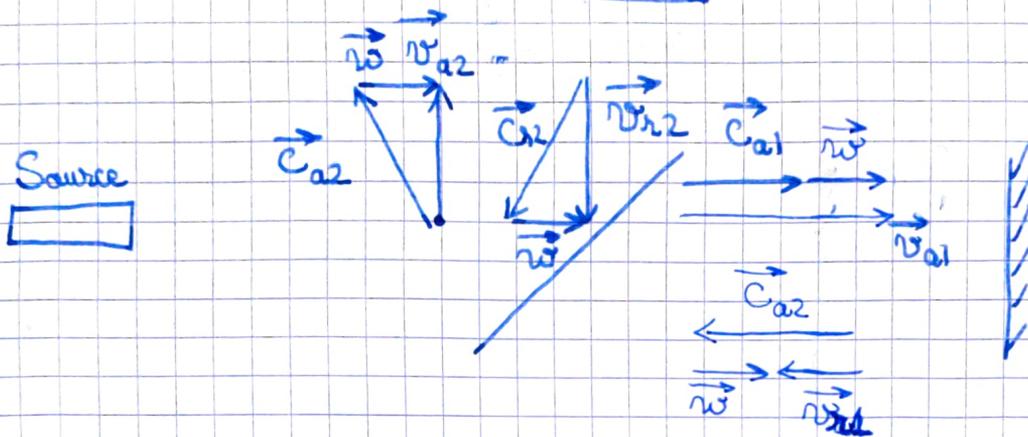


Corrigé - DSG Type CCINP

I - Expérience de Michelson et Morley

1.



On utilise la composition des vitesses:

$$\vec{v}(\text{lumière} / \mathcal{R}_{obs}) = \vec{v}(\text{lumière} / \mathcal{R}_{\text{éther}}) + \underbrace{\vec{w}}_{\vec{v}(\mathcal{R}_{\text{éther}} / \mathcal{R}_{obs})}$$

Au encore $\vec{v}_{\mathcal{E}i} = \vec{c}_{\mathcal{E}i} + \vec{w}$

En additionnant les vecteurs $\vec{c}_{\mathcal{E}i}$ et \vec{w} on retrouve donc le vecteur $\vec{v}_{\mathcal{E}i}$ comme indiqué sur le schéma.

On voit alors, sachant que $\|\vec{c}_{\mathcal{E}i}\| = c$ et $\|\vec{w}\| = w$,

que:

$$\begin{cases} \|\vec{v}_{az}\| = \|\vec{v}_{rz}\| = \sqrt{c^2 - w^2} \\ \|\vec{v}_{a1}\| = c + w \\ \|\vec{v}_{r1}\| = c - w \end{cases}$$

2. La lumière parcourt la distance L à chaque aller et à chaque retour, à la vitesse $\|\vec{v}_{\mathcal{E}i}\|$. Ainsi:

$$t_1(t) = \underbrace{\frac{L}{\|\vec{v}_{a1}\|}}_{\text{durée de l'aller}} + \underbrace{\frac{L}{\|\vec{v}_{r1}\|}}_{\text{durée du retour}} = \frac{L}{c-w} + \frac{L}{c+w}$$

$$\text{et } \tau_2(\alpha) = \frac{L}{\|\vec{v}_{02}\|} + \frac{L}{\|\vec{v}_{12}\|} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

On trouve donc $\tau_1(\alpha) = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$ et $\tau_2(\alpha) = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$

Alors $\tau(\alpha) = \tau_2(\alpha) - \tau_1(\alpha)$

$$= \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - \frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{2L}{c} \left(\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) - \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \right) \text{ à l'ordre 2 en } \frac{v}{c}$$

$$\tau(\alpha) = -\frac{Lv^2}{c^3}$$

L'ordre d'interférence p est donné par $p = \frac{\varphi}{2\pi}$ avec

$$\varphi = \omega \times \tau = 2\pi \times \tau \times \nu \quad \text{d'où} \quad p = \tau \times \nu = -\frac{Lv^2}{c^3}$$

ou encore:
$$p = -\frac{Lv}{c} \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

3. Dans la configuration β , le bras n°2 se retrouve dans la configuration du bras n°1 donc $\tau_2(\beta) = \tau_1(\alpha)$.

Le bras n°1 se retrouve dans la configuration inversée du bras n°2: $\vec{v}_{a1}(\beta) = \vec{v}_{12}(\alpha)$ et $\vec{v}_{21}(\beta) = \vec{v}_{22}(\alpha)$

On a donc $\tau_1(\beta) = \tau_2(\alpha)$.

Ainsi $\tau(\beta) = -\tau(\alpha) = \frac{Lv^2}{c^3}$ et

$$p(\beta) = \frac{Lv}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

4. On résume les résultats précédents:

$$\Delta p = 2L \frac{v}{c} \left(\frac{v}{c}\right)^2$$

5. La différence de marche dans la configuration coin d'air avec un angle θ s'écrit $S = 2D\theta$. Lorsque l'on change de configuration

on ajoute une différence de marche égale à $\Delta p \cdot \lambda$, ainsi :

$$S(\beta) = S(\alpha) + \lambda \cdot \Delta p = 2Dx + \lambda \Delta p$$

L'interfrange est tel que $S(x+i) = S(x) + \lambda$ donc

$$2D(x+i) = 2Dx + \lambda \text{ et } i = \frac{\lambda}{2D}$$

$$\text{Ainsi: } S(\beta) = \lambda \left(\frac{x}{i} + \Delta p \right) = \frac{\lambda}{i} (x - i \Delta p)$$

On retrouve la même figure d'interférences mais elle est décalée de Δp franges, autrement dit il y a un décalage de position $\Delta x = i \cdot \Delta p$.

6. a. Le référentiel héliocentrique est un référentiel dont l'origine est au centre du soleil et les axes pointent vers des étoiles lointaines.

b. 1^{er} loi : les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers.

2^{er} loi : le vecteur Soleil-Planète balaye des aires égales en des durées égales

3^{er} loi : Soit a le demi-grand axe de l'ellipse, T la période de rotation, M_s la masse du Soleil et G la constante de gravitation universelle :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_s}{4\pi^2}$$

c. Il s'agit de la vitesse de la Terre dans le référentiel héliocentrique, on a $w = \frac{2\pi a}{T}$ en supposant le mouvement circulaire

$$\begin{aligned} \text{D'où: } w &= \frac{2\pi}{T} \cdot \sqrt[3]{\frac{GM_s T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{T} \times GM_s} \\ &= \left(\frac{6}{\pi \cdot 10^7} \times 7 \cdot 10^{-11} \times 2 \cdot 10^{30} \right)^{1/3} \approx (30 \cdot 10^{12})^{1/3} \end{aligned}$$

Or $30 \approx 27 = 3^3$ donc $w \approx 3 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

On retrouve bien la valeur attendue.

7. On a
$$\Delta p = 2L \cdot \frac{v}{c} \cdot \left(\frac{w}{c}\right)^2 = 2 \times 11 \times \frac{5 \cdot 10^{14}}{3 \cdot 10^8} \times \left(\frac{3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^8}\right)^2$$
$$\approx 40 \cdot 10^6 \cdot (10^{-4})^2$$

$$\Delta p \approx 0,4 \text{ frange}$$

La sensibilité étant de 0,01 frange, cet écart devrait être largement détectable.

8. A priori, la limite de détection est telle que $\Delta p = 0,01 = \frac{1}{100}$

D'où :
$$2L \frac{v}{c} \left(\frac{w}{c}\right)^2 = \frac{1}{100}, \text{ ou encore :}$$

$$w = \frac{c}{10} \sqrt{\frac{c}{2vL}} = 3 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 5 \cdot 10^{14} \cdot 10}} \approx 6 \cdot 10^3 \approx \boxed{6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Il faut s'assurer que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther dépasse cette valeur, ce qui n'est le cas (potentiellement) qu'à certains moments de l'année si jamais l'éther n'est pas immobile dans le référentiel héliocentrique.

D'où l'intérêt de répéter l'expérience à différentes saisons.

II - Électromagnétisme et relativité

9. Cette force s'écrit
$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$
 (force de Lorentz)

10. On a, en notant M le point matériel associé à la charge q :

$$\vec{v}(M/R) = \underbrace{\vec{v}(M/R')}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{V}_e}_{\text{vitesse d'entraînement}}$$

Donc
$$\boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V}_e}$$

11. Supposons que la loi de composition galiléenne des vitesses est vérifiée et que les champs satisfaisant la transformation classique proposée dans l'énoncé, alors :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \\ &= q [\vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B}' + (\vec{v} + \vec{v}_e) \wedge \vec{B}'] \\ &= q [\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'] \\ &= \vec{F}'\end{aligned}$$

La force de Lorentz est donc invariante par cette transformation ce qui est normal, puisqu'une force ne dépend jamais du référentiel d'étude.

12. Dans le référentiel du fil, les charges sont immobiles donc la densité volumique de courant est nulle, ainsi il n'y a pas de source de champ magnétique et le champ magnétique est nul. On en déduit $\vec{B}' = \vec{0}$ puis $\vec{B} = \vec{0}$ d'après la loi de transformation en Q11.

(Rq : comme nous le verrons en Q14 cette loi est évidemment fautive.)

13. On a dans le référentiel (\mathcal{R}') une distribution de charges $\rho = \rho_f$ dans le fil et 0 ailleurs.

Si M est un point de l'espace, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}'(M)$ est dans ces plans et $\vec{E}'(M) = E'(r) \vec{e}_z$.

De plus la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et translation selon (O_z) donc $\vec{E}' = E'(r) \vec{e}_z$.

On applique le théorème de Gauss à un cylindre passant par M et de hauteur h avec $r \geq a$:

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{d'où} \quad 2\pi r h E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \times \pi a^2 h \rho_f$$

Ainsi: $E(r) = \frac{\pi a^2 \rho_f}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\lambda_f}{2\pi \epsilon_0 r}$ et $\vec{E} = \frac{\lambda_f}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$

On a alors:

$$\vec{E} = \vec{E}' - \vec{v}_e \wedge \vec{B}' = \vec{E}' \quad \text{car} \quad \vec{B}' = \vec{0} \quad (\text{Q12}).$$

14. Un observateur dans \mathcal{R} voit les charges se déplacer à la vitesse \vec{v}_e ce qui crée une densité volumique de courant $\vec{j} = \rho_f \vec{v}_e$ et une intensité: $I = \int_{\text{section du fil}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi a^2 \rho_f v_e$

ou encore: $I = \lambda_f v_e$

La distribution de courants admet $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ comme plan de symétrie donc \vec{B} est normal à ce plan et les invariances sont identiques à Q13, ainsi $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

Soit Γ le cercle d'axe (O_z) passant par M , on applique le théorème d'Ampère à Γ :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc} \quad \text{d'où} \quad 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Ainsi: $\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda_f v_e}{2\pi r} \vec{e}_\theta$

Ce résultat est incohérent avec Q12 ce qui montre que la transformation galiléenne des vitesses ne fonctionne pas: comme le champ (\vec{E}, \vec{B}) se propage à la vitesse de la lumière il faut utiliser une transformation relativiste.

15. On a alors $\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}'_{\perp} = \vec{0}$
 $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{0}$ $\vec{E}'_{\perp} = \frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

Alors: $\vec{B}_{\parallel} = \vec{0}$
 $\vec{B}_{\perp} = \gamma \left(\vec{0} + \frac{\vec{v}_e}{c^2} \wedge \frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r \right)$ avec $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_z$
 $= \frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{\lambda_f v_e}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_\phi$

$\vec{B}_{\perp} = \gamma \cdot \frac{\mu_0 \lambda_f v_e}{2\pi r} \vec{e}_\phi$

Ainsi $\vec{B} = \vec{B}_{\perp} + \vec{B}_{\parallel}$ soit

$$\vec{B} = \gamma \cdot \frac{\mu_0 \lambda_f v_e}{2\pi r} \vec{e}_\phi$$

Et $\vec{E}'_{\parallel} = \vec{0}$; $\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - \vec{v}_e \wedge \vec{0})$ et $\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$

D'où $\vec{E} = \gamma \cdot \frac{\lambda_f}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

16. On retrouve les expressions obtenues pour \vec{E}' et \vec{B}' mais avec λ_f remplacée par $\lambda = \gamma \lambda_f > \lambda_f$: la densité linéique de charge apparaît plus importante. La même quantité de charge se trouve donc dans un espace plus restreint: il y a une contraction des longueurs.

III - Expérience de Michelson - Gale - Pearson

17. R_g est un référentiel dont l'origine est au centre de la Terre et dont les axes pointent vers des étoiles lointaines.

Dans R_g , la Terre a un mouvement de rotation uniforme de vecteur rotation $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{e}_z$ où $\Omega_T = \frac{2\pi}{T}$.

18. L'éther étant immobile dans R_g , et en rotant R_T le

référentiel terrestre, on a : $\underbrace{\vec{v}(\text{étoiles}/R_G)}_{= \vec{0}} = \underbrace{\vec{v}(\text{étoiles}/R_T)}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\vec{v}(M/R_G)}_{\text{vitesse d'entraînement}}$

$$\text{D'où : } \vec{w}(\varphi) = -\vec{v}(M/R_G) \\ = + R_T \cos(\varphi) \cdot \Omega_T \vec{e}_\theta$$

rayon du cercle parcouru par M

Ainsi $\boxed{w(\varphi) = R_T \Omega_T \cos \varphi}$

19 a. À la latitude φ , la vitesse de la lumière est :

$$\begin{aligned} \vec{v}(\text{lumière}/R_T) &= \vec{v}(\text{lumière}/R_G) - \vec{v}(M/R_G) \\ &= \vec{v}(\text{lumière}/R_G) + \vec{w} \\ &= -c \vec{e}_\theta + w(\varphi) \vec{e}_\theta \\ &= -(c - w(\varphi)) \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

D'où le temps pour parcourir AB : $\tau_{AB} = \frac{X}{c - w(\varphi)}$

De même à la latitude $\varphi + \Delta\varphi$ sur le trajet CD :

$$\vec{v}(\text{lumière}/R_T) = +c \vec{e}_\theta + w(\varphi + \Delta\varphi) \vec{e}_\theta$$

Et : $\tau_{CD} = \frac{X}{c + w(\varphi + \Delta\varphi)}$

Enfin $\tau_{BC} + \tau_{DA} = \tau_0$ d'après la définition de τ_0 donc :

$$\boxed{\tau_1 = \tau_0 + \frac{X}{c - w(\varphi)} + \frac{X}{c + w(\varphi + \Delta\varphi)}}$$

b. On a alors $\tau_1 = \tau_0 + \frac{X}{c} \left[\frac{1}{1 - \frac{w(\varphi)}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{w(\varphi + \Delta\varphi)}{c}} \right]$

$$= \tau_0 + \frac{X}{c} \left[2 + \frac{w(\varphi) - w(\varphi + \Delta\varphi)}{c} \right]$$

$$\approx \tau_0 + \frac{X}{c} \left[2 - \frac{\Delta\varphi}{c} w'(\varphi) \right]$$

Où $Y = R_T \cdot \Delta\varphi$ (lien entre la variation de latitude et la taille méridionale du dispositif).

Et $w'(\varphi) = -R_T \Omega_T \sin \varphi$ d'après Q18.

Donc :

$$\boxed{\zeta_1 \approx \zeta_0 + \frac{2X}{c} + \frac{XY \Omega_T}{c^2} \sin \varphi}$$

ce qui correspond à l'énoncé avec $f(Y, \varphi) = Y \sin \varphi$.

c. On a alors de façon analogue à 19a :

$$\zeta_{BA} = \frac{X}{c + w(\varphi)} \quad \text{et} \quad \zeta_{OC} = \frac{X}{c - w(\varphi + \Delta\varphi)}$$

$$\text{D'où } \zeta_2 = \zeta_0 + \frac{X}{c + w(\varphi)} + \frac{X}{c - w(\varphi + \Delta\varphi)}$$

20. Le déphasage est, en notant ω la pulsation de l'onde :

$$\Delta\Phi = \omega (\zeta_1 - \zeta_2) = \omega \times \frac{2 \Omega_T XY}{c^2} \sin(\varphi)$$

$$\text{Or } \omega = 2\pi \frac{c}{\lambda_0} \quad \text{d'où : } \Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 c} \times XY \times \Omega_T \sin \varphi$$

On retrouve bien :

$$\boxed{\Delta\Phi = \frac{4\pi}{\lambda_0 c} \times S \times \Omega_T}$$

21. On a $\mu = \frac{\Delta\Phi}{2\pi} = \frac{2}{\lambda_0 c} S \Omega_T$.

22. Dans l'expérience de Sagnac, on peut étudier le cas sans rotation, en arrêtant de faire tourner le plateau. Mais ceci n'est pas possible ici car on ne peut pas arrêter de faire tourner la Terre. Le rectangle AEFD ayant une aire bien plus faible, $\Delta\Phi$ y est très petit, et donc on peut négliger le rôle de la rotation de la Terre: il sert de témoin.

23. On a:
$$\Delta \varphi = \frac{2}{5 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8} \times \underbrace{339 \times 612 \times 7 \cdot 10^{-5}}_{\approx 2 \cdot 10^5} \times \underbrace{\sin(41^\circ)}_{\approx 0,5}$$

$$\approx \frac{14}{15} \cdot \frac{1}{10} \approx \boxed{0,09}$$

IV - Le gyromètre à fibre

1 - Principe de fonctionnement et modulation de phase

24. L'aire totale de la boucle est $S_{\text{tot}} = N_t \times \pi r^2$
 De plus: $L \approx N_t \times 2\pi r$ si l'essentiel du fil se trouve dans l'enroulement

Ainsi:
$$\Delta \Phi_s = \frac{4\pi}{c} \cdot N_t \cdot 2\pi r \cdot \frac{r\Omega}{\lambda_0} = \boxed{\frac{8\pi \Omega}{\lambda_0 c} \times S_{\text{tot}}}$$

25. Par la formule de Fresnel, on va sommer deux signaux d'intensité $\frac{I_0}{4}$ et de déphasage $\Delta \Phi_s$:

$$\overset{\substack{\text{2 passages} \\ \text{par la} \\ \text{séparation}}}{I(\Delta \Phi_s)} = \frac{I_0}{4} + \frac{I_0}{4} + 2\sqrt{\frac{I_0}{4} \cdot \frac{I_0}{4}} \cos(\Delta \Phi_s)$$

On encore:
$$\boxed{I(\Delta \Phi_s) = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\Delta \Phi_s))}$$

26. a. Le sens de la rotation va modifier le signe de Ω et donc de $\Delta \Phi_s$. Si on modifie ce sens, on change donc le signe de $\Delta \Phi_s$ mais $I(\Delta \Phi_s)$ est une fonction paire donc cela ne modifie pas l'intensité: il est impossible de détecter le sens de la rotation.

b. On a
$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{d}{d\Omega} \left[\frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{8\pi \Omega S_{\text{tot}}}{\lambda_0 c} \right) \right]$$

$$= - \frac{4\pi I_0 S_{\text{tot}}}{\lambda_0 c} \sin \left(\frac{8\pi \Omega S_{\text{tot}}}{\lambda_0 c} \right)$$

D'où:
$$K = \frac{4\pi S_{tot}}{\lambda_0 c} \sin\left(\frac{8\pi R S_{tot}}{\lambda_0 c}\right)$$

$$\approx \frac{32\pi^2 S_{tot}^2}{\lambda_0^2 c^2} \Omega \quad \left(\text{car } \frac{8\pi R S_{tot}}{\lambda_0 c} \ll 1 \text{ et } \sin x \approx x \right)$$

On peut augmenter K :

- * En augmentant la surface des boucles
- * En augmentant le nombre de boucles
- * En diminuant la longueur d'onde

c. On a $K \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} 0$ donc aux faibles vitesses de rotation ce capteur a une très mauvaise sensibilité et on aura une forte incertitude relative de mesure.

27. a. On réutilise les formules de l'énoncé et le formulaire:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_t - \Delta\phi_s &= \phi_f(t) - \phi_f(t - \tau_0) \\ &= \phi_0 \cos(2\pi f_m t) - \phi_0 \cos(2\pi f_m (t - \tau_0)) \\ &= -2\phi_0 \sin\left(2\pi f_m \left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)\right) \sin\left(\pi f_m \tau_0\right) \end{aligned}$$

D'où:
$$\Delta\phi_t = \Delta\phi_s - 2\phi_0 \sin\left(\pi f_m \tau_0\right) \sin\left(2\pi f_m \left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)\right)$$

b. On a:

$$\begin{aligned} \sin\left(2\pi f_m \left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)\right) &= \sin\left(2\pi f_m t - \pi f_m \cdot \frac{\tau_0}{c}\right) \\ &= \sin\left(2\pi f_m t - \frac{\pi}{2} \frac{f_m}{f_p}\right) \end{aligned}$$

Si $\frac{\pi}{2} \frac{f_m}{f_p} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), soit $f_m = (2k+1)f_p$

avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $\sin\left(2\pi f_m \left(t - \frac{\tau_0}{2}\right)\right) = (-1)^{k+1} \cos(2\pi f_m t)$ et

$$\text{on a } \sin\left(\frac{\pi}{2} \right) = \sin\left[\frac{\pi}{2}(2k+1) \cdot \frac{c}{2nL} \times \frac{nL}{c}\right]$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$= (-1)^k$$

Alors: $\Delta\phi_t = \Delta\phi_s - 2\phi_0 \times (-1)^k \cdot (-1)^{k+1} \cos(2\pi f_m t)$

$$= \Delta\phi_s + \phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)$$

avec $\phi_{\text{eff}} = 2\phi_0$

28. On a donc, en réinjectant dans $I(\Delta\phi_t)$ obtenue en Q 25:

$$I(t) = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos(\Delta\phi_s + \phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)) \right)$$

$$= \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos(\Delta\phi_s) \cos(\phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)) - \sin(\Delta\phi_s) \sin(\phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)) \right]$$

par formule du cosinus d'une somme.

2 - Analyse harmonique

29. On peut écrire:

$$\cos(\phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)) = f_{\phi_{\text{eff}}}(2\pi f_m t)$$

$$= J_0(\phi_{\text{eff}}) - 2J_2(\phi_{\text{eff}}) \cos(4\pi f_m t)$$

+ harmoniques supérieures

$$\sin(\phi_{\text{eff}} \cos(2\pi f_m t)) = g_{\phi_{\text{eff}}}(2\pi f_m t)$$

$$= 2J_1(\phi_{\text{eff}}) \cos(2\pi f_m t)$$

+ harmoniques supérieures.

En réinjectant dans le résultat de Q 28 on trouve

$$I(t) = i_0 + i_1 \cos(2\pi f_m t) + i_2 \cos(4\pi f_m t)$$

où :

$$\begin{cases} i_0 = \frac{I_0}{2} (1 + \cos(\Delta\Phi_s)) J_0(\Phi_{\text{eff}}) \\ i_1 = -I_0 \sin(\Delta\Phi_s) J_1(\Phi_{\text{eff}}) \\ i_2 = -I_0 \cos(\Delta\Phi_s) J_2(\Phi_{\text{eff}}) \end{cases}$$

30. a. En l'absence de rotation, $\Delta\Phi_s = 0$ (cf Q 24) et donc $i_2 = 0$.

b. i_1 est sensible au signe de $\Delta\Phi_s$ et donc de Ω , on peut donc déterminer le sens de rotation. De plus i_1 dépend linéairement de $\Delta\Phi_s$ pour $\Delta\Phi_s$ faible :

$$i_1 \approx -I_0 \cdot J_1(\Phi_{\text{eff}}) \times \frac{8\pi\Omega}{\lambda_0 c} S_{\text{ét}}$$

$$\text{Et } \left| \frac{1}{I_0} \frac{di_1}{d\Omega} \right| = J_1(\Phi_{\text{eff}}) \cdot \frac{8\pi}{\lambda_0 c} S_{\text{ét}} \text{ ne s'annule pas lorsque}$$

$\Omega \rightarrow 0$, on a donc une bonne sensibilité même aux faibles vitesses de rotation.

31. On a $p(t) = K_p \cdot K \cdot \delta_0 \cdot I(t) \cdot \cos(2\pi f_m t)$

$$p(t) = K K_p \delta_0 \left[i_0 \cos(2\pi f_m t) + i_1 \cos^2(2\pi f_m t) + i_2 \cos(2\pi f_m t) \cos(4\pi f_m t) \right]$$

$$\text{Or } \cos^2(2\pi f_m t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_m t)$$

$$\text{et } \cos(2\pi f_m t) \cos(4\pi f_m t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi f_m t) + \cos(6\pi f_m t)$$

$$\text{Ainsi : } p(t) = p_0 + p_1 \cos(2\pi f_m t) + p_2 \cos(4\pi f_m t) + p_3 \cos(6\pi f_m t)$$

$$\text{avec : } p_0 = K K_p \delta_0 \times \frac{i_1}{2}$$

$$p_1 = K K_p \delta_0 \left(i_0 + \frac{i_2}{2} \right)$$

$$\boxed{R_2 = K R_p \delta_o \times \frac{i_1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{R_3 = K R_p \delta_o \times \frac{i_2}{2}}$$

32. Cette cellule agit comme un filtre passe-bas et va sélectionner les fréquences les plus basses, en l'occurrence ici la fréquence nulle (composante continue) et couper les composantes sinusoïdales.

On peut ainsi choisir une fréquence de coupure $\frac{1}{2\pi RC} < f_m$

d'où $\tau > \frac{1}{2\pi f_m}$

Il faut avec $f_m = 30 \text{ kHz}$: $\frac{1}{2\pi RC} < f_m$, on pourra prendre

$\tau \approx 1 \text{ ms}$ ce qui est facilement réalisable en TP.

33. On a :

$$\sin(\Delta\phi_s) \approx \frac{-2U}{K_p R I_0 \delta_o J_1(\phi_{eff})}$$

$$\approx \frac{2 \times 1,5}{1 \times 10 \times 0,6} \approx \frac{3}{6} \approx 0,5$$

↳ la sur la courbe en annexe

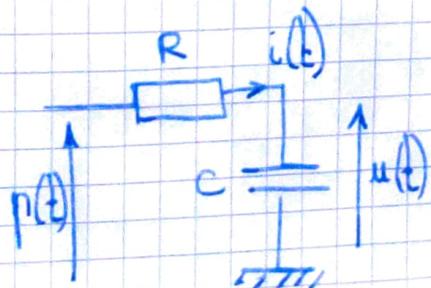
D'où $\Delta\phi_s \approx \frac{\pi}{3}$

$$\text{Or } \Delta\phi_s = \frac{8\pi^2 r^2 N_{tot} \Omega}{\lambda_o c}$$

$$\text{D'où } \Omega = \frac{\lambda_o c \Delta\phi_s}{8\pi^2 r^2 N_{tot}} = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1}{8 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4} \approx \boxed{1,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$$

3 - Simulation informatique

34. a. On reprend le circuit de la figure 6 :



Par la loi d'Ohm $Ri(t) = u(t)$. De plus aux bornes du condensateur : $i(t) = C \cdot \frac{du}{dt}$; ainsi $u_R(t) = RC \frac{du}{dt}$.

Mais par la loi des mailles : $p(t) = u(t) + u_R(t)$.

D'où :
$$\tau \frac{du}{dt} + u = p$$

b. On a alors $\frac{du}{dt} = \frac{p-u}{\tau} = f(p(t), u(t))$

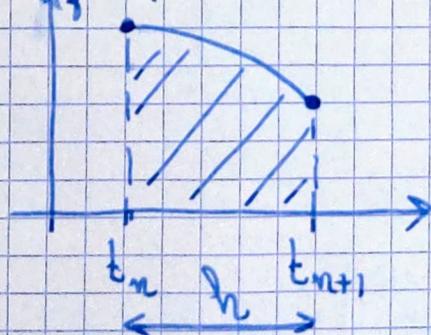
où $f(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - \beta}{\tau}$.

c. On intègre entre t_n et t_{n+1} :

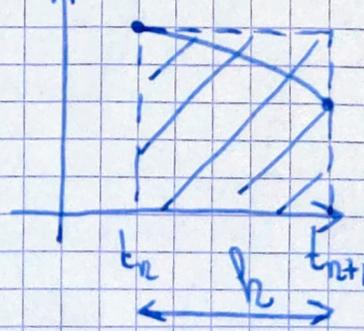
$$u_{n+1} - u_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(p(t), u(t)) dt = \psi_n.$$

35. On peut supposer que : $\psi_n \approx f(p(t_n), u(t_n)) \times h$

intégrale
réelle



méthode
des
rectangles



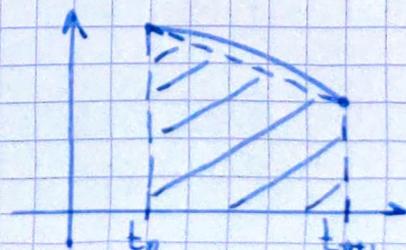
Alors : $u_{n+1} = u_n + h \times f(p(t_n), u(t_n))$

$$= u_n + \frac{p_n - u_n}{\tau} \times h$$

$$u_{n+1} = \left(1 - \frac{h}{\tau}\right) u_n + \frac{h}{\tau} p_n$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

36. On a maintenant l'approximation suivante :



Alors $\Psi_n \approx \frac{h}{2} \times (f(u(t_n), p(t_n)) + f(u(t_{n+1}), p(t_{n+1})))$

On pourra alors écrire :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2} (r_0 + f(p_{n+1}, u(t_{n+1})))$$

Or on peut supposer $u(t_{n+1}) \approx u_n + h f(p_n, u_n)$
 $\approx u_n + r_0 h$ (Q35)

D'où : $u_{n+1} \approx u_n + \frac{h}{2} (r_0 + r_0)$ où $r_0 = f(p_{n+1}, u_n + r_0 h)$

On peut alors calculer u_{n+1} en fonction de u_n .

37. * def f(x, y):
 | return (x - y) / tau

* T = []
 for n in range(N):
 | T.append(h * n)

* P = []
 for n in range(N):
 | P.append(p(T[n]))

* def E(P):
 U = [0]
 for n in range(N-1):
 | U.append(U[-1] * (1 - h/tau) + P[n] * h/tau)
 return U

* def RK(P):
 U = [0]

for n in range $(N-1)$:

$$r = f(P[n], U[n])$$

$$k = f(P[n+1], U[n] + r * h)$$

$$U.append(U[n] + h * (r+k)/2)$$

return U

38. a. On sait que la composante continue de $p(t)$, p_0 , est proportionnelle à i_1 et donc à $-J_1(\Phi_{eff})$. Or:

$$J_1(1,8 \text{ rad}) = 0,6 \quad J_1(3,8) \approx 0 \quad J_1(5,4) \approx -0,35$$

Donc dans ces trois cas on aura $p_0 < 0$, $p_0 \approx 0$ et $p_0 > 0$ respectivement ce qui nous permet d'identifier:

$$\Phi_{eff} = 1,8 \text{ rad} : \text{fig a, b, c}$$

$$\Phi_{eff} = 3,8 \text{ rad} : \text{fig e}$$

$$\Phi_{eff} = 5,4 \text{ rad} : \text{fig d}$$

On finit de classer les figures a à c par temps de réponse, plus τ est long et plus $u(t)$ converge lentement:

n° du couple	1	2	3	4	5
nom de la figure	c	b	a	e	d
τ [μ s]	500	50	5	50	50
Φ_{eff} [rad]	1,8	1,8	1,8	3,8	5,4

b. $\Phi_{eff} = 3,8 \text{ rad}$ est déconseillée, car on a alors $i_1 = 0$ et on ne peut plus mesurer la vitesse de rotation Ω .

c. Avantage: plus τ est grand et plus $u(t)$ est proche d'une constante donc plus la mesure est précise.

Inconvénient: si τ est élevé le temps de réponse est lent et on ne peut pas mesurer de variations rapides de Ω .

d. On a vu en Q33 :

$$\sin(\Delta\phi_s) = \frac{-2\mu}{K_r K I_0 \delta_0 J_1(\phi_{eff})}$$

Si on suppose $\phi_{eff} = 1,8$ rad alors $J_1(\phi_{eff}) = 0,6$ et :

$$\sin(\Delta\phi_s) = \frac{-2 \times 0,7}{1 \times 10 \times 0,6} \approx -0,2 \quad \text{d'où } \boxed{\Delta\phi_s \approx -0,2}$$

ce qui est éloigné (et même de mauvais signe !) par rapport à la valeur $\Delta\phi_s = \frac{\pi}{3}$ trouvée en Q33. D'où l'intérêt de connaître ϕ_{eff} précisément.