Corrigé - DM 19
La radioactivité

I - Le quanton libre

1. D'après le postulat de Born, $dP = |\Psi(x,t)|^2 dx$ est la probabilité de se trouver entre x et $x + dx$.
Ψ s'exprime donc en $m^{-1/2}$.

2. La probabilité de trouver la particule dans tout l'espace est 1 :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP = \mathbb{P}(x \in \mathbb{R}) = 1 \quad \text{donc} \quad \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1.$$

3. ρ est une densité de probabilité de présence de la particule.
On peut alors définir un vecteur $\vec{j}$ densité de courant de probabilité tel que $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{j}) = 0$

ou à une dimension : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.$

4. Une particule est dite non relativiste si sa vitesse est faible devant la vitesse de la lumière, ou si son énergie est faible devant mc^2 : $E \ll mc^2$. L'équation de Schrödinger s'écrit :
$$i\hbar f'(t)\,\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} f(t)\,\varphi''(x)$$
Ou encore
$$\underbrace{i\hbar \frac{f'(t)}{f(t)}}_{\text{indépendant de } x} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}}_{\text{indépendant de } t} = c^{ste} = E$$
D'où $f(t) \propto e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ et $\varphi''(x) + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) = 0$ ...

5. D'où $\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ avec $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

Alors : $\Psi(x,t) = A e^{i(kx-\omega t)} + B e^{-i(kx+\omega t)}$ où $\begin{cases} \omega = \frac{E}{\hbar} \\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \end{cases}$

On a $|\Psi|^2 = |A|^2 + |B|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}(AB^* e^{2ikx})}_{\text{terme sinusoïdal de moyenne nulle}}$

Donc la condition de normalisation est impossible à satisfaire. Mais $\Psi(x,t)$ est la somme de deux ondes progressives se propageant selon $\pm\vec{e_x}$

6. On définit, dans le cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants, $\vec{k} = k\vec{e_x}$. Alors :

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad \text{et} \quad \vec{k} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\vec{e_x}$$

D'où : $\vec{p} = \hbar\vec{k}$: il s'agit de la relation de De Broglie écrite sous une autre forme ($\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$).

II - Effet tunnel

7. Étant donné que $E < V_0$, il va rebondir et partir dans le sens des x décroissants en conservant sa vitesse.

8. L'équation indépendante du temps s'écrit désormais :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\varphi(x) = E\varphi(x).$$

Dans les régions I et III c'est celle de la particule libre et on obtient :

$$\begin{cases} \varphi_I(x) = A_I e^{ikx} + B_I e^{-ikx} \\ \varphi_{III}(x) = A_{III} e^{ikx} + B_{III} e^{-ikx} \end{cases}$$

Aucune onde ne vient de $x \to +\infty$ donc $B_{III} = 0$.

9. Dans la région II : $\varphi''(x) - q^2\varphi(x) = 0$ où $q = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

On en déduit que $\varphi_{II}(x) = A_{II} e^{qx} + B_{II} e^{-qx}$.

10. La discontinuité de potentiel étant finie, la fonction d'onde et sa dérivée spatiale sont continues en $x = 0$ et $x = a$.

On a ainsi 4 équations :

$$\begin{cases} A_I + B_I = A_{II} + B_{II} & \text{en } x = 0 \\ ik(A_I - B_I) = q(A_{II} - B_{II}) & \\ A_{II} e^{qa} + B_{II} e^{-qa} = A_{III} e^{ika} + B_{III} e^{-ika} & \text{en } x = a \\ q(A_{II} e^{qa} - B_{II} e^{-qa}) = ik(A_{III} e^{ika} - B_{III} e^{-ika}) & \end{cases}$$

Pour trouver complètement ψ, en principe il faut utiliser la condition de normalisation mais ici cela ne fonctionnera pas : on peut fixer A_I ce qui revient à fixer la densité de courant de probabilité incidente.

11. On a $j = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\left(\varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ car $|f(t)|^2 = 1$

$$j_I = \frac{\hbar}{m} \mathrm{Im}\Big(|A_I|^2 \cdot ik + |B_I|^2(-ik) + A_I^* B_I (-ik) e^{-ikx} + A_I B_I^* (ik) \cdot e^{ikx}\Big)$$

$$= \frac{\hbar k}{m}\left(|A_I|^2 - |B_I|^2\right)$$ (les deux derniers termes s'additionnent pour former un réel).

C'est la différence du courant incident $\frac{\hbar k}{m}|A_I|^2$ et du courant réfléchi $\frac{\hbar k}{m}|B_I|^2$.

Et de même $j_{III} = \frac{\hbar k}{m}|A_{III}|^2$: c'est le courant transmis.

On en déduit : $R = \frac{|B_I|^2}{|A_I|^2}$ et $T = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2}$.

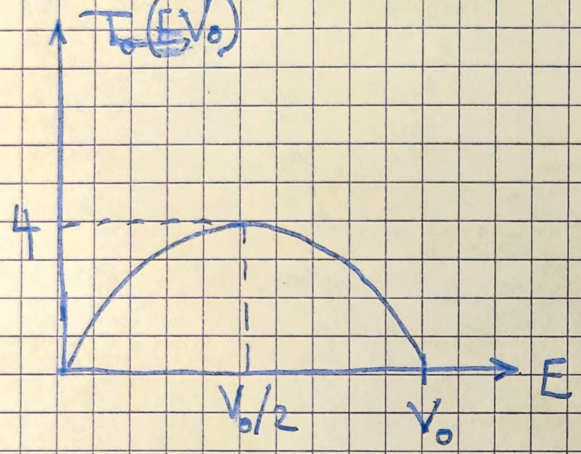
12. On a :

a	0.5 nm	1 nm	2 nm
qa	2,6	5,1	10,3
T	$2,2 \cdot 10^{-2}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-9}$

La barrière est dite épaisse lorsque qa est tel que $e^{qa} \gg 1$.

Alors $\operatorname{sh}(qa) \simeq \frac{1}{2} e^{qa} \gg 1$ et $T \simeq \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} e^{-2qa}$

ou encore $T \simeq T_0(V_0, E)\, e^{-2qa}$ où $T_0(V_0, E) = \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}$.



$T_0(E,V_0)$ est d'ordre 1 donc $\ln T_0(E,V_0)$ est proche de 0 (à l'unité près) et :

$$\ln(T) \simeq -2qa$$

si qa est de plusieurs unités.

III - Radioactivité α

13. On a répulsion entre la particule α de charge $+2e$ et le reste du noyau de charge $+(Z-2)e$ d'où :

$$K = 2(Z-2)e^2.$$

Alors : $V_0 = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_0} = 74 \text{ MeV}$.

Et $E = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 x_m}$ d'où $x_m = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\varepsilon_0 E} = 6{,}5 \cdot 10^{-14}\,m$

La barrière d'énergie à franchir a donc une épaisseur :

$$a \simeq x_m - x_0 = 6{,}1 \cdot 10^{-14}\,m.$$

Et : $q = \frac{\sqrt{2m_\alpha E}}{\hbar}$ d'où $qa \simeq 54$ ainsi $e^{qa} \gg 1$

et on peut considérer que la barrière est épaisse.

14. On peut supposer que $T(x+dx)$ est la probabilité de transmission jusqu'à x multipliée par celle entre x et $x+dx$

ainsi : $$T(x+dx) \simeq T(x) \times T_0(E, V(x))\, e^{-2q\,dx}$$

Ou encore : $$\ln(T(x+dx)) \simeq \ln(T(x)) + \underbrace{\ln(T_0(E,V(x)))}_{\text{négligeable}} - 2q\,dx$$

$$\simeq \ln(T(x)) - \frac{2}{\hbar}\sqrt{2m_\alpha(V(x)-E)}\,dx$$

On obtient en intégrant : $$\ln(T) = -\frac{2}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{2m_\alpha\left(\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 x}-E\right)}\,dx$$

15. On a $$\ln(T) = -\frac{2\sqrt{2m_\alpha E}}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E x}-1}\,dx$$

$$= -\frac{2\sqrt{2m_\alpha E}}{\hbar}\int_{x_0}^{x_m}\sqrt{\frac{x_m}{x}-1}\,dx$$

$$\simeq -\frac{2\sqrt{2m_\alpha E}}{\hbar}\, x_m\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{\frac{x_0}{x_m}}\right)$$

$$\simeq -\frac{2\sqrt{2m_\alpha E}}{\hbar}\cdot\frac{K}{4\pi\varepsilon_0 E}\left(\frac{\pi}{2}-2\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 E x_0}{K}}\right)$$

$$\simeq a - \frac{b}{\sqrt{E}}$$

où $a = \sqrt{\frac{8m_\alpha K x_0}{\pi\varepsilon_0\hbar^2}}$ et $b = \frac{\sqrt{2m_\alpha}\,K}{4\varepsilon_0\hbar}$

16. On a $t_m = \frac{2x_0}{v} = \frac{2x_0}{\sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}}} = x_0\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}$.

Le nombre moyen de rebonds par seconde est $n = \frac{1}{t_m} = \frac{1}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}}$

et la probabilité d'émission est $dp = \underbrace{n\,dt}_{\text{nombre de rebonds}} \times T = \frac{T}{x_0}\sqrt{\frac{E}{2m_\alpha}}$.

On a alors $dp = \frac{T\,dt}{t_m}$. Le temps de demi-vie est tel que $p(t_{1/2}) = \frac{1}{2}$ or $\frac{dp}{dt} = -\frac{T}{t_m} \Rightarrow p(t) = e^{-\frac{Tt}{t_m}}$ et donc

$$\tau_{1/2} = \frac{t_m \ln(2)}{T}$$

D'où $\ln(\tau_{1/2}) = \underbrace{\ln(t_m \ln 2)}_{\simeq c^{ste}} - \ln T \simeq c^{ste} + \frac{b}{\sqrt{E}}$

17. On observe bien une droite. Sa pente théorique est

$$b = \frac{\sqrt{2m_\alpha} \cdot 2(Z-2)e^2}{4\varepsilon_0 \hbar \underbrace{\ln(10)}_{\text{à cause du } \log_{10}}} = \frac{(Z-2)e^2\sqrt{m_\alpha}}{\varepsilon_0 \hbar \sqrt{2} \ln 10} = 155 \text{ MeV}^{1/2}$$

Or on mesure $b = \frac{16-0}{0{,}49-0{,}37} = 133 \text{ MeV}^{1/2}$: on est relativement proche de la prédiction avec ce modèle très simplifié.

Par ailleurs on constate que la pente b augmente avec Z comme prédit par le modèle.