

Electrostatique

Chapitre 3

Avec solutions

I - Lignes de champ et équipotentielles

1 Lecture de cartes de lignes de champ ♥★

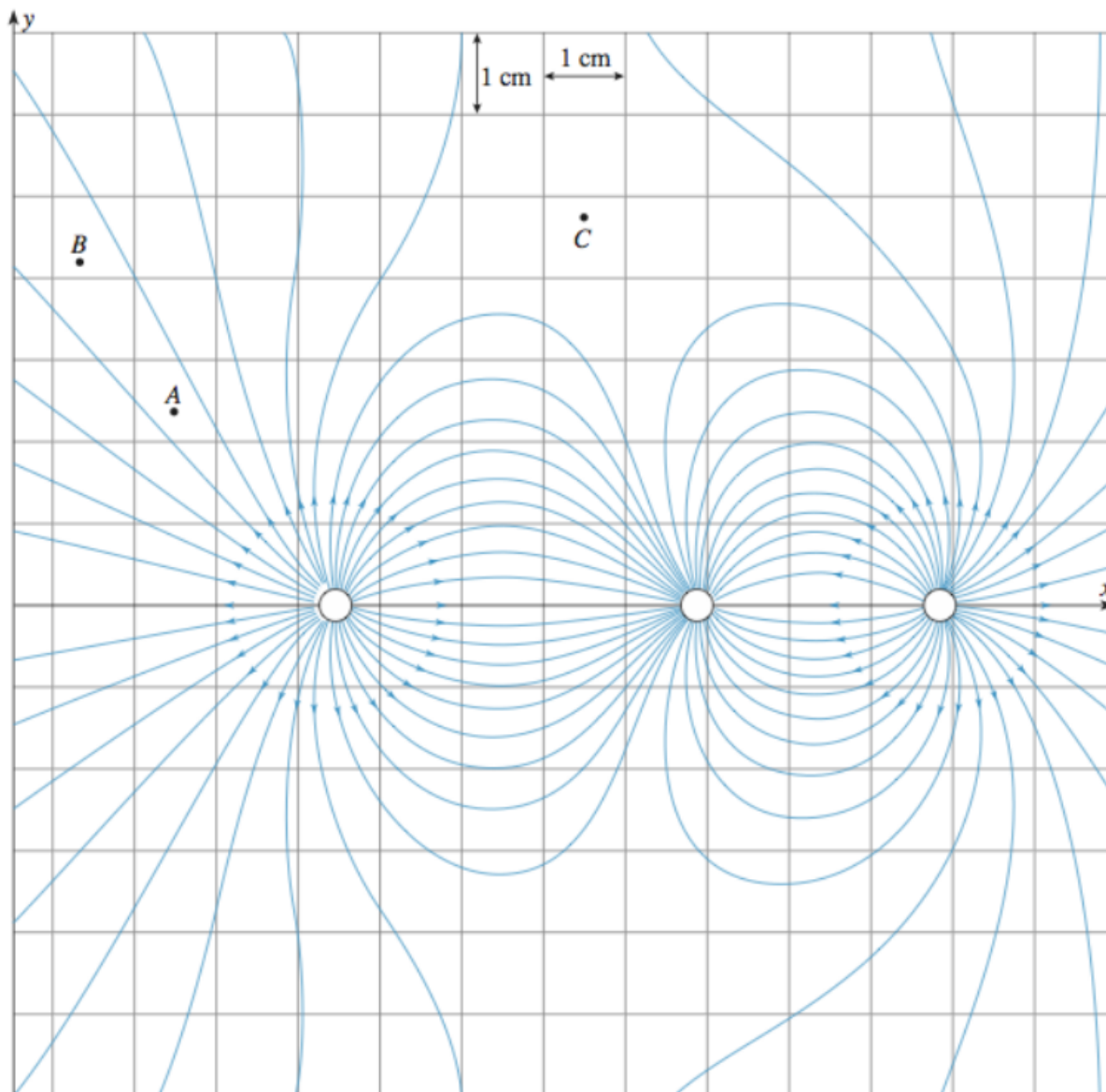


Figure 1: Lignes de champ créées par trois fils uniformément chargés perpendiculaires au plan de la figure.

1. On considère la carte de lignes de champ donnée en figure 1, produite par trois fils uniformément chargés.

(a) Où sont les plans de symétrie de la distribution ?

- Le plan (xOy) (plan de la figure) est un plan de symétrie de la distribution ainsi que tous les plans qui lui sont parallèles.
- Le plan (xOz) est plan de symétrie de la distribution.

(b) Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?

De gauche à droite : $\lambda_1 > 0$; $\lambda_2 < 0$; $\lambda_3 > 0$ (les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives).

(c) Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?

En construisant une surface Σ qui englobe les trois fils, on voit que le champ électrique sort de cette surface, donc :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$$

Par le théorème de Gauss on en déduit $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$.

(d) La norme du champ électrique en A est de $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer une valeur approchée du champ en B.

La région entre A et B est vide de charges, donc il y a conservation du flux. En notant l_A et l_B l'espacement entre deux lignes de champ au niveau de ces deux points, on a donc $\|\vec{E}(A)\|l_A \approx \|\vec{E}(B)\|l_B$. On mesure $l_B \approx 2l_A$ d'où :

$$\|\vec{E}(B)\| \approx \frac{1}{2} \|\vec{E}(A)\| \approx 50 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$$

(e) Que peut-on dire du champ électrique au voisinage du point C ?

Au point C, les lignes de champ sont très éloignées donc l'intensité du champ est faible : $\|\vec{E}(C)\| \approx 0$.

2. On considère maintenant la carte de lignes de champ donnée en figure 2, produite par cinq charges **ponctuelles**. Toutes les charges sont situées dans le plan du dessin. Les lignes en noir sont aussi des lignes de champ. On numérote q_1 à q_5 les charges de gauche à droite.

(a) En supposant que $\sum_i q_i < 0$, déterminer les signes des cinq charges et orienter les lignes de champ.

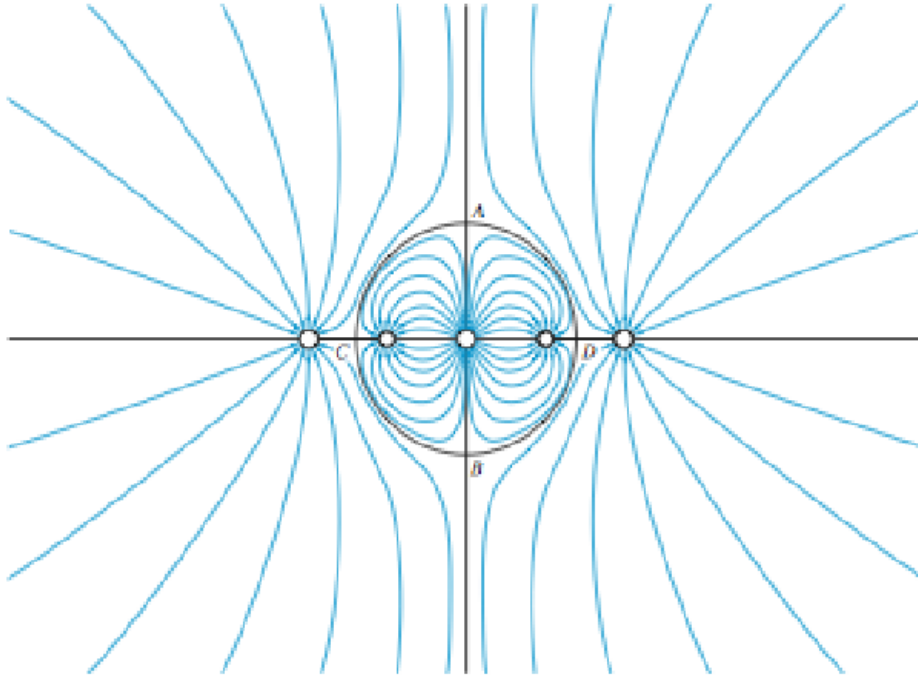


Figure 2: Lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles dans le plan de la figure.

Les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives. De plus, par un raisonnement analogue à Q1c, $\sum_i q_i < 0$ implique que les lignes de champ les plus éloignées sont orientées vers l'intérieur. Ceci permet d'orienter toutes les lignes de champ et on en déduit que $q_1, q_2, q_4, q_5 < 0$ et $q_3 > 0$.

- (b) Indiquer et justifier la position des points de champ nul.

Les points de champ nul sont les points où la direction du champ n'est pas définie, c'est-à-dire les points d'intersection des lignes de champ : A, B, C et D .

- (c) A l'aide des symétries du problème, trouver deux relations entre q_1, q_2, q_4 et q_5 .

Le plan passant par A et B et perpendiculaire au plan de la figure est un plan de symétrie de la distribution de charges, car c'est un plan de symétrie de $\vec{E}$. On en déduit $q_1 = q_5$ et $q_2 = q_4$.

- (d) En utilisant le théorème de Gauss, trouver une relation entre q_2 et q_3 .

On applique le théorème de Gauss à la sphère centrée sur q_3 et de diamètre $d = AB = CD$. Le champ $\vec{E}$ est en tout point de la sphère tangentiel à la sphère donc :

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{q_2 + q_3 + q_4}{\epsilon_0}$$

D'où $q_2 + q_3 + q_4 = 0$. Or on sait que $q_2 = q_4$ donc :

$$\boxed{2q_2 + q_3 = 0}$$

II - Applications du théorème de Gauss

2 Cylindre uniformément chargé ♥♥ ★

On considère un fil chargé se situant le long de l'axe (Oz). Le fil porte une charge q , a un rayon r_0 et une longueur L .

1. Proposer un modèle de distribution de charges dans le fil. Donner les propriétés de symétrie et d'invariance de cette distribution.

On propose une densité volumique de charges uniforme dans le cylindre :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{fil}}} = \frac{q}{\pi r_0^2 L}$$

où V_{fil} est le volume du fil.

Les plans contenant (Oz) sont tous des plans de symétrie de la distribution de charges, ainsi $\vec{E}$ est contenu dans tous ces plans et on en déduit :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{e}_r + E_z(r, \theta, z)\vec{e}_z$$

De plus la distribution est invariante par rotation autour de Oz donc E_r et E_z ne dépendent pas de θ .

2. On s'intéresse au champ proche du fil (la distance au fil est petite devant la longueur du fil). Quelle approximation peut-on faire pour simplifier le problème ? Quelle invariance cela ajoute-t-il au problème ?

Dans ce cas, on peut supposer que le fil est infiniment long. Alors, en tout point M de l'espace, le plan passant par M et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie de la distribution, donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan et $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = 0$, ainsi : $\vec{E}(M) = E_r(r, z)\vec{e}_r$.

Enfin, le problème devient invariant par translation selon Oz et : $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{e}_r}$.

3. Dans le cadre de cette approximation, calculer le champ électrique dans le fil et autour du fil dans un repère approprié.

On choisit comme surface fermée un cylindre de rayon r et de hauteur H , d'axe Oz . Le flux du champ électrique à travers les faces supérieure et inférieure du cylindre est nul, et le flux à travers Σ est donc égal au flux à travers la face latérale :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r H E(r)$$

On distingue deux cas :

- Cas 1 : $r > r_0$. Alors $Q_{\text{int}} = \rho \times \pi r_0^2 H$. Or par le théorème de Gauss $\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ et donc :

$$E(r) = \frac{\rho \pi r_0^2 H}{\epsilon_0 \times 2\pi r H} = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}$$

Ainsi à l'extérieur du fil :

$$\boxed{\vec{E}(r > r_0) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r_0^2}{r} \vec{e}_r}$$

- Cas 2 : $r < r_0$. Alors $Q_{\text{int}} = \rho \times \pi r^2 H$. On a donc désormais :

$$E(r) = \frac{\rho \pi r^2 H}{\epsilon_0 \times 2\pi r H} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Ainsi à l'intérieur du fil :

$$\boxed{\vec{E}(r < r_0) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r \vec{e}_r}$$

4. Que peut-on dire de particulier concernant le champ électrique à l'extérieur du fil ?

On peut remarquer que $\rho r_0^2 = \frac{q}{\pi L}$. Cette quantité ne dépend pas de r_0 et donc le champ électrique à l'extérieur du fil est le même que si le fil était infiniment fin (toute la charge est concentrée sur l'axe Oz).

5. Dans le cas d'un fil infiniment fin ($r_0 \rightarrow 0$), on définit la densité linéique de charge :

$$\lambda = \frac{dq}{dL} \quad (1)$$

Ici, elle est uniforme et vaut donc $\lambda = q/L$. Donner l'expression du champ à l'extérieur du fil en fonction de λ .

Ici, $\lambda = \frac{q}{L}$ car λ est uniforme, et donc $\rho = \frac{\lambda}{\pi r_0^2}$. On en déduit que :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

(Rq : le cas $r < r_0$ n'est plus à considérer puisque $r_0 = 0$)

3 Condensateur cylindrique ♥★★

La plupart des condensateurs que vous observez en TP ne sont pas plans mais cylindriques : cela permet de minimiser les effets de bord. Nous étudions donc ici un condensateur cylindrique. On considère deux cylindres métalliques C_1 et C_2 de même axe (Oz), de même hauteur h et de rayon r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2 \ll h$. Les cylindres portent des charges réparties uniformément en surface. La charge totale sur C_1 est $+Q$ et celle sur C_2 est $-Q$. Déterminer la capacité C de ce condensateur cylindrique.

Cet exercice nécessite une certaine prise d'initiative en procédant étape par étape. On pourra s'inspirer des étapes utilisées dans le cours pour déterminer la capacité d'un condensateur plan. On rappelle que la capacité est définie par $Q = CU$ où U est la différence de potentiel entre les deux armatures.

On veut déterminer la différence de potentiel entre les deux cylindres. Pour cela, on cherche le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures. On modélise la distribution de charges par une répartition surfacique uniforme des charges sur chaque cylindre. Ainsi les densités surfaciques de charges associées aux cylindres C_1 et C_2 seront respectivement :

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi r_1 h} \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -\frac{Q}{2\pi r_2 h}$$

Par ailleurs, on supposera le cylindre infini : $h \gg r_1, r_2$.

Etude des symétries :

Soit un point M quelconque situé entre les armatures. On se place dans le système de coordonnées cylindriques autour de l'axe Oz . Alors :

- Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ est dans ce plan et $\vec{E}(M) \perp \vec{e}_\theta$.
- Le cylindre étant supposé infini, le plan passant par M et perpendiculaire à Oz est plan de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ est dans ce plan, et on en conclut que $\vec{E}(M) \perp \vec{e}_z$.

Donc $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$.

Etude des invariances :

Le problème est invariant par translation selon Oz et par rotation autour de l'axe Oz , donc les composantes de $\vec{E}$ sont indépendantes de z et de θ . On conclut que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$.

Théorème de Gauss :

On construit une surface Σ qui est un cylindre de hauteur h et de rayon r (avec $r_1 < r < r_2$). Alors le flux du champ électrique à travers cette surface est donné par :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r)$$

De plus, la charge intérieure est $Q_{\text{int}} = Q$. Par le théorème de Gauss : $\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$. On en déduit :

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r h}$$

Calcul de la différence de potentiel :

La différence de potentiel entre les armatures s'obtient par intégration du champ électrique le long d'un chemin reliant les armatures, noté Γ :

$$U = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_2 - V_1$$

On prend pour Γ un segment orienté selon $\vec{e}_r$, ainsi $d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r$ et on a :

$$U = - \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = - \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

La capacité du condensateur relie la charge et la tension par la relation $Q = CU$ (en valeur absolue), ainsi :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

4 Effet Faraday ♥ ★

Dans le cours, nous avons étudié le cas d'une sphère uniformément chargée en volume, de rayon r_0 et de charge Q . Nous supposons que la sphère est conductrice.

1. Rappeler l'expression du champ électrique dans la sphère obtenue en cours. Sous l'action du champ électrique, les charges restent-elles immobiles ? Expliquer alors pourquoi il est plus réaliste de considérer une sphère chargée en surface.

Nous avons vu que dans la sphère : $\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$.

Supposons que la sphère contient des charges positives ($Q > 0$), alors elles subissent une force $\vec{F} = q\vec{E}$ orientée selon $+\vec{e}_r$ et s'éloignent donc pour s'accumuler à la surface de la sphère. Si les charges sont négatives ($Q < 0$), alors $q < 0$ mais $\vec{E}$ est orienté selon $-\vec{e}_r$ donc les charges se déplacent également vers la surface de la sphère.

2. On suppose maintenant que la densité volumique de charges est nulle dans la sphère, et que les charges sont accumulées à la surface avec une densité surfacique uniforme σ que l'on exprimera.

On peut donc supposer que la sphère est uniformément chargée en surface avec $\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$, où $4\pi r_0^2$ est la surface de la sphère.

3. (a) Calculer le champ électrique produit par cette sphère.

On commence par étudier les symétries, et pour cela on se place dans le système de coordonnées sphériques centré sur la sphère. Soit M un point quelconque de l'espace, tous les plans contenant (OM) sont plans de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}$ est contenu dans tous ces plans et donc le champ électrique est radial.

De plus, on a invariance de la distribution de charges par rotation d'angle θ et φ donc les composantes de $\vec{E}$ ne dépendent pas de ces angles, ainsi $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On définit Σ une sphère de rayon r . Le flux de $\vec{E}$ à travers Σ est :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

De plus par le théorème de Gauss : $\phi = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$.

- Si $r < r_0$ alors $Q_{\text{int}} = 0$ et $E(r) = 0$;
- Si $r > r_0$ alors $Q_{\text{int}} = Q$ et $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

On conclut :

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{si } r > r_0 \end{cases}$$

- (b) Que peut-on dire du champ en dehors de la sphère ?

Si $r > r_0$, alors le champ est le même que si on avait une charge ponctuelle $+q$ en O .

- (c) Que peut-on dire du champ à l'intérieur de la sphère ? On dit que la sphère est une cage de Faraday.

Si $r < r_0$ le champ est nul : il n'y a aucun champ électrique à l'intérieur de la sphère conductrice chargée en surface. C'est l'effet "cage de Faraday".

L'effet Faraday fonctionne pour n'importe quel surface fermée conductrice. Il est utile pour se protéger des impacts du champ électrostatique. Par exemple, sous un orage violent, on peut se placer à l'intérieur d'un véhicule métallique pour se protéger du risque de foudre. Les appareils d'IRM sont également entourés d'une cage de Faraday pour isoler la pièce du champ électrique extérieur pouvant interférer avec les ondes de radiofréquence émises par le générateur d'ondes radio.

5 Modèle d'un atome ★★

Dans le cours nous avons vu que la sphère uniformément chargée en volume était un bon modèle pour un noyau atomique. Maintenant nous allons nous intéresser au modèle d'un atome entier (et pas seulement de son noyau). On serait tenté d'utiliser une somme de potentiels créés par des charges ponctuelles. Cependant, le grand nombre de charges, et le mouvement des charges autour de l'atome dans les couches électroniques, rend ce modèle complexe. Nous adoptons donc plutôt adopter une description continue d'un nuage électronique.

On utilise pour cela le potentiel électrostatique de Yukawa :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (2)$$

où A et a sont deux constantes, et r est la distance au noyau. Dans cet exercice, nous allons chercher à mieux comprendre pourquoi ce modèle de potentiel est approprié.

- (a) En étudiant les cas $r \ll a$ et $r \gg a$, proposer une interprétation physique de a .

Si $r \gg a$ alors $V(r) \rightarrow 0$. Si $r \ll a$ alors $V(r) \approx \frac{A}{r}$, ce qui correspond au potentiel créé par une charge ponctuelle positive. On en déduit qu'on a une charge positive concentrée en $r \ll a$ et qu'on a une charge moyenne nulle aux échelles $r \gg a$. a est donc la taille du nuage électronique de l'atome (le noyau se trouve en $r \ll a$).

- (b) En utilisant l'un de ces cas limites, donner l'expression de A en fonction du numéro atomique de l'atome Z et d'autres constantes fondamentales.

Pour $r \ll a$, le noyau peut être considéré comme une charge ponctuelle $Q_{\text{noyau}} = +Ze$ en $r = 0$ et on néglige la présence du nuage électronique. On a alors :

$$V(r) = \frac{Q_{\text{noyau}}}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{A}{r}$$

Par identification, on en déduit que $A = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}$.

- (c) Pour l'atome d'hydrogène, on donne $E(r = a) = 10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$. En déduire la valeur de a . Commenter.

Pour l'atome d'hydrogène $Z = 1$. De plus :

$$E(r = a) = -\frac{\partial V}{\partial r}(r = a) \quad (3)$$

$$= -\frac{A}{r^2}e^{-\frac{r}{a}} - \frac{A}{ra}e^{-\frac{r}{a}} \quad (4)$$

$$= -2\frac{A}{a^2}\exp(-1) \quad (5)$$

$$= -\frac{e \times \exp(1)}{2\pi\epsilon_0 a^2} \quad (6)$$

(Rq : on note $\exp(1) = 2.718$ pour éviter la confusion avec la charge élémentaire e .)

On en déduit que :

$$a = \sqrt{\frac{e \exp(1)}{2\pi\epsilon_0 E(r = a)}} \approx 2.7 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

a est bien de l'ordre de l'Angström comme attendu pour un atome.

2. Nous allons maintenant analyser le champ électrique créé par ce potentiel.

- (a) Calculer le champ $\vec{E}$ qui dérive du potentiel $V(r)$. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(F(r)) = \frac{\partial F}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}\vec{e}_\phi \quad (7)$$

On a $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r$. Ainsi :

$$\vec{E} = \left(\frac{A}{r^2}e^{-r/a} + \frac{A}{ra}e^{-r/a} \right) \vec{e}_r = \frac{A}{r} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a} \right) e^{-r/a} \vec{e}_r$$

- (b) En déduire le flux $\Phi(r)$ du champ électrique à travers une sphère de rayon r . Commenter les cas $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow \infty$.

On en déduit le flux sortant d'une sphère de rayon r :

$$\phi = 4\pi r^2 \vec{E} \cdot \vec{e}_r = 4\pi A \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

Or on a vu que $4\pi A = \frac{Ze}{\epsilon_0}$ donc $\phi = \frac{Ze}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$. On a alors :

- $\phi(r=0) = \frac{Ze}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{noyau}}}{\epsilon_0}$ conformément au théorème de Gauss ;
- $\phi(r \rightarrow \infty) = 0 = \frac{Q_{\text{atome}}}{\epsilon_0}$ puisque l'atome est globalement neutre.

- (c) Dans le cas où $r \sim a$, on parle d'écrantage partiel de la charge du noyau par le nuage électronique. Justifier cette terminologie.

Dans le cas $r \sim a$ on a $0 \leq \phi \leq \frac{Q_{\text{noyau}}}{\epsilon_0}$. Le nuage électronique "écran" une partie du flux du champ électrique entre 0 et r car sa charge négative compense partiellement la charge $+Ze$ du noyau.

3. On cherche maintenant à exprimer la densité volumique $\rho(r)$ dans ce modèle de l'atome pour caractériser le nuage électronique. On note pour commencer $Q(r)$ la charge comprise à l'intérieur de la sphère de rayon r .

- (a) Déterminer $Q(r)$.

On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r : $\phi(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$. On en déduit :

$$Q(r) = Ze \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a}$$

- (b) Exprimer la quantité de charge $dQ = Q(r+dr) - Q(r)$ comprise entre les rayons r et $r+dr$. Tracer son allure et l'interpréter. Où se trouvent la majorité des électrons du nuage électronique ? Cela est-il compatible avec l'interprétation physique de a qui a été proposée ?

$$dQ = \frac{dQ}{dr} dr = Ze dr \times \left(\frac{1}{a} e^{-r/a} - \frac{1}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) e^{-r/a} \right)$$

Ainsi on a $dQ = -Ze \frac{r dr}{a^2} e^{-r/a}$.

Il s'agit d'une fonction négative, nulle à l'origine et en $r \rightarrow \infty$ et avec un minimum

en $r = a$. Elle indique la répartition des charges négatives du nuage électronique autour du noyau, et on constate que la charge négative est concentrée autour de $r = a$. a correspond donc bien au rayon caractéristique du nuage électronique.

6 Profil de masse volumique dans la Terre ♥★

On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre O , de rayon $R_T = 6380$ km et de masse totale $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg.

1. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel. Donner les analogues électrostatiques des variables apparaissant dans la formule.

Soit S une surface fermée, alors le flux du champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}$ à travers cette surface est relié à la masse totale M_{int} contenue à l'intérieur par la relation suivante :

$$\oiint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où G est la constante de gravitation universelle. Les analogies sont les suivantes :

$$\vec{\mathcal{G}} \leftrightarrow \vec{E} \quad M \leftrightarrow Q \quad G \leftrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

2. On considère dans un premier temps la masse uniformément répartie. Montrer que le champ gravitationnel est de la forme $\vec{\mathcal{G}}(r) = -g(r)\vec{e}_r$. Calculer et représenter $g(r)$ en fonction de r . Que peut-on dire du cas $r > R_T$?

Soit M un point de l'espace. On se place dans le repère de coordonnées sphériques centré en O . Tous les plans passant par (OM) sont des plans de symétrie de la distribution de masse donc $\vec{\mathcal{G}}$ est contenu dans tous ces plans et on peut écrire :

$$\vec{\mathcal{G}} = -g(r, \theta, \varphi)\vec{e}_r$$

(on met un signe - par convention, car on sait que le champ est orienté vers l'intérieur). De plus, le problème est invariant par rotation d'angle θ et φ , on en déduit que $\vec{\mathcal{G}} = -g(r)\vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss gravitationnel à une sphère de rayon r :

$$\oiint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{\text{int}}$$

On disting deux cas :

- Si $r \leq R_T$ alors $M_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Or $\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$. On en déduit $M_{\text{int}} = M_T \frac{r^3}{R_T^3}$, ainsi :

$$g(r) = \frac{GM_T}{R_T^2} \cdot r R_T$$

- Si $r \geq R_T$ alors $M_{\text{int}} = M_T$ et :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

3. Retrouver la valeur g_0 du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

A la surface de la Terre, $r = R_T$ et on a donc $g_0 = g(r = R_T) = \frac{GM_T}{R_T^2}$.

4. En réalité la répartition de masse n'est pas uniforme : le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure ci-dessus, où R_N est le rayon du noyau de la Terre. On suppose maintenant que la densité volumique de charges $\rho(r)$ dépend de r .

- (a) Appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon r .

La masse intérieure est maintenant obtenue en découpant la Terre en coquilles sphériques de rayon r , d'épaisseur dr et de masse volumique $\rho(r)$. Chacune de ces coquilles a un volume $4\pi r^2 dr$, et donc une masse $dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$. Ainsi, la masse intérieure au rayon r donne :

$$M_{\text{int}} = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

On en déduit : $g(r) = \frac{G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$.

- (b) En dérivant le résultat par rapport à r , déterminer la répartition de masse volumique $\rho(r)$ au sein de la Terre et tracer son allure. Commenter.

On peut réécrire cette équation $r^2 g(r) = G \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$. En dérivant on obtient :

$$r^2 g'(r) - 2r g(r) = G r^2 \rho(r)$$

Ou encore :

$$\rho(r) = \frac{1}{G} \left(g'(r) + \frac{2}{r} g(r) \right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si $r \leq R_N$: alors $g(r) = g_0 \frac{r}{R_N}$ et $g'(r) = \frac{g_0}{R_N}$. On a :

$$\rho(r) = \frac{3g_0}{GR_N} = \text{cste}$$

Il s'agit du noyau terrestre qui a une masse volumique uniforme.

- Si $R_N \leq r \leq R_T$: alors $g(r) = g_0$ et $g'(r) = 0$. On a donc :

$$\rho(r) = \frac{2g_0}{Gr}$$

La masse volumique diminue lorsqu'on s'éloigne du centre de la Terre, ce qui correspond au manteau terrestre.

- Si $r > R_T$ alors $g(r) = \frac{K}{r^2}$ où K est une constante. On a ainsi $g'(r) = -2\frac{K}{r^3}$ et donc $g'(r) + \frac{2}{r}g(r) = 0$. Ainsi $\rho(r) = 0$ ce qui est cohérent : on est bien à l'extérieur de la Terre.

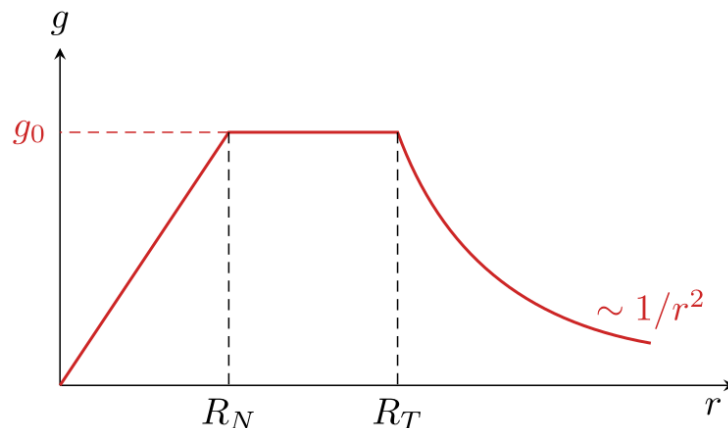


Figure 3: Accélération de la pesanteur terrestre en fonction de la distance au centre de la Terre. Source : ploy de TD de Etienne Thibierge.

7 Démonstration du théorème de Gauss pour une sphère ★★★

On cherche à démontrer le théorème de Gauss dans le cas particulier d'une surface fermée sphérique. On considère une sphère Σ de rayon R . On se place en coordonnées sphériques de centre O (qui coïncide avec le centre de la sphère) et d'axe Oz .

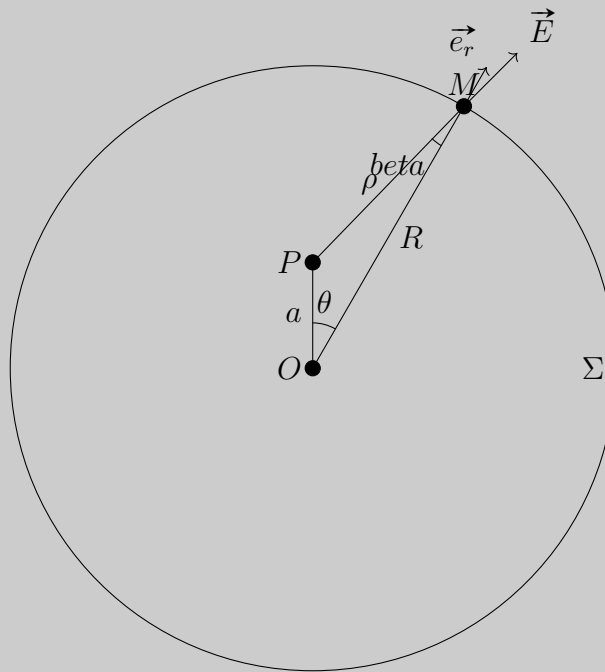
1. On suppose qu'une charge ponctuelle q se situe au niveau d'un point P situé à une distance a du centre de la sphère. On note $\alpha = \frac{a}{R}$.

- (a) Justifier que l'on peut considérer sans perte de généralité que la charge se situe sur l'axe Oz .

La sphère n'a pas de direction privilégiée, on peut donc choisir d'orienter l'axe Oz dans la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{OP}$.

- (b) Soit $M(R, \theta, \varphi)$ un point de la surface de la sphère. Exprimer la distance $\rho = PM$ en fonction de a, R et θ .

On réalise un schéma de la situation :



Alors :

$$\rho^2 = ||R\vec{e}_r - a\vec{e}_z||^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta$$

d'où :

$$\boxed{\rho = \sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}}$$

- (c) On définit l'angle $\beta = (\vec{E}(M), \vec{e}_r)$. Exprimer $\cos \beta$ en fonction de R, a et θ .

On a de la même manière :

$$a^2 = \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos \beta$$

On remplace ρ^2 par son expression et on en déduit que :

$$\boxed{\cos \beta = \frac{R - a \cos \theta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta}}}$$

- (d) En déduire que le flux du champ électrique à travers Σ s'exprime en fonction de l'intégrale suivante :

$$I(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{1 - \alpha t}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha t)^{3/2}} dt \quad (8)$$

L'élément de surface au point M est donné par :

$$d\vec{S} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

Par ailleurs :

$$||\vec{E}(M)|| = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\rho^2}$$

et $\beta = (\vec{E}(M); \vec{e}_r)$. Ainsi le flux élémentaire à travers la surface $d\vec{S}$ vaut :

$$d\Phi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} ||\vec{E}|| \cdot ||d\vec{S}|| \cos \beta \quad (9)$$

$$= \frac{qR^2}{4\pi_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\cos \beta}{\rho^2} \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \quad (10)$$

$$= \frac{qR^2}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{R - a \cos \theta}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta \quad (11)$$

$$= \frac{q}{2\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{1 - \alpha \cos \theta}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \theta)^{3/2}} \sin \theta d\theta \quad (12)$$

$$= \frac{q}{2\epsilon_0} I(\alpha) \quad (13)$$

où on a réalisé le changement de variable $t = \cos \theta$.

- (e) A l'aide du changement de variable $u = 1 + \alpha^2 - 2\alpha t$, montrer que :

$$I(\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ 2 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases} \quad (14)$$

On rappelle que $|x| = \sqrt{x^2}$.

On a $du = -2\alpha dt$ et :

$$1 - \alpha t = 1 + \alpha \frac{u - (1 + \alpha^2)}{2\alpha} = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2 + u)$$

Ainsi :

$$I(\alpha) = \int_{(1-\alpha)^2}^{(1+\alpha)^2} \frac{1 - \alpha^2 + u}{2u^{3/2}} \cdot \frac{du}{2\alpha}$$

En remarquant que $\int \frac{du}{u^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{u}}$ et $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}$ on obtient :

$$I(\alpha) = \frac{1}{4\alpha} \left[2(\alpha^2 - 1) \left(\frac{1}{|1 - \alpha|} - \frac{1}{|1 + \alpha|} \right) + 2(|1 + \alpha| - |1 - \alpha|) \right] \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{|\alpha - 1| \cdot |\alpha + 1|} + 1 \right] (|1 + \alpha| - |1 - \alpha|) \quad (16)$$

On a toujours $|1 + \alpha| = 1 + \alpha$ et $|1 - \alpha| = 1 - \alpha$ si $\alpha < 1$ et $\alpha - 1$ sinon. On en déduit alors directement le résultat demandé.

(f) En déduire que le théorème de Gauss est vérifié dans ce cas de figure.

Si la charge se trouve à l'intérieur de la sphère, alors $\alpha < 1$ et on a donc $I(\alpha) = 2$. Ainsi $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ et la charge intérieure à la sphère vaut q . Si la charge se trouve à l'extérieur de la sphère, alors $\Phi = 0$ et la charge intérieure à la sphère est nulle. Dans les deux cas, le théorème est bien vérifié.

2. A partir du résultat précédent, démontrer le théorème de Gauss pour une surface Σ sphérique.

Soit Σ une surface sphérique et $\rho(M)$ la distribution de charges dans l'espace. On note $\mathcal{V}$ le volume délimité par Σ .

Soit $d\tau$ un élément de volume centré sur un point M quelconque de l'espace. Ce volume porte une charge $dq = \rho(M)d\tau$ que l'on peut assimiler à une charge ponctuelle placée en M . On note $\delta\vec{E}$ le champ électrique produit par cette charge, et $\delta\Phi$ le flux de ce champ à travers Σ .

Le résultat de Q1 implique que $\delta\Phi = \frac{dq}{\epsilon_0}$ si $M \in \mathcal{V}$ et $\delta\Phi = 0$ sinon.

Par principe de superposition le flux total est donné par l'intégrale suivante calculée dans tout l'espace :

$$\Phi = \iiint \delta\Phi$$

Mais comme $\delta\Phi = 0$ pour tous les points M n'appartenant pas à $\mathcal{V}$ on a :

$$\Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \delta\Phi = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{dq}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iint_{\mathcal{V}} \rho d\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où $Q_{\text{int}} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau$ est la charge intérieure à la sphère. Le théorème de Gauss est donc satisfait.

III - Dipôle électrostatique

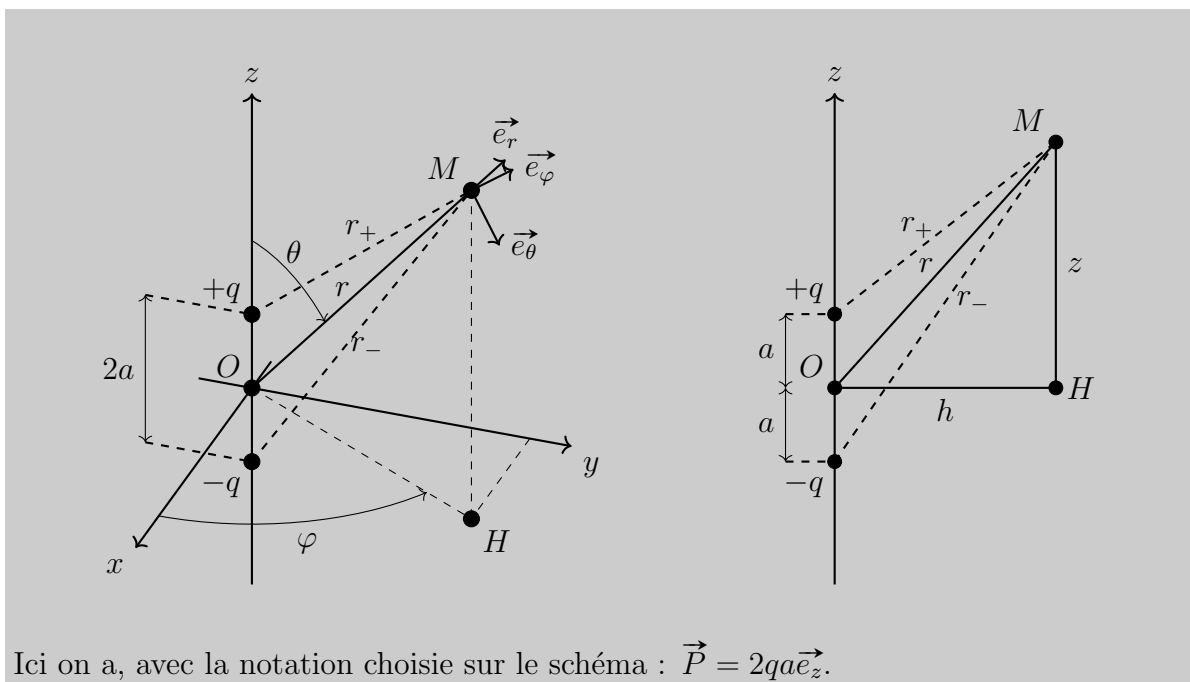
8 Interaction entre deux dipôles ♥ ★

On souhaite modéliser les interactions de Van der Waals entre un dipôle permanent (comme une molécule d'eau) et un dipôle induit (par exemple, une grosse molécule organique). On place un dipôle permanent de moment dipolaire $\vec{p}$ au centre O d'un repère.

1. On se place dans l'approximation dipolaire. Rappeler l'hypothèse correspondante.

On suppose que l'on se place à une distance r grande devant la taille du dipôle. Ici, cela revient à dire que l'espacement entre molécules est grand devant la taille des molécules.

2. Faire un schéma du dipôle placé orienté selon l'axe (Oz) et représenter le repère de coordonnées sphériques.



3. Établir l'expression du potentiel électrique $V(r, \theta)$ créé par un dipôle en fonction notamment de r_+ et r_- .

On a par principe de superposition :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

4. Comment se simplifie l'expression obtenue précédemment dans l'approximation dipolaire ?

Dans le cadre de l'approximation dipolaire :

$$r_+^2 = ||r\vec{e}_r - a\vec{e}_z||^2 \quad (17)$$

$$= r^2 + a^2 - 2ra \cos \theta \quad (18)$$

$$\approx r^2 - 2ra \cos \theta \quad \text{car } a \ll r \quad (19)$$

$$r_-^2 \approx r^2 + 2ra \cos \theta \quad (20)$$

On a donc :

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r \left(1 - 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) \quad (21)$$

$$\frac{1}{r_-} = \frac{1}{r \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta\right)^{1/2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right) \quad (22)$$

On en déduit finalement que $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2a \cos \theta}{r^2}$. Or $||\vec{p}|| = 2qa$ donc :

$$\boxed{V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}}$$

5. En déduire l'expression du champ électrique créé par le dipôle en un point $M(r, \theta, z)$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \quad (23)$$

$$= \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta \quad (24)$$

$$= \boxed{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)} \quad (25)$$

6. Lorsqu'un morceau de matière est soumis à un champ électrique $\vec{E}$, il se polarise et acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha\vec{E}$, où α est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ $\vec{E}$ du dipôle permanent décrit précédemment. Justifier que l'énergie d'interaction de Van der Waals dite dipôle-dipôle induit entre ces deux dipôles (l'un placé en O , l'autre en M) puisse se mettre sous la forme :

$$U = -\frac{C}{r^6} \quad (26)$$

L'énergie potentielle électrique d'un dipôle $\vec{p}$ placé dans un champ $\vec{E}$ est $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.
On a donc ici :

$$E_p = -\alpha \vec{E}^2 = -\frac{\alpha p^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 r^6} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

On trouve bien $E_p \propto \frac{1}{r^6}$.

7. C dépend-elle de l'orientation relative des deux dipôles ? Commenter son signe.

On a :

$$C = \frac{\alpha p^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2} (3 \cos^2 \theta + 1) \geq 0$$

C dépend de θ donc de la position relative des deux dipôles, et le signe de C indique que l'interaction est toujours stabilisatrice : il s'agit d'un des types de liaisons chimiques (liaisons de Van der Waals).

9 Dissolution du cuivre dans l'eau ★★

Nous étudions la dissolution d'ions cuivre (II) dans l'eau. Dans un modèle simplifié, l'ion cuivre Cu^{2+} est hydraté par quatre molécules d'eau placées aux sommets d'un carré de côté a , et centré sur le cation.

1. Dessiner la molécule d'eau, les charges partielles portées par chaque atome, et son moment dipolaire $\vec{p}$.



2. Donner l'expression du champ électrique généré par l'ion Cu^{2+} dans le repère sphérique centré sur l'ion. Représenter les lignes de champ associées sur un schéma.

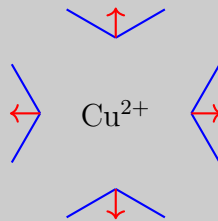
L'ion Cu^{2+} porte une charge $q = +2e$ ainsi :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Les lignes de champ sont des demi-droites ayant l'origine pour extrémité et orientées vers l'extérieur.

3. Comment vont s'orienter les dipôles électrostatiques associés aux quatre molécules d'eau ? Les représenter sur le schéma.

Les molécules d'eau, représentées sur la figure suivante par les bâtonnets bleus, vont s'aligner de sorte à aligner leur moment dipolaire $\vec{p}$ (représenté en rouge) avec le champ électrique :



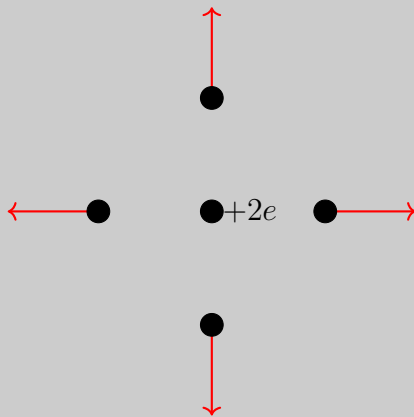
L'oxygène, qui porte la charge partielle négative, se trouve au voisinage de l'ion chargé positivement.

4. On souhaite maintenant calculer l'énergie potentielle électrostatique de cette configuration. On rappelle l'expression du champ créé par un dipôle électrostatique $\vec{p}$ dans le repère de coordonnées sphériques centré sur le dipôle et dont l'axe (Oz) est orienté selon le dipôle :

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \quad (27)$$

- (a) Calculer l'énergie potentielle électrostatique E_1 associée à l'interaction entre l'ion Cu^{2+} et une molécule d'eau.

On redessine la situation uniquement avec les dipôles :



On note $r_0 = a/\sqrt{2}$ la distance entre l'ion Cu^{2+} et une molécule d'eau. Comme $\vec{p}$ et $\vec{E}$ sont alignés :

$$E_1 = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \|\vec{E}(r = r_0)\| = -\frac{ep}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

- (b) Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique E_2 entre deux dipôles à la diagonale l'un de l'autre. *Indice : cette énergie correspond à l'énergie électrostatique de l'un des dipôles placé dans le champ électrique produit par l'autre dipôle*

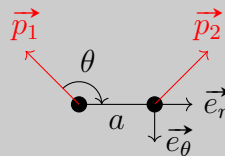
On note $\vec{E}'$ le champ créé par l'un de ces dipôles. Le dipôle en diagonale vérifie alors, dans le repère centré sur le premier dipôle, $\theta = \pi$ (car il est orienté dans l'autre sens) et $r = 2r_0 = \sqrt{2}a$. On en déduit :

$$E_2 = -\vec{p} \cdot \vec{E}' = -(p\vec{e}_r) \cdot \vec{E}' = \frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\sqrt{2}p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}$$

- (c) Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique E_3 entre deux dipôles voisins.

On a alors, pour deux dipôles voisins, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ et $r = a$. Ainsi $\sin \theta = -\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et :

$$\vec{p}_2 = p \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_r - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_\theta \right)$$



On en déduit :

$$E_3 = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}' = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} 2 \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) = \frac{3p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}$$

- (d) Exprimer l'énergie potentielle électrostatique de l'ion hydraté E comme une combinaison linéaire de E_1 , E_2 et E_3 .

En comptant le nombre d'interactions de chaque type dans la structure, on a $E = 4E_1 + 2E_2 + 4E_3$.

- (e) Application numérique : calculer E et séparer la contribution des interactions $\text{Cu-H}_2\text{O}$ et $\text{H}_2\text{O-H}_2\text{O}$. Commenter l'importance de l'effet des interactions entre

molécules d'eau.

On sépare la contribution des interactions ion-molécules :

$$4E_1 = -\frac{4ep}{\pi\epsilon_0 a^2} = -2.3 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -14 \text{ eV}$$

Et celle des interactions entre dipôles :

$$2E_2 + 4E_3 = \frac{(6 + \sqrt{2})p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} = 8.9 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0.56 \text{ eV}$$

On a $2E_2 + 4E_3 \ll |4E_1|$ donc les interactions dipôle-dipôle sont négligeables devant les interactions dipôle-ion.

5. Lors de la dissolution du cuivre, cette énergie électrostatique est libérée (on parle d'enthalpie de dissolution, un terme que l'on définira dans le prochain chapitre de chimie). Calculer l'énergie libérée lors de la solvatation d'une mole d'ions cuivre (II).

On a $E \approx 4E_1 = -14 \text{ eV}$, et on en déduit que lorsqu'on solvate une mole d'ions, l'énergie libérée est :

$$\mathcal{E} = N_A |E| = 1.4 \text{ MJ}$$

Données :

- $p = 1,8 \text{ D} = 6,0 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}^{-1}$
- $a = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

10 Pince optique ★

Arthur Ashkin, prix Nobel 2018, est l'inventeur des pinces optiques à l'aide de faisceau laser focalisé. Ces pinces optiques permettent de piéger une seule molécule, ou même un seul atome isolé, dans un espace restreint. En immobilisant quasiment complètement un atome, on peut alors descendre à des températures très faibles de l'ordre de quelques nanoKelvins, ce qui a permis de tester des hypothèses en mécanique quantique notamment.

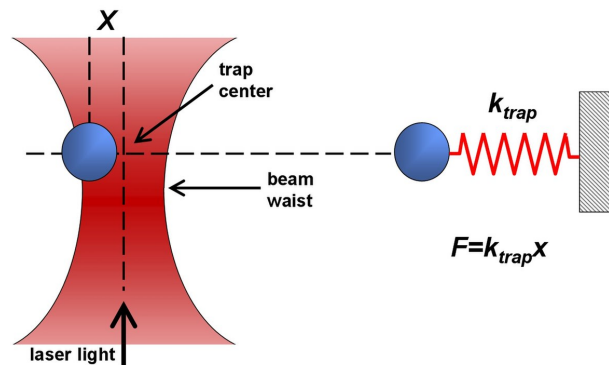


Figure 4: Principe d'une pince optique (à gauche) et équivalence à une force de rappel d'un ressort (à droite). Sur la figure, $x < 0$. Source : Wikimedia Commons.

Considérons un faisceau laser dont l'amplitude du champ dans le plan de focalisation prend la forme gaussienne suivante :

$$\vec{E}(x) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) \vec{e}_x \quad (28)$$

1. Représenter l'allure de la norme du champ électrique $E(x)$.

$\|\vec{E}\| = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right)$ est une gaussienne de demi-largeur w .

2. On introduit dans ce champ une particule de polarisabilité α , c'est-à-dire que lorsqu'elle est exposée à un champ électrique, elle acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha \vec{E}$. Montrer qu'il apparaît, au voisinage de $x = 0$, une force de rappel de la forme $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$, qui peut être utilisée pour piéger la particule au centre du faisceau laser. On écrira k en fonction des données du problème.

On a vu en cours que la force électrostatique s'appliquant sur une particule polaire est donnée par $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E})$. Or ici :

$$\vec{p} \cdot \vec{E} = \alpha \vec{E}^2 = \alpha E_0^2 e^{-(x/w)^2}$$

Et, comme cette quantité ne dépend que de x :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial x}(\vec{p} \cdot \vec{E})\vec{e}_x = -\alpha E_0^2 \cdot \frac{2x}{w} e^{-(x/w)^2} \vec{e}_x$$

Enfin, au voisinage de $x = 0$, on a $e^{-(x/w)^2} \approx 1$ et donc :

$$\vec{F} \approx -\frac{2\alpha E_0^2}{w^2} x \vec{e}_x$$

On obtient une force analogue à celle exercée par un ressort de raideur

$$k = \frac{2\alpha E_0^2}{w^2},$$

qui permet de piéger la particule au voisinage de l'origine.

11 Ligne haute tension ★★

On considère une ligne à haute tension constituée de deux fils séparés d'une distance h .

On modélise cette ligne à haute tension par deux fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe (Oz) , et d'équations $y = -a$ et $y = +a$, de charges linéiques uniformes $\lambda_1 = +\lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$, avec $\lambda > 0$. On note A_1 et A_2 leur intersection respective avec le plan (xOy) . Un point M est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On note r_1 et r_2 les distances entre M et chacun des fils. On choisit l'origine des potentiels au point O ($V(O) = 0$).

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un unique fil infini chargé avec une densité linéique λ uniforme, en tout point de l'espace. On notera r la distance entre le point M et le fil. En déduire le potentiel électrostatique V associé à une constante C près.

On se place dans le système de coordonnées cylindriques ayant pour axe (Oz) le fil. Soit M un point quelconque de l'espace :

- Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}$ est contenu dans ce plan, donc $\vec{E} \cdot \vec{e}_\theta = 0$;
- Le plan passant par M et normal à (Oz) est plan de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}$ est contenu dans ce plan, donc $\vec{E} \cdot \vec{e}_z = 0$.

Donc $\vec{E} = E(r, \theta, z)\vec{e}_r$.

Or on a invariance de la distribution de charges par rotation autour de (Oz) et par translation selon ce même axe, ainsi $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$.

On applique le théorème de Gauss à un cylindre d'axe Oz , de rayon r_0 et de hauteur h . Alors :

$$\begin{cases} Q_{\text{int}} = \lambda h \\ \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h E(r) \end{cases}$$

On en déduit que $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ et $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}\vec{e}_r}$.

On intègre le long d'un chemin allant de r_1 à r_2 :

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

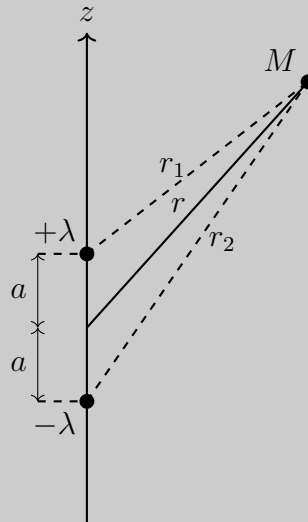
Or cette intégrale vaut $V(r_2) - V(r_1)$ (par théorème du gradient) et donc $V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cte}$, ou encore :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

où r_0 est une constante arbitraire.

2. Calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ créé en M par l'ensemble des deux fils en fonction de λ , r_1 et r_2 .

On a maintenant une situation différente au niveau du repère, on définit les distances r_+ et r_- comme suit :



Alors par principe de superposition :

$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \left(\frac{r_1}{r_0} \right) - \ln \left(\frac{r_2}{r_0} \right) \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

3. Établir la relation liant r_1 et r_2 en un point M d'une surface équipotentielle telle que $V(M) = V_0$.

Sur une surface équipotentielle : $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$.

Donc $\frac{r_2}{r_1} = \exp \left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} \right)$: le rapport entre les deux rayons doit être constant. Pour plus de simplicité, on note dans la suite $k = \exp \left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda} \right)$ et on a alors, sur une équipotentielle :

$$\boxed{\frac{r_1}{r_2} = k}$$

4. Montrer que la surface équipotentielle $V_0 = 0$ est un plan dont on donnera l'équation. Justifier par une autre méthode (sans calculs) que ce plan est une équipotentielle.

Si $V_0 = 0$ alors $k = 1$ et l'équation de la surface équipotentielle devient $r_2 = r_1$. Ceci implique que :

$$r_2^2 = r_1^2 \Leftrightarrow x^2 + (y - a)^2 = x^2 + (y + a)^2 \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 - 2ya = x^2 + y^2 + a^2 + 2ya \quad (30)$$

$$\Leftrightarrow 4ya = 0 \quad (31)$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad (32)$$

car $a \neq 0$. On conclut que l'équipotentielle $V_0 = 0$ est le plan d'équation $y = 0$.

5. Dans toute la suite, on note par soucis de simplification :

$$k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right) \quad (33)$$

Montrer que les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont l'intersection avec le plan (xOy) sont des cercles de centre :

$$C = \left(0; a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right) \quad (34)$$

On rappelle que l'équation d'un cercle de centre $C = (\alpha; \beta)$ et de rayon γ s'écrit en coordonnées cartésiennes $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$

Les équipotentielles vérifient :

$$r_2^2 = k^2 r_1^2 \Leftrightarrow x^2 + (y + a)^2 = k^2(x^2 + (y - a)^2) \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow (1 - k^2)x^2 + (1 - k^2)(y^2 + a^2) + (1 + k^2)2ya = 0 \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 + \frac{1 + k^2}{1 - k^2}2ya = 0 \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1 + k^2}{1 - k^2}a\right)^2 + a^2 - \left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}a\right)^2 = 0 \quad (38)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1 + k^2}{1 - k^2}a\right)^2 = \left[\left(\frac{1 + k^2}{1 - k^2}\right)^2 - 1\right] a^2 \geq 0 \quad (39)$$

Les équipotentielles sont donc des cylindres dont l'intersection avec (xOy) est un cercle de centre $C = \left(0; \frac{1+k^2}{1-k^2}a\right)$, et de rayon $R = a\sqrt{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1}$.

6. En indiquant les propriétés utilisées, dessiner l'allure des équipotentielles et des lignes de champ électrostatique dans le plan $z = 0$. Commenter les similarités et différences avec le dipôle électrostatique.

Considérons $V_0 > 0$. Si V_0 augmente alors k augmente et le centre des cercles se rapproche de $y = +a$ (ligne chargée positivement), et $R \rightarrow 0$.

Si V_0 est faible mais positif, alors $k^2 \rightarrow 1$ et $a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \rightarrow +\infty$. Les cercles ont donc un centre au niveau d'une position $y_c \gg a$. On a aussi $R \rightarrow \infty$ donc les cercles sont très grands.

On construit les lignes de champ en les traçant perpendiculairement aux équipotentiels.

