vec{R}_E \\ \vec{r} = \vec{R}_P - \vec{R}_E \end{cases}$$

$$\text{Donc } (m+M) \vec{R}_C + M \vec{r} = (m+M) \vec{R}_P \Rightarrow \vec{R}_P = \vec{R}_C + \frac{M}{m+M} \vec{r}$$

$$\text{De même } \vec{R}_E = \vec{R}_C - \frac{m}{M+m} \vec{r}$$

Alors, si on prend le centre de masse comme origine :

$$\vec{r}_E = - \frac{m}{M+m} \vec{r}$$

$$\text{et } \vec{r}_P = \frac{M}{m+M} \vec{r}$$

17. $(*) \times M - (**) \times m$ donne :

$$m \cdot M \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{G m M}{r^2} [M+m] \vec{e}_r \quad \text{En posant } \vec{F} = - \frac{G m M}{r^2} \vec{e}_r$$

on obtient alors : $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ avec $\mu = \frac{mM}{m+M}$

(tout se passe comme si on étudiait le mouvement d'une particule fictive de masse μ)

Une fois le problème résolu, on aura : $\begin{cases} \vec{R}_E = \vec{R}_C - \frac{m}{M} \vec{r} \\ \vec{R}_P = \vec{R}_C + \frac{M}{m} \vec{r} \end{cases}$

On a réduit la dimension du problème à résoudre en passant de deux inconnues vectorielles \vec{R}_E et \vec{R}_P à une unique inconnue \vec{r} .

2 - Résolution du mouvement relatif

18. Le travail élémentaire de \vec{F} sur un chemin $d\vec{r}$ est :

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \frac{GmM}{r^2} \vec{e}_r \cdot d\vec{r} = - \frac{GmM}{r^2} dr$$

$$\delta W(\vec{F}) = -dE_p \quad \text{où} \quad E_p = - \frac{GmM}{r} + c^te$$

La constante est prise nulle car il n'y a pas d'interaction pour $r \rightarrow \infty$.

Alors, en remarquant que $mM = \mu M_T$, on a $E_p = - \frac{\mu M_T}{r}$

19. La force \vec{F} étant centrale, son moment par rapport à C (origine du référentiel et centre de force) est nul.

On applique le théorème du moment cinétique à la particule dans R galiléen et on a : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_C(\vec{F}) = \vec{0}$

Donc \vec{L} est un vecteur constant, or $\vec{r} \perp \vec{L}$.

Donc le mouvement est plan et se fait dans le plan normal à \vec{L} (vecteur constant) et contenant C.

20. Dans ce cas, on a $\vec{r}_C = r \vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ (car \vec{v} reste dans le plan normal à \vec{L}). On en déduit que

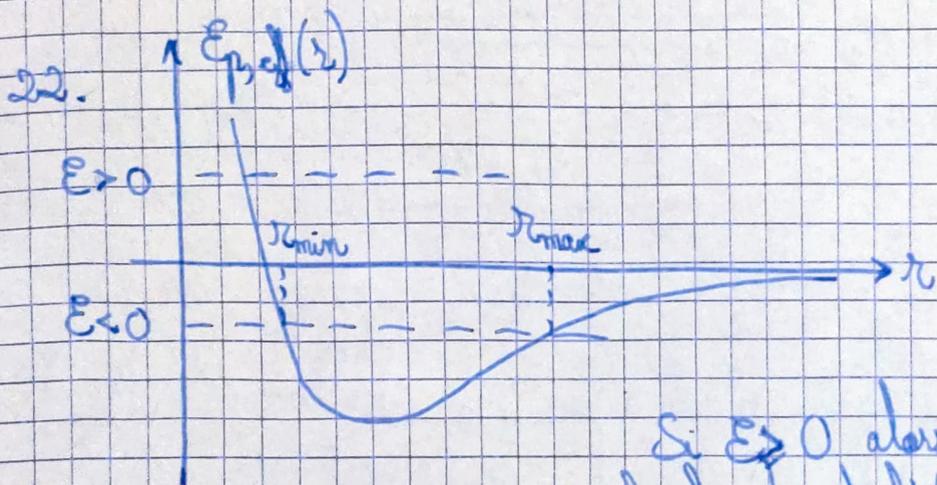
$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu \vec{v} = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

21. On a :

$$E_m = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2 + E_p(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 + E_p(r)$$

$$\text{Or : } r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{(r^2 \dot{\theta})^2}{r^2} = \frac{L^2}{\mu^2 r^2}$$

$$\text{Ainsi, } E_m = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{p, \text{eff}}(r) \quad \text{ou} \quad E_{p, \text{eff}}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_p(r)$$



Si $E < 0$ on a un état lié et la trajectoire est bornée, car on a nécessairement $E \geq E_{p, \text{eff}}(r)$

Si $E \geq 0$ alors on a un état de diffusion : la planète et l'étoile vont finir par s'éloigner l'une de l'autre.

~~23. Le périastre et l'apoastre sont solutions de l'équation $E_{p, \text{eff}}(r) = E$ soit :~~

~~$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M_t}{r}$$~~

~~$$\text{Ou encore : } 2\mu E r^2 + 2G\mu^2 M_t r - L^2 = 0$$~~

~~$$\text{Le discriminant réduit est } \Delta^2 = G^2 \mu^4 M_t^2 + 2\mu E L^2$$~~

~~$$\text{D'où : } r = \frac{-G\mu^2 M_t \pm \sqrt{G^2 \mu^4 M_t^2 + 2\mu E L^2}}{2\mu E} \quad \leftarrow \text{(juste mais inutile)}$$~~

23. Le périastre et l'apoastre sont solutions de l'équation :

$$E_{p, \text{eff}}(r) = E \quad \text{soit :} \quad E = \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M_t}{r}$$

$$\text{Ainsi : } L^2 \times \frac{1}{r^2} - 2G\mu M_t \times \frac{1}{r} - 2\mu E = 0$$

C'est un trinôme en $\frac{1}{r}$ de discriminant réduit :

$$\Delta' = \rho^2 \mu^4 M_t^2 + 2\mu \mathcal{E} L^2$$

Alors :
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{L^2} \left(\rho \mu^2 M_t \pm \sqrt{\rho^2 \mu^4 M_t^2 + 2\mu \mathcal{E} L^2} \right)$$

Les deux solutions sont positives car $\mathcal{E} < 0$. Ainsi :

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho \mu^2 M_t}{L^2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E} L^2}{\rho^2 \mu^3 M_t^2}} \right) = \frac{1}{r} (1 \pm e)$$

avec
$$\rho = \frac{L^2}{\rho \mu^2 M_t} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E} L^2}{\rho^2 \mu^3 M_t^2}} \quad (e < 1)$$

On a alors bien $r_{\min} = \frac{\rho}{1+e}$ et $r_{\max} = \frac{\rho}{1-e}$.

e est compris entre 0 (car on a une racine double, $\Delta' = 0$) et 1 (cas limite avant diffusion) : $e \in [0, 1[$

24. On peut remarquer que
$$\frac{du}{d\theta} = \frac{dt}{d\theta} \frac{du}{dt} = \frac{1}{\dot{\theta}} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\dot{r}}{r^2 \dot{\theta}}$$

$$\frac{du}{d\theta} = - \frac{\mu \dot{r}}{L}$$

D'où :
$$\dot{r} = - \frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta}$$

Alors :
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\mu} \cdot \left(\frac{L}{\mu} \frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{L^2}{2\mu} \cdot u^2 - \rho \mu M_t \times u$$

$$= A_0 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + A_1 u^2 + A_2 u$$

où
$$A_0 = A_1 = \frac{L^2}{2\mu} \quad \text{et} \quad A_2 = -\rho \mu M_t$$

On dérive par rapport à θ :

$$0 = \frac{L^2}{\mu} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2 u}{d\theta^2} + \frac{L^2}{\mu} u \frac{du}{d\theta} - \rho \mu M_t \frac{du}{d\theta}$$

Après simplification par $\frac{du}{d\theta}$ il vient :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{G\mu^2 M_t}{L^2} = \frac{1}{p} \quad (\text{d'après Q23})$$

On en déduit $\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = 0$ où $v = u - \frac{1}{p}$

Ainsi il existe deux constantes α et ψ telles que $u = \frac{1}{p} + \alpha \cos(\theta + \psi)$

Or en $\theta = 0$ on est au périastre donc r est minimal et vaut

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} \quad \text{d'où} \quad u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \quad \text{ainsi} \quad \alpha \cos(\psi) = \frac{e}{p}$$

De plus u est maximal en $\theta = 0$ donc $\psi = 0$ ainsi $u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta$

et donc :

$$r = \frac{p}{1+e \cos \theta}$$

25. Dans ce cas, on a $e = 0$, et $r_0 = p = r_0$. En réutilisant

Q23 : $r_0 = \frac{L^2}{G\mu^2 M_t}$ le rayon r_0 étant constant,

$E_{p, \text{eff}}(r)$ est constant et $\dot{r} = 0$ car $E = E_{p, \text{eff}}(r)$ (on se

trouve au minimum de la courbe de la Q22). De plus comme

$L = \mu r_0^2 \dot{\theta} = c^{ste}$, alors $\dot{\theta}$ est constant et donc le mouvement est circulaire uniforme : X a une vitesse constante en norme.

On a $v_0 = r_0 \dot{\theta} = \frac{L}{\mu r_0} = \frac{G\mu M_t}{L}$

Comme $\dot{\theta} = c^{ste} = \omega_0$ on a $\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t$ avec $\omega_0 = \frac{v_0}{r_0}$

d'où $\omega_0 = \frac{G\mu^3 M_t}{L^3}$

26. On a donc $\begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\theta_0 + \omega_0 t) \\ y(t) = r_0 \sin(\theta_0 + \omega_0 t) \end{cases}$ ou $y(t=0) = 0$

On en déduit $\vartheta_0 \in]0, \pi[$, or $\vartheta_0 = \pi$ donnerait $x(0) < 0$ donc

$\vartheta_0 = 0$ et :

$$\begin{cases} x(t) = r_0 \cos(\omega_0 t) \\ y(t) = r_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases}$$

De plus $\omega_0^2 r_0^3 = (r_0^2 \omega_0)^2 \times \frac{1}{r_0} = \frac{L^2}{\mu^2} \cdot \frac{1}{r_0} = \frac{GM}{r_0}$ d'après Q25

On retrouve ainsi la 3^e loi de Kepler $\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ ou

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ et la période de rotation.

3 - Cinématique de l'étoile en présence d'une planète

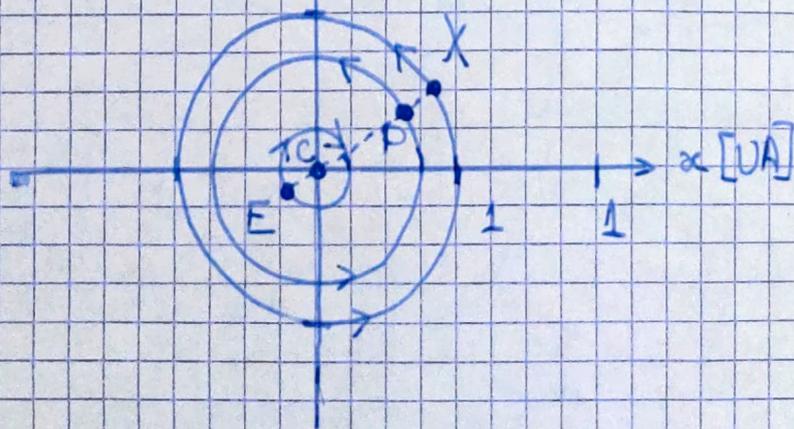
27. On réutilise les résultats de Q26 et Q16 :

$$x_p(t) = \frac{M}{m+M} \cdot r_0 \cdot \cos(\omega_0 t) = \frac{r_0}{1+B} \cos(\omega_0 t)$$

$$y_p(t) = \frac{r_0}{1+B} \sin(\omega_0 t)$$

Et $x_E(t) = -\frac{B r_0}{1+B} \cos(\omega_0 t)$; $y_E(t) = -\frac{B r_0}{1+B} \sin(\omega_0 t)$

28.



On a $\frac{1}{1+B} = \frac{1}{4/3} = \frac{3}{4}$ et $\frac{B}{1+B} = \frac{1}{4}$

La planète et l'étoile tournent dans des sens opposés.

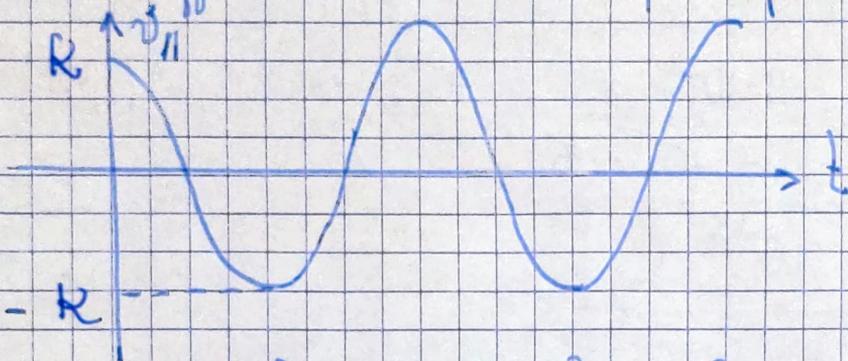
29. On a $\vec{v}_E = \dot{x}_E \vec{e}_x + \dot{y}_E \vec{e}_y$
 $= \frac{3r_0\omega_0}{1+B} [\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x - \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$

On a $\vec{E}_x \cdot \vec{r} = 0$ et $\vec{E}_y \cdot \vec{r} = -\sin(i)$

On en conclut que:

$$v_{||} = \vec{v}_E \cdot \vec{r} = \frac{B r_0 \omega_0}{1+\beta} \sin(i) \cos(\omega_0 t)$$

30. On a alors une fonction sinusoidale du temps (en supposant que l'étoile est suffisamment lointaine pour que i soit constant):



où $R = \frac{B r_0 \omega_0}{1+\beta} \sin i$

On a alors $\frac{K^3}{E^2} = \left(\frac{\beta \sin i}{1+\beta} \right)^3 \times \frac{r_0^3 \omega_0^3}{E^2} = \left(\frac{m \sin i}{m+M} \right)^3 \times \frac{G M_t}{4\pi^2} \times \frac{8\pi^2}{c^3}$

où on a utilisé le résultat de Q26 (3^e loi de Kepler).

Alors: $K^3 E = 2\pi G f$ où $f = \frac{(m \sin i)^3}{(M+m)^2}$

La mesure de R et E permet donc de déterminer f , puis d'en déduire m connaissant i et M .

31. Dans le cas $m \ll M$ on a $f \approx \frac{m^3}{M^2} \sin^3 i$

D'où: $m_0 = \left(\frac{K^3 E M^2}{2\pi G \sin^3 i} \right)^{1/3}$, or on sait que $\sin^3 i \leq 1$

donc $m \geq m_0$ avec $m_0 = \sqrt[3]{\frac{E K^3 M^2}{2\pi G}}$

La détection est plus facile si R est maximale donc si f est maximal c'est-à-dire $\sin i = 1$ ou $i = \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à une visée dans le plan du mouvement. Plus l'étoile a une masse

M faible et plus l'amplitude du mouvement sera grande, donc facile à détecter.

32. On a $K \approx \frac{1}{2} (v_{\max}^2 - v_{\min}^2) = \frac{1}{2} (1,8 + 1,8) = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$E = 2 \times (t_{\max} - t_{\min}) = 2 \times (6 - 1) = 10 \text{ jours}$

instantané du max et du min de la courbe d'ajustement

Or $T_j = 86400 \times$ donc $E \approx 9 \cdot 10^5 \text{ s}$.

Ainsi: $m_{\text{J}} = \left(\frac{9 \cdot 10^5 \times 8 \times 5 \cdot 10^{58}}{7 \cdot 10^{11} \times 6} \right)^{1/3} \approx (10^{45})^{1/3} \approx 10^{15} \text{ kg}$

$m_{\text{J}} \approx 10^{25} \text{ kg}$

4 - Principe de la spectroscopie Doppler

33. On a $\frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 + v_{\parallel}/c}{1 - v_{\parallel}/c}} = \sqrt{1 + \frac{2v_{\parallel}}{c}} \approx 1 + \frac{v_{\parallel}}{c}$
 à l'ordre 1 en v_{\parallel}/c . Or: $\frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 + \frac{\delta\lambda}{\lambda}$ d'où:

$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_{\parallel}}{c}$

34. Cet effet est utilisé sur les ondes sonores par exemple dans le cas des radars de contrôle de vitesse des automobiles.

35. Il faut que $\delta\lambda > \Delta\lambda \leftarrow$ écart minimal mesurable

Donc que $v_{\parallel} > \frac{c}{\lambda} \Delta\lambda$ ou encore $K \geq \frac{c}{R}$

Or on sait que $K^3 E = \frac{2\pi c m_{\text{J}}^3}{M_{\text{J}}^2}$

Il faut donc $R \geq \frac{c}{m_{\text{J}}} \left(\frac{E M_{\text{J}}^2}{2\pi c} \right)^{1/3}$

5 - Étude d'un réseau en réflexion

36. Le champ incident s'écrit:

$$E_i(\vec{r}_p, t) = E_i e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_p}$$

$$\text{Or } \vec{k}_i \cdot \vec{r}_p = \vec{k}_i \cdot (pa \vec{e}_y) = pak \sin(\theta_i) = p\varphi_i$$

$$\text{où } \boxed{\varphi_i = ka \sin \theta_i} \quad \text{Alors: } E_i(\vec{r}_p, t) = E_i e^{ip\varphi_i} e^{-i\omega t}$$

$$37. \text{ On a } \vec{k}_r \cdot \vec{r}_p = k \vec{n}_r \cdot (pa \vec{e}_y) = -pak \sin(\theta_r) = -p\varphi_r$$

$$\text{où } \boxed{\varphi_r = ka \sin \theta_r} \quad \text{Alors on peut écrire:}$$

$$E_r^{(p)}(\vec{r}, t) = p E_0 e^{ip\varphi_i} e^{-i\omega t} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} e^{+ip\varphi_r}$$

$$= p E_0 e^{ip(\varphi_i + \varphi_r)} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\text{On a alors } \varphi = \varphi_i + \varphi_r = ka(\sin \theta_i + \sin \theta_r)$$

38. On constate que par principe de superposition:

$$E_{\text{so}}(\vec{r}, t) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} E_r^{(p)}(\vec{r}, t) = \sum_{p=0}^{N-1} p E_0 e^{ip\varphi} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$= p E_0 \times \left(\sum_{p=0}^{N-1} e^{ip\varphi} \right) \cdot e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\text{Or } \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{ip\varphi} = \sum_{p=0}^{N-1} (e^{i\varphi})^p = \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{iN\varphi}{2}}}{e^{\frac{i\varphi}{2}}} \cdot \frac{-2i \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = e^{\frac{i(N-1)\varphi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\text{D'où: } E_{\text{so}}(\vec{r}, t) = E_{\text{so}} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\text{où } \boxed{E_{\text{so}} = p E_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} e^{\frac{i(N-1)\varphi}{2}}}$$

39. L'interférence est constructive lorsque $E_{r_1}^{(p)}$ et $E_{r_2}^{(p+1)}$ sont en phase, c'est-à-dire qu'il existe un entier relatif q tel que:

$$\phi_{(p+1)} - \phi_{(p)} = 2\pi q$$

où $\phi_{(p)}$ et $\phi_{(p+1)}$ sont les phases totales de chaque onde:

$$\begin{cases} \phi_{(p)} = \vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega t + p\varphi \\ \phi_{(p+1)} = \vec{k}_s \cdot \vec{r} - \omega t + (p+1)\varphi \end{cases}$$

D'où: $\varphi = 2\pi q = ka(\sin\theta_i + \sin\theta_r)$ d'après Q37

On conclut en utilisant $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ que:

$$\boxed{a(\sin\theta_i + \sin\theta_r) = q\lambda} \quad (\text{formule des réseaux})$$

(Rq: on peut aussi faire avec la différence de marche comme dans le cours)

40. On reprend le résultat de Q38 pour calculer la moyenne de E^2 :

$$\langle |E_{r_1}|^2 \rangle = \left\langle |p_1|^2 |E_0|^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right\rangle = |p_1|^2 |E_0|^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\text{Or: } \frac{\varphi}{2} = \frac{ka}{2} (\sin\theta_i + \sin\theta_r) = \frac{\pi a}{\lambda} (\sin\theta_i + \sin\theta_r) = \pi R a$$

avec $R = \frac{1}{\lambda} (\sin\theta_i + \sin\theta_r)$. On conclut alors que l'intensité, proportionnelle à $\langle |E_{r_1}|^2 \rangle$, est de la forme:

$$I(\theta_r) = I_0 \cdot \frac{\sin^2(N\pi R a)}{\sin^2(\pi R a)} = I_0 N^2 R(\pi R)$$

$$\text{où } R(\pi R) = \left[\frac{\sin(N\pi R a)}{N \sin(\pi R a)} \right]^2$$

41. Pour des valeurs quelconques de πR , les sinus sont d'ordre 1 donc $R(\pi R) \sim \frac{1}{N^2} \ll 1$. Mais on a des pics au niveau des

annulations simultanées du numérateur et du dénominateur, qui vérifient $\sin(\pi R a) = 0$ donc $R a \in \mathbb{Z}$. L'écart entre deux pics consécutifs est donc $\Delta R = \frac{1}{a}$

De plus, plaçons-nous en $R = 0$, on a bien :

$$R(x) \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \frac{(N \pi R a)^2}{N^2 (\pi R a)^2} \sim 1 \text{ et la fonction est prolongeable en } 0 \text{ avec la valeur } R(0) = 1$$

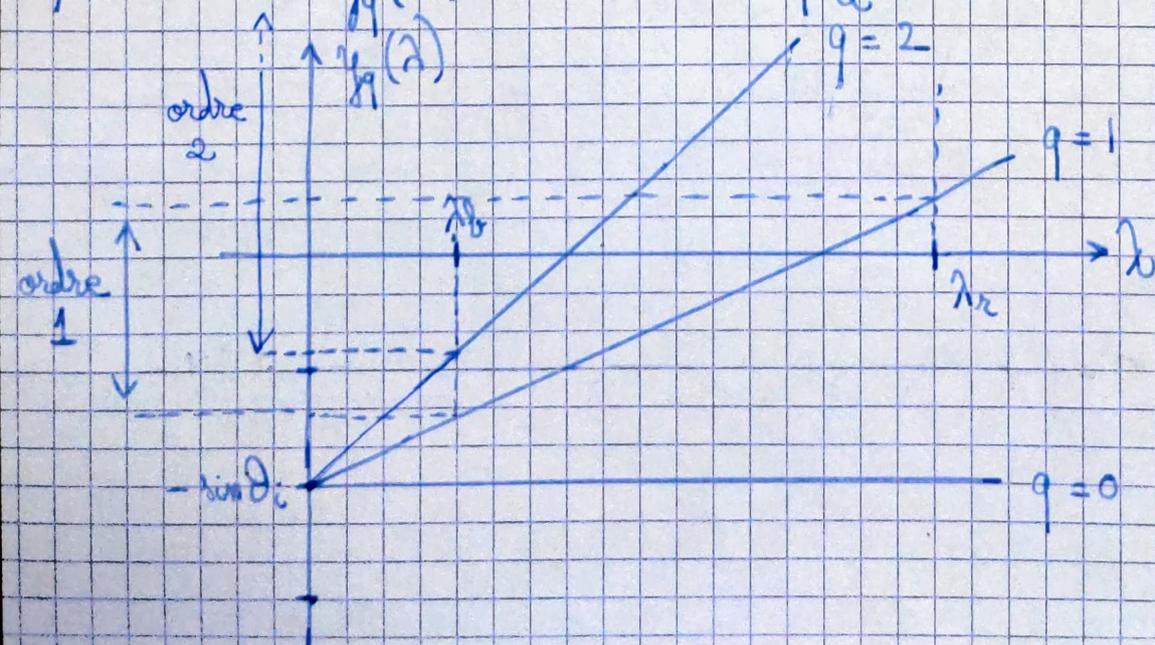
Et les premières annulations ont lieu de part et d'autre en $R = \pm \frac{\delta R}{2}$, on a alors $\sin(N \pi \cdot \frac{\delta R}{2} \cdot a) = 0$ d'où $N \pi \frac{\delta R}{2} \cdot a = \pi$ (pour la 1^{ère} annulation) et donc : $\delta R = \frac{2}{N a}$

42. Dans l'ordre $q = 0$, on a d'après Q39 : $\sin \theta_i + \sin \theta_r = 0$.
 Donc $\varphi = 0$ et $R = 0$. On conclut que $I(\theta_r) = I_0 \cdot N^2$

De plus on en déduit $\theta_r = -\theta_i$: l'angle de diffraction

ne dépend pas de la longueur d'onde donc la lumière n'est pas dispersée.

43. On a $\eta_q(\lambda) = \sin \theta_r = q \frac{\lambda}{a} - \sin(\theta_i)$ d'après Q39.



On a recouvrement des ordres lorsque les valeurs de $\sin(\theta_i)$ atteintes pour $\lambda \in [\lambda_b, \lambda_r]$ se recouvrent pour deux ordres successifs.

Cela se produit si: $\max_{\lambda_b \leq \lambda \leq \lambda_r} y_q(\lambda) > \min_{\lambda_b \leq \lambda \leq \lambda_r} y_{q+1}(\lambda)$

Donc si $y_q(\lambda_b) > y_{q+1}(\lambda_r)$

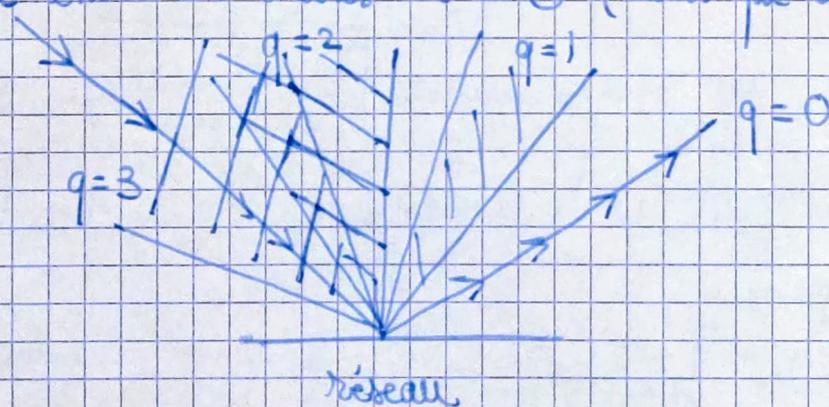
$$\Leftrightarrow -\sin \theta_i + q \frac{\lambda_r}{a} > -\sin \theta_i + (q+1) \frac{\lambda_b}{a}$$

C'est-à-dire pour $\boxed{\frac{q}{q+1} > \frac{\lambda_b}{\lambda_r}}$

Dans le cas de HARPS, on a $\frac{\lambda_b}{\lambda_r} = \frac{348}{691} \approx \frac{38}{70} \approx \frac{19}{35} \approx 0,54$

Donc $\frac{0}{0+1} < \frac{\lambda_b}{\lambda_r}$ $\frac{1}{1+1} < \frac{\lambda_b}{\lambda_r}$ $\frac{2}{2+1} > \frac{\lambda_b}{\lambda_r}$

On a recouvrement entre les ordres 2 et 3 (ainsi que les ordres suivants):



44. L'écart entre les deux longueurs d'onde est alors tel que $|R(\lambda + \Delta\lambda) - R(\lambda)| = \frac{SR}{2}$ ← écart entre le pic de diffraction et le premier zéro

Ainsi, comme $R = \frac{\sin \theta_i + \sin \theta_r}{\lambda}$, on a:

$$R(\lambda + \Delta\lambda) - R(\lambda) \approx \frac{dR}{d\lambda} \cdot \Delta\lambda = - \frac{\sin \theta_i + \sin \theta_r}{\lambda^2} \cdot \Delta\lambda$$

$$\approx -R \times \frac{1}{R} \quad \text{avec } R = \left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{-1}$$

Alors: $\frac{SR}{2} = R \times \frac{1}{R}$, or on sait que $R = \frac{q}{a}$ (Q39)

et $SAC = \frac{S_0}{Na}$ (Q4!) donc $\frac{1}{Na} = \frac{q}{Ra}$ d'où:

$$R = q \times N$$

On choisit donc le plus grand ordre q , tel qu'il n'y ait pas de recouvrement dans la bande spectrale étudiée, en l'occurrence ici on prendra $q = 1$ (puisque l'ordre 2 est partiellement recouvert avec l'ordre 3).

4.5. Les éléments ayant une largeur finie peuvent se découper comme une somme d'éléments de longueur dae et de position $m \times dae$ avec $-\frac{\epsilon}{2} \leq dae \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $m \in \left[-\frac{\epsilon}{2dae}; \frac{\epsilon}{2dae}\right]$.

Par analogie avec la question 38, chacun de ces éléments diffracte une onde avec une transmission $\frac{p}{\epsilon} = \frac{p dae}{\epsilon}$ et:

$$E(p) = \sum_{m=-\frac{\epsilon}{2dae}}^{\frac{\epsilon}{2dae}} \frac{p dae}{\epsilon} \cdot E_i e^{i p t} \times e^{i(k_1 \cdot r_0 - \omega t)} \times e^{i m \varphi'(x)}$$

où $\varphi'(x) = k dae (\sin \theta_i + \sin \theta_r)$

Alors $m \varphi' = k m dae (\sin \theta_i + \sin \theta_r) = k \cdot \frac{x}{a} \cdot \varphi$

(car $x = m \times dae$ est la position de l'élément).

En prenant $dae \rightarrow 0$ on obtient:

$$E(p) = p E_i e^{i p t} e^{i(k_1 \cdot r_0 - \omega t)} \int_{-\frac{\epsilon}{2a}}^{\frac{\epsilon}{2a}} e^{i \frac{x}{a} \varphi} \frac{dx}{\epsilon}$$

ce qui correspond à la formule de l'émission, avec $\xi = x$.

4.6. On a alors $\int_{-\frac{\epsilon}{2a}}^{\frac{\epsilon}{2a}} e^{i \frac{x}{a} \varphi} \frac{dx}{\epsilon} = \int_{-\frac{\epsilon \varphi}{2a}}^{\frac{\epsilon \varphi}{2a}} e^{i u} \frac{du}{\epsilon \varphi}$ où $u = \frac{x \varphi}{a}$
 $dx = a \frac{du}{\varphi}$

$$\int_{-\frac{\epsilon}{2a}}^{\frac{\epsilon}{2a}} e^{i \frac{x}{a} \varphi} \frac{dx}{\epsilon} = \frac{a}{\epsilon \varphi} \left[-i e^{i u} \right]_{-\frac{\epsilon \varphi}{2a}}^{\frac{\epsilon \varphi}{2a}} = \frac{2a}{\epsilon \varphi} \sin\left(\frac{\epsilon \varphi}{2a}\right) = \text{sinc}\left(\frac{\epsilon \varphi}{2a}\right)$$

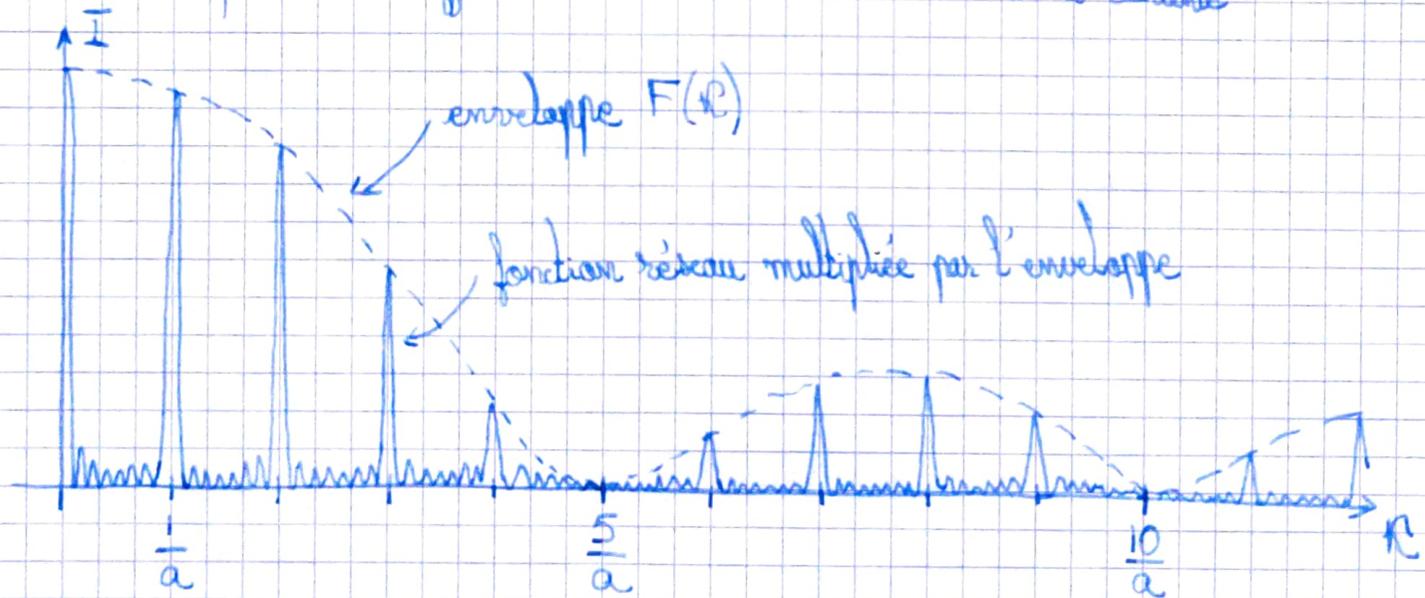
Ainsi, en utilisant $\psi = 2\pi Ra$ (Q40) on obtient :

$$\int_{-E/2}^{E/2} e^{i\frac{x\psi}{a}} \frac{dx}{E} = \frac{\text{sinc}(\pi RE)}{\pi RE}$$

Ceci revient dans toute l'analyse précédente (notamment Q40) à remplacer ρ par $\rho \text{sinc}(\pi RE)$; on conclut que :

$$I(\theta_r) = \underbrace{I(\theta_r; E=0)}_{\text{donnée par Q40}} \times \text{sinc}^2(\pi RE) = I_0 N^2 F(\kappa) R(\kappa)$$

avec $F(\kappa) = \text{sinc}^2(\pi RE)$. Cette fonction est maximale en 0 et s'annule pour $RE = n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Si $E = \frac{a}{5}$ alors elle s'annule en premier pour $R = \frac{1}{E} = \frac{5}{a}$ soit au niveau du 5^e pic de diffraction. L'allure de I est la suivante :



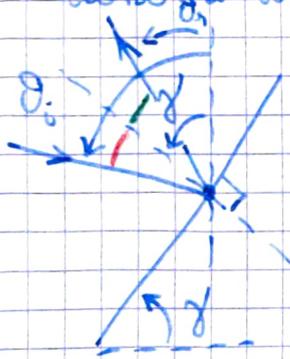
L'intensité maximale est atteinte pour l'ordre $q=0$. On a alors $\sin \theta_r + \sin \theta_i = 0$ d'où $\theta_r = -\theta_i$: on retrouve la loi de Descartes pour la réflexion.

47. Pour travailler à fort pouvoir de résolution on a vu qu'il faut choisir N et q élevés, mais si on augmente N alors le rapport

$\frac{a}{\lambda}$ sera réduit ce qui va contribuer à rétrécir la largeur de l'enveloppe $F(\theta)$ et réduire l'intensité lumineuse, en particulier, au niveau des ordres q élevés. Il y a donc un compromis, à faire entre le pouvoir de résolution et l'intensité lumineuse. Or on cherche à mesurer des signaux de très faible intensité donc le compromis sera mathématique.

6 - Un réseau échelle "blaze"

48. Cet angle satisfait les lois de l'optique géométrique, on s'attend donc à avoir, au vu du schéma égalité entre les angles vert et rouge, soit:



$$\theta_i - \gamma = \gamma - \theta_{r, \max}$$

D'où: $\theta_{r, \max} = 2\gamma - \theta_i$

On retrouve bien $\theta_{r, \max} = -\theta_i$ pour $\gamma = 0$.

49. Dans cette configuration, $\theta_i = \gamma$ et $\theta_{r, \max} = \theta_i = \gamma$

On en sait que: $a(\sin \theta_i + \sin \theta_r) = q\lambda$

D'où: $2a \sin \gamma = q_{\max}(\lambda) \cdot \lambda$

Soit: $q_{\max}(\lambda) = \frac{2a}{\lambda} \sin \gamma$

ou encore: $\lambda_{\max}(q) = \frac{2a}{q} \sin \gamma$

50. On a alors $q_{\max}(\lambda) = \frac{2}{n\lambda} \sin \gamma$ où $n = \frac{1}{a}$ est le nombre d'éléments par unité de longueur.

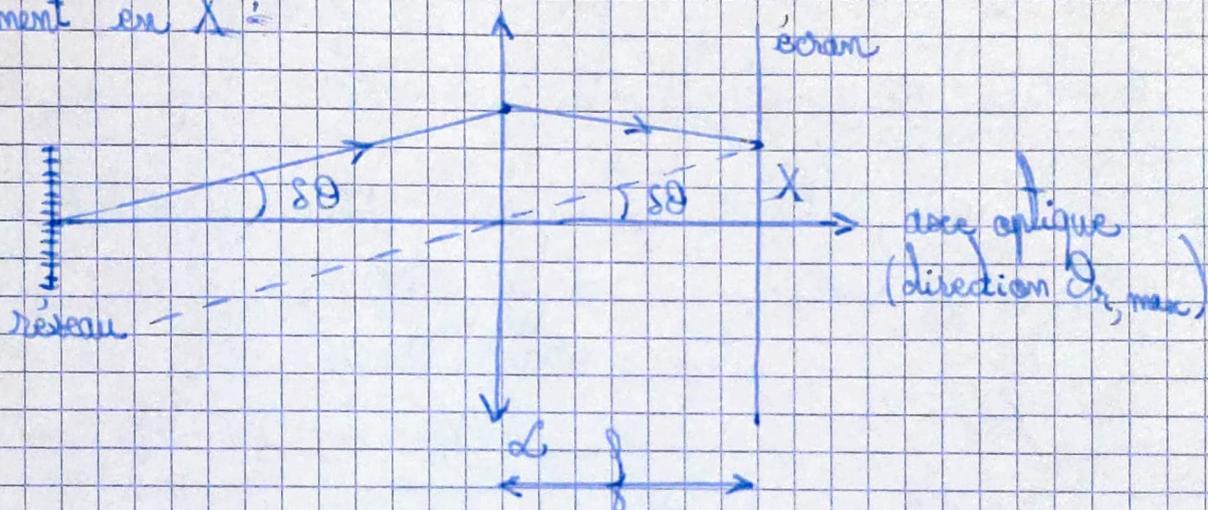
On prendra $\sin(75^\circ) \approx 1$, alors:

$$q_{\max}(\lambda) \approx \frac{2}{30 \cdot 10^3 \times 400 \cdot 10^{-9}} \sim \frac{2}{12} \cdot 10^3 \sim 160$$

$$q_{\max}(\lambda) \approx \frac{2}{30 \cdot 10^3 \cdot 700 \cdot 10^9} \approx \frac{2}{21} \cdot 10^3 \approx 100$$

Ainsi $q_r \approx 100$ et $q_b \approx 160$

51. Comme l'écran est dans le plan focal image de la lentille, le rayon parallèle passant par le centre de la lentille arrivera également en X.



On a $X = f \tan(\delta\theta)$, or $\delta\theta \ll 1$ donc $X \approx f \cdot \delta\theta$

52. On a vu que $a(\sin\theta_i + \sin\theta_r) = q\lambda$. Or on sait que

$\theta_i = \gamma$ et $\theta_r = \theta_{r,\max} + \delta\theta = \gamma + \delta\theta$ avec $\delta\theta \ll 1$

D'où: $\sin\theta_r = \sin(\gamma + \delta\theta) \approx \sin(\gamma) + \delta\theta \cdot \cos(\gamma)$.

Ainsi: $a(2\sin\gamma + \delta\theta \cos\gamma) = q\lambda$

D'où: $\delta\theta = \frac{1}{\cos\gamma} \left(\frac{q\lambda}{a} - 2\sin\gamma \right)$

On conclut en réutilisant Q51 que: $X = \frac{f}{\cos\gamma} \left(\frac{q\lambda}{a} - 2\sin\gamma \right)$

