

# TD3 - Électrostatique

## Correction

### I - Lignes de champ et équipotentielles

#### 1 - Lecture de cartes de lignes de champ

1. a. Le plan  $(xOy)$  (plan de la figure) est un plan de symétrie de la distribution ainsi que tous les plans qui lui sont parallèles.

• Le plan  $(xOz)$  est plan de symétrie de la distribution.

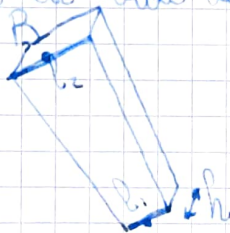
b. De gauche à droite:  $\lambda_1 > 0$ ;  $\lambda_2 < 0$ ;  $\lambda_3 > 0$   
(Les lignes de champ vont des charges positives vers les négatives).

c. En construisant une surface  $\Sigma$  qui englobe les 3 fils on voit que le champ  $\vec{E}$  sort de cette surface donc:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0$$

Par le théorème de Gauss on en déduit  $\boxed{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0}$

d. La région entre A et B est vide de charge, donc il y a conservation du flux:

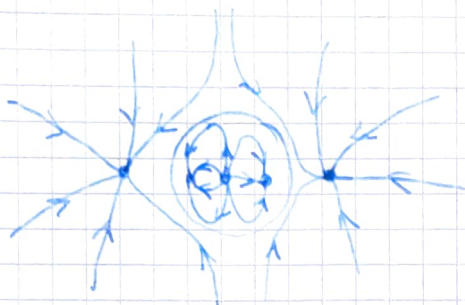


$$\|\vec{E}(A)\| \cdot h \cdot l = \|\vec{E}(B)\| \cdot h \cdot l$$

On trouve  $l_2 \approx 2l$ , d'où  $\boxed{\|\vec{E}(B)\| \sim \frac{1}{2} \|\vec{E}(A)\| \sim 50 \text{ V/m}}$

e. Au point C, les lignes de champ sont très éloignées donc l'intensité du champ est faible:  $\boxed{\|\vec{E}(C)\| \approx 0}$

2. a. Les lignes de champ vont des charges positives vers les charges négatives. De plus  $\sum q_i < 0$  = les lignes de champ s'éloignent vers le centre de la figure.



On en déduit :

$$q_1, q_2, q_3, q_4 < 0$$

$$q_5 > 0$$

b. Les points de champ nul sont les points où la direction du champ n'est pas définie, soit les points d'intersection des lignes de champ : A, B, C et D.

c. Le plan passant par A et B et perpendiculaire au plan de la figure est un plan de symétrie de la distribution de charges car c'est un plan de symétrie de  $\vec{E}$  donc  $q_1 = q_5$  et  $q_2 = q_4$ .

d. On applique le théorème de Gauss à la sphère centrée sur  $q_3$  et de diamètre  $d = AB = CD$ . Le champ  $\vec{E}$  est en tout point de la sphère, tangentiel à la sphère donc :

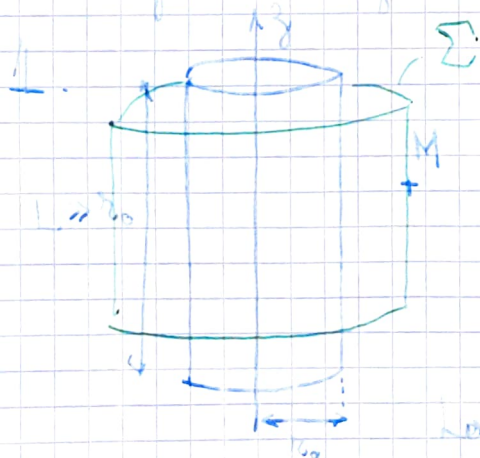
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{q_2 + q_3 + q_4}{\epsilon_0}$$

$$\text{D'où : } q_2 + q_3 + q_4 = 0$$

$$\text{Or, } q_3 = q_1 \text{ donc : } [2q_2 + q_1 = 0]$$

## I - Applications du théorème de Gauss

### 2 - Cylindre uniformément chargé A SAVOIR, REFAIRE



On propose une densité volumique de charge uniforme dans le cylindre :

$$\rho = \frac{q}{V_{\text{fil}}} = \frac{q}{\pi R_0^2 L}$$

volume du fil

Les plans contenant  $Oz$  sont des plans de symétrie de la distribution  $\Rightarrow \vec{E}$  est constant dans ces plans  $\Rightarrow \vec{E} = E \vec{e}_r = E \vec{e}_1 + E \vec{e}_2$



La distribution de charges est invariante par rotation autour de  $Oz$ .  
Donc  $E_r$  et  $E_\phi$  ne dépendent pas de  $\phi$ .

2. Dans ce cas on peut supposer le fil infiniment long. Alors le plan passant par M et perpendiculaire à  $Oz$  est un plan de symétrie de la distribution, donc  $\vec{E}(M)$  est contenu dans ce plan et  $\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r, z) \vec{e}_r$ .  
Enfin le problème devient invariant par translation selon  $Oz$  et :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r}$$

3. On choisit la surface fermée  $\Sigma$ , représentée en vert : un cylindre de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . Le flux du champ  $\vec{E}$  à travers les faces supérieures est nul et à travers la face latérale il vaut :

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h \cdot E(r)$$

Cas 1 :  $r > r_0$

La charge intérieure est  $Q_{int} = \rho \times \pi r_0^2 h$ .

Par le théorème de Gauss :  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  soit :

$$E(r) = \frac{\rho \cdot \pi r_0^2 h}{\epsilon_0 \times 2\pi r h} = \frac{\rho r_0^2}{2\epsilon_0 r}$$

On encore :  $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot \frac{r_0^2}{r} \vec{e}_r}$  à l'extérieur du fil

Cas 2 :  $r < r_0$

La charge intérieure est  $Q_{int} = \rho \times \pi r^2 h$

$$\text{D'où : } E(r) = \frac{\rho \cdot \pi r^2 h}{\epsilon_0 \cdot 2\pi r h} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

On encore :  $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \cdot r \vec{e}_r}$  à l'intérieur du fil

4. On peut écrire  $\rho r_0^2 = \frac{q}{\pi L}$ . Cette quantité ne dépend pas de  $r_0$  donc  $\vec{E}$  à l'intérieur du fil est le même que si le fil était infiniment fin.

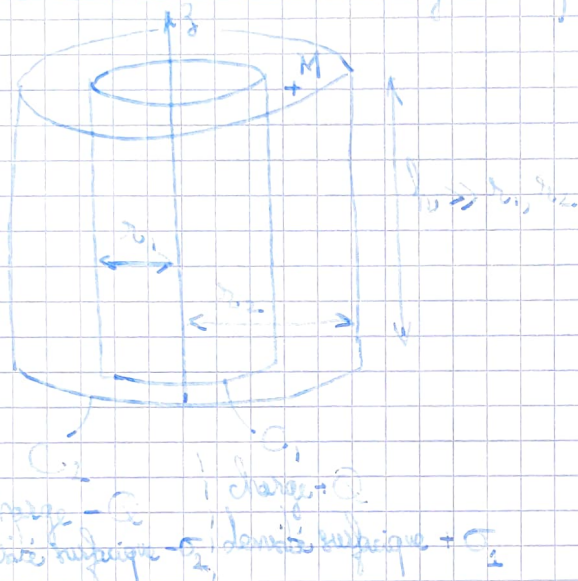
(Rq : c'est analogue au champ  $\vec{E}$  à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée, qui est le même que pour une charge ponctuelle.)

5. Ici  $\lambda = \frac{Q}{L}$  car  $\lambda$  est uniforme et donc  $\rho = \frac{\lambda}{2\pi r}$ .

On en déduit  $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r}$

(Rq : le cas  $r < r_0$  n'est plus à considérer puisque  $r_0 = 0$ )

### 3 - Condensateur cylindrique



On veut déterminer la différence de potentiel entre les deux cylindres. Pour cela on cherche le champ  $\vec{E}$  entre les armatures.

On modélise la distribution de charges par une densité surfacique. Les charges  $\pm Q$  sur chaque cylindre :  $Q = \frac{\sigma}{2\pi r \cdot h}$

Soit un point  $M$  entre les armatures. On se place dans le système de coordonnées cylindriques autour de  $(Oz)$ .

Etude des symétries :

- \* Le plan passant par  $M$  et contenant  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution  $\Rightarrow \vec{E}(M)$  est dans ce plan  $\Rightarrow \vec{E}(M) \perp \vec{e}_\phi$
- \* Si on suppose le cylindre infini ( $h \rightarrow \infty$ ) le plan passant par  $M$  et perpendiculaire à  $(Oz)$  est aussi un plan de symétrie  $\Rightarrow \vec{E}(M)$  est dans ce plan  $\Rightarrow \vec{E}(M) \perp \vec{e}_z$

Donc  $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$

Or le problème est invariant par rotation autour de  $(Oz)$  et en supposant le cylindre infini ( $h \rightarrow \infty$ ) aussi par translation selon  $(Oz)$ .

Donc :  $\boxed{\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r}$

Détermination de  $E(r)$

On choisit une surface  $S$  qui est une surface cylindrique de rayon  $r$ .



Le rayon,  $r_1 \leq r \leq r_2$ . Alors le flux de  $\vec{E}$  à travers cette surface

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r h \times E(r)$$

De plus la charge intérieure est  $Q_{\text{int}} = Q$ .

Par le théorème de Gauss :  $Q = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r h}$

### Calcul de la différence de potentiel

La différence de potentiel entre les armatures s'obtient par intégration du champ électrique le long d'un chemin reliant les armatures

noté  $\Gamma$  :  $U = \int_{\Gamma} -\vec{E} \cdot d\vec{l} = U_1 - U_2$

On prend pour  $\Gamma$  une ligne droite orientée selon  $\vec{e}_z$ , ainsi  $d\vec{l} = dz \vec{e}_z$  et  $U = \int_{r_1}^{r_2} -E(r) dz = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \cdot \frac{dz}{z}$   
 $= - \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$

La capacité du condensateur relie la charge et la tension (en valeur absolue) par  $Q = C U$  ainsi  $C = \frac{|Q|}{|U|} = \frac{2\pi \epsilon_0 h}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$

Rq : pour trouver le bon signe il faut se placer en convention récepteur.

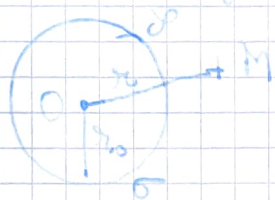
### 4 - Effet Faraday

1. Nous avons vu que dans la sphère :  $\vec{E}(r) = \frac{Qr}{4\pi \epsilon_0 R^3} \vec{e}_r$

Supposons que la sphère contient des charges positives ( $Q > 0$ ), alors elles subissent une force  $\vec{F} = q\vec{E}$  orientée selon  $+\vec{e}_r$  et s'éloignent donc pour s'accumuler à la surface de la sphère. Si les charges sont négatives ( $Q < 0$ ) alors  $\vec{F} = q\vec{E} < 0$  et elles sont aussi selon  $+\vec{e}_r$  donc les charges sont aussi en surface.

2. On peut donc supposer que la sphère est uniformément chargée en surface avec :  $\vec{\sigma} = \frac{Q}{4\pi R^2} \vec{e}_r$  et ainsi

3. a. Étude des symétries : on se place dans le système de coordonnées sphériques centré en  $O$ .



Tous les plans contenant  $(OM)$  sont plans de symétrie de la distribution

donc  $\vec{E}(M)$  est dans tous ces plans et

donc :  $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$

De plus la distribution est invariante par rotation autour de  $O$

donc  $E(r, \theta, \varphi)$  ne dépend pas de  $\theta$  et  $\varphi \Rightarrow \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$

On choisit  $\Sigma$  une sphère de rayon  $r$ . Le flux de  $\vec{E}$  à travers

$\Sigma$  est :  $\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$

De plus par le théorème de Gauss :  $\Phi = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

\* Si  $r < r_0$  :  $Q_{int} = 0$  et  $E(r) = 0$

\* Si  $r > r_0$  :  $Q_{int} = Q$  et  $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

Ainsi :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } r < r_0 \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r & \text{si } r > r_0 \end{cases}$$

b. Si  $r > r_0$ , alors le champ est le même que si on avait une charge ponctuelle  $+q$  en  $O$ .

c. Si  $r < r_0$  le champ est nul : il n'y a aucun champ électrique à l'intérieur de la sphère conductrice chargée en surface. C'est l'effet "cage de Faraday".

## 5 - Modèle d'un atome

1. a. Si  $r \gg a$  :  $V(r) \approx 0$

Si  $r \ll a$  :  $V(r) \approx \frac{A}{r}$  correspondant au potentiel créé par une charge positive.

On en déduit qu'on a une charge positive concentrée au centre.



mais qu'on a une charge nulle aux échelles  $r \ll a$  : on a donc la taille du nuage électronique de l'atome (le rayon caractéristique en  $r \ll a$ ).

b. Pour  $r \ll a$  le noyau peut être considéré comme une charge ponctuelle en  $r=0$  et on néglige le nuage électronique.

$$V(r) = \frac{Q_{\text{noyau}}}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{Or } Q_{\text{noyau}} = +Ze$$

$$\text{Donc } A = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}$$

c. Pour l'atome d'hydrogène  $Z=1$

$$\begin{aligned} \text{De plus : } E(r=a) &= -\frac{\partial V}{\partial r}(r=a) = -\frac{A}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{A}{ra} e^{-\frac{r}{a}} \\ &= -2 \cdot \frac{A}{a^2} \exp(-1) \\ &= -\frac{2e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \exp(-1). \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } a^{-1} = \sqrt{\frac{E(r=a) \times 4\pi\epsilon_0}{2e \times e}} \quad \begin{array}{l} \text{pour } q \text{ quelconque } e=1 \\ \text{charge élémentaire } 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \end{array}$$

$$\boxed{a \approx 2,1 \cdot 10^{-10} \text{ m} \approx 2,1 \text{ \AA}}$$

$a$  est bien de l'ordre de l'Angström ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) attendu pour un atome.

$$\begin{aligned} \text{2. a. On a } \vec{E} &= -\text{grad } V \quad \Leftrightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r \\ \text{Soit } \vec{E} &= \left( \frac{A}{r^2} e^{-\frac{r}{a}} + \frac{A}{ra} e^{-\frac{r}{a}} \right) \vec{e}_r = \frac{A}{r^2} \left( 1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}} \vec{e}_r \end{aligned}$$

b. On en déduit le flux sortant d'une sphère de rayon  $r$  :

$$\Phi = 4\pi r^2 \vec{E} \cdot \vec{e}_r = 4\pi A \left( 1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\text{Or } 4\pi A = \frac{Ze}{\epsilon_0} \text{ donc } \boxed{\Phi = \frac{Ze}{\epsilon_0} \left( 1 + \frac{r}{a} \right) e^{-\frac{r}{a}}}$$

$$\Phi(r=0) = \frac{Ze}{\epsilon_0} = \frac{Q_{\text{noyau}}}{\epsilon_0} \quad \text{conformément au théorème de Gauss (le nuage électronique est négligé)}$$

$$\Phi(r > a) = 0 = \frac{Q_{\text{atome}}}{\epsilon_0} \quad \text{car la charge totale est nulle}$$

2. Dans le cas où:  $0 \leq \rho \leq \frac{Q_{\text{rayon}}}{4\pi a^2}$

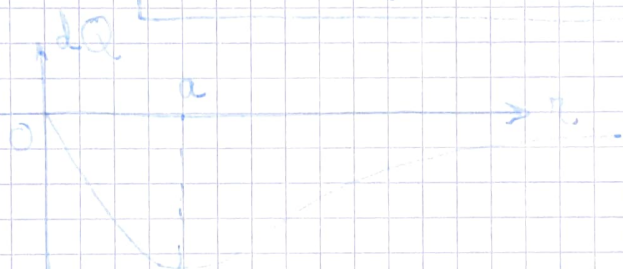
le nuage électronique "écran" une partie du flux du champ électrique, entre 0 et  $\pi$ , car sa charge négative compense partiellement la charge + $\pi r$  du rayon.

3. a. On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$ :  $\Phi(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$ .

D'où:  $Q(r) = Ze \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}}$ .

b. On a  $dQ = \frac{dQ}{dr} dr = Ze dr \times \left[ -\frac{1}{a} e^{-\frac{r}{a}} - \frac{1}{a} \left(1 - \frac{r}{a}\right) e^{-\frac{r}{a}} \right]$

$\left[ dQ = -\frac{Ze dr}{a} \cdot \frac{\pi}{a} e^{-\frac{r}{a}} \right]$



La charge négative est concentrée au niveau du rayon  $r = a$ , c'est là que se trouve le nuage électronique. Cela est bien cohérent avec l'interprétation qu'on avait proposée.

## 6 - Profil de masse volumique dans la Terre.

1. Soit  $S$  une surface fermée. Le flux du champ gravitationnel  $\vec{g}$  à l'extérieur de cette sphère est relié à la masse totale  $M_{\text{int}}$  contenue à l'intérieur, par:

$$\oint_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle.

on pose:  $\vec{g} = -\vec{E}$   $M_{\text{int}} = \rho \cdot V$   
 $\rho = -\frac{1}{4\pi G}$



2. Soit  $M$  un point de l'espace. On suppose la densité de masse en coordonnées sphériques centrée en  $O$ .

Tous les plans passant par  $(OM)$  sont plans de symétrie de la distribution de masse donc  $\vec{G}$  est contenu dans ces plans et  $\vec{G} = -g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$ . (On met un signe - par convention).  
De plus le problème est invariant par rotation autour de  $O$  donc  $g(r, \theta, \varphi) = g(r)$  et  $\vec{G} = -g(r) \vec{e}_r$ .

On applique le théorème de Gauss gravitationnel à la sphère de rayon  $r$  :  $-\int_V \vec{r}^2 g(r) = -\int_V (G-M_{int})$

• Si  $r \leq R_T$  alors :  $M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

Or  $\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$  donc  $M_{int} = M_T \cdot \frac{r^3}{R_T^3}$ .

Ainsi  $g(r) = \frac{G}{r^2} \cdot M_T \cdot \frac{r^3}{R_T^3} = \boxed{\frac{GM_T}{R_T^2} \cdot \frac{r}{R_T}}$

• Si  $r \geq R_T$  alors  $M_{int} = M_T$  et :

$$g(r) = \frac{GM_T}{r^2}$$

3. À la surface de la Terre  $g(r=R_T) = g_0 = \frac{GM_T}{R_T^2}$ .

R.N : On trouve bien  $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$

4. a. On a maintenant  $M_{int} = \int_0^r \underbrace{4\pi r'^2 \rho(r')}_{\text{masse entre } r' \text{ et } 0} dr'$

Soit  $g(r) = \frac{G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$

b. D'où :  $r^2 g(r) = G \int_0^r r'^2 \rho(r') dr'$

On dérive :  $r^2 g'(r) + 2rg(r) = G r^2 \rho(r)$

On encore :  $\rho(r) = \left( g'(r) + \frac{2}{r} g(r) \right) \times \frac{1}{G}$

\* Si  $r \leq R_T$  :  $g(r) = g_0 \frac{r}{R_T}$   $g'(r) = \frac{g_0}{R_T}$

on obtient :  $\frac{2}{r} g(r) = \frac{2g_0}{R_T} \times r = \frac{2g_0}{R_T}$

Il s'agit de la région intérieure qui a une masse volumique uniforme.

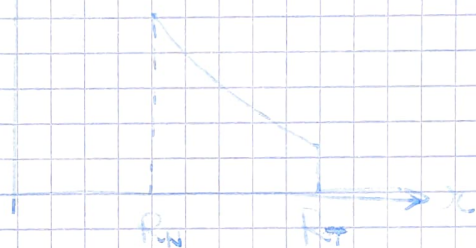
\* Si  $0 \leq r \leq R_1$  alors  $\rho(r) = \rho_0$  et  $g'(r) = 0$ .

Donc  $\rho(r) = \frac{2\rho_0}{3R_1}$  diminue avec  $r$  : la masse volumique décroît.

\* Si  $r = R_1$  alors  $\rho(r) = \frac{K}{r^2}$  où  $K$  est une constante.

$$g'(r) = -2 \cdot \frac{K}{r^3} \text{ et donc } g'(r) + \frac{2}{r} \rho(r) = 0$$

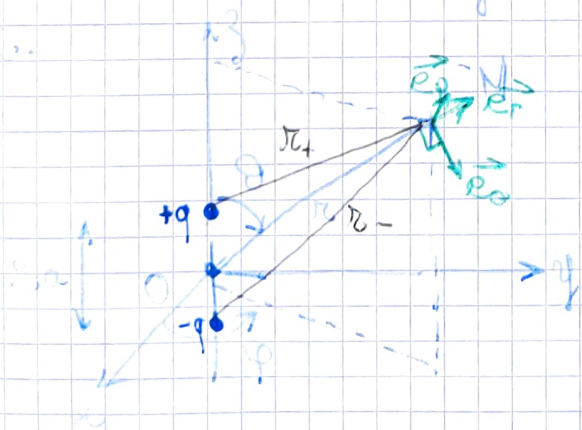
Donc  $\rho(r) = 0$  : on est hors à l'extérieur de la terre.



## III - Dipôle électrostatique

### 1 - Interaction entre deux dipôles

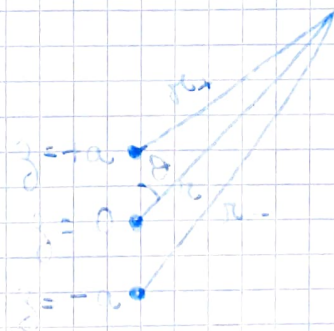
1. On suppose que l'on se place à une distance  $r$  grande devant la taille du dipôle. Ici, cela revient à dire que l'espacement entre molécules est grand devant la taille des molécules.



$\vec{p} = 2qa \vec{e}_z$  avec la notation du schéma

3. On a par principe de superposition :

$$V = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$



4. L'interaction entre deux dipôles :



$$r_+^2 = \| r_0 \vec{e}_z - a \vec{e}_y \|^2 = r_0^2 + a^2 - 2r_0 a \cos(\theta)$$

$$\approx r^2 - 2r_0 a \cos(\theta) \quad \text{car } a \ll r_0$$

$$\text{Et } r_-^2 \approx r_0^2 + 2r_0 a \cos(\theta)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{r_+} = \frac{1}{r_0 (1 - 2\frac{a}{r_0} \cos(\theta))^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{1}{r_0} \left( 1 + \frac{a}{r_0} \cos(\theta) \right)$$

$$\text{Et même } \frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r_0} \left( 1 - \frac{a}{r_0} \cos(\theta) \right)$$

$$\text{On trouve finalement que } V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{2a \cos(\theta)}{r_0^2}$$

$$\text{On a } \|\vec{E}\| = 2qr = \left[ V = \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right]$$

$$5. \text{ On a } \vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$\text{Donc } \vec{E} = + \frac{p \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\left[ \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2\cos(\theta) \vec{e}_r + \sin(\theta) \vec{e}_\theta) \right]$$

6. L'énergie potentielle électrique d'un dipôle  $\vec{p}$  placé dans un champ  $\vec{E}$  est  $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

$$\text{On a donc ici } E_p = -\alpha \cdot \vec{E} = -\frac{\alpha p^2}{16\pi^2 \epsilon_0 r^6} (3\cos^2(\theta) + 1)$$

$$\text{On trouve bien } \left[ E_p \propto \frac{1}{r^6} \right]$$

$$7. \text{ On a } C = \frac{\alpha p^2}{16\pi^2 \epsilon_0} (3\cos^2(\theta) + 1) \text{ donc } C \text{ dépend de } \theta$$

car  $\theta$  dépend de la position du dipôle relatif par rapport à l'orientation du dipôle permanent.

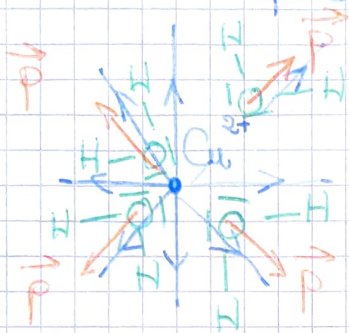
Donc  $C$  est variable.

On a l'expression du champ, donc l'interaction.



2. L'ion  $\text{Cu}^{2+}$  porte une charge  $q = +2e$  ainsi:

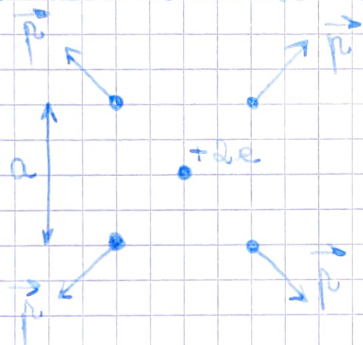
$$\vec{E} = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



3. Les molécules d'eau vont avoir leur moment aligné avec le champ (en vert et rouge)

L'oxygène se trouve autour de l'ion.

4. a. On redessine la situation uniquement avec les dipôles:



On note  $r_0$  la distance entre  $\text{Cu}^{2+}$  et une molécule d'eau. Comme  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  sont alignés:

$$E_1 = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\|\vec{E}\| (r=r_0)$$

$$\text{Soit } E_1 = -\frac{e p}{2\pi\epsilon_0 a^2} \text{ avec } r_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

b. On note  $\vec{E}''$  le champ créé par un des dipôles.

Le dipôle en diagonale vérifie, dans le repère centré sur le premier dipôle,  $\theta = \pi$  et  $r = 2r_0 = \sqrt{2}a$

$$\begin{aligned} \text{D'où } E_2 &= -\vec{p} \cdot \vec{E}'' = -(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \cdot E'' \\ &= +\frac{2p^2}{4\pi\epsilon_0 (2r_0)^3} = \frac{\sqrt{2}p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} \end{aligned}$$

c. Pour deux dipôles voisins:



$$\text{On a } \begin{cases} r = a \\ \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Et } \vec{p}_2 = p \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_r - \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{e}_\theta \right)$$

$$E_2 = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}'' = -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\theta \right)$$



$$\text{Soit } E_3 = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3p^2}{8\pi\epsilon_0 a^3}$$

d. On a  $E = 4E_1 + 2E_2 + 4E_3$  en comptant le nombre d'interactions de chaque type.

$$\text{e. On a } 4E_1 = -\frac{4ep}{\pi\epsilon_0 a^2} = -2,3 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -14 \text{ eV}$$

$$\text{Et } 2E_2 + 4E_3 = \frac{\sqrt{2}p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} + \frac{6p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} = \frac{(6+\sqrt{2})p^2}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$= 8,9 \cdot 10^{-20} \text{ J} = 0,56 \text{ eV}$$

$2E_2 + 4E_3 \ll |4E_1|$  donc les interactions dipôle-dipôle sont négligeables devant les interactions dipôle-ion.

On a de plus  $E \approx 4E_1 = -14 \text{ eV}$ .

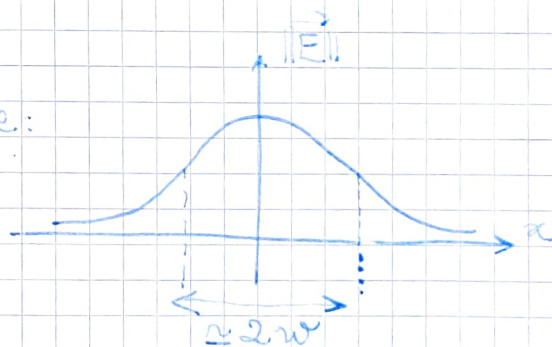
Lorsqu'on libère une mole d'ions, l'énergie libérée est:

$$E = N_A \times |E| = 1,4 \text{ MJ}.$$

## 9 - Pince optique

1.  $\|\vec{E}\| = E_0 e^{-\frac{x^2}{2w^2}}$  est gaussienne:

$w$  correspondant à la largeur de la gaussienne.



2. On a vu en cours que la force électrostatique s'appliquant sur une particule polaire est  $\vec{F} = -\text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E})$ .

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot \vec{E} = \alpha E^2 = \alpha E_0^2 e^{-\frac{x^2}{2w^2}}$$

$$\text{Et } \text{grad}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = \frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{E})}{\partial x} \vec{e}_x = -\alpha E_0^2 \cdot \frac{2x}{w^2} e^{-\frac{x^2}{2w^2}} \vec{e}_x$$

$$\text{Soit } \vec{F} = -\frac{2\alpha E_0^2}{w^2} x e^{-\frac{x^2}{2w^2}} \vec{e}_x$$

$\approx 1$  en maximum de  $x=0$

à l'intérieur du voisinage de  $z=0$  :

$$\vec{E} = -k\alpha \vec{e}_z$$

avec  $k = \frac{2\alpha \epsilon_0}{w^2}$

ce qui permet de piéger la particule

proche de  $z=0$ .

## 10 - Lig : haute tension

1.



On se place d'abord dans le système de coordonnées cylindriques ayant pour axe  $(Oz)$  le fil.

Soit M un point quelconque.

\* Le plan passant par M et contenant  $(Oz)$  est plan de symétrie de la distribution donc  $\vec{E}$  est dans ce plan.

\* Idem pour le plan passant par M et normal à  $(Oz)$

Donc  $\vec{E} = E(r, \phi, z) \vec{e}_r$

On a une invariance par translation selon  $(Oz)$  et rotation autour de  $(Oz)$   $\Rightarrow \vec{E} = E(r) \vec{e}_r$

On applique le théorème de Gauss à un cylindre d'axe  $(Oz)$  de rayon  $r_0$  et de hauteur  $h$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{\text{int}} = \lambda h \\ \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 2\pi r_0 h E(r_0) \end{array} \right.$$

D'où :  $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$  et  $\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r}$

On intègre le long d'un chemin allant de  $r_1$  à  $r_2$

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

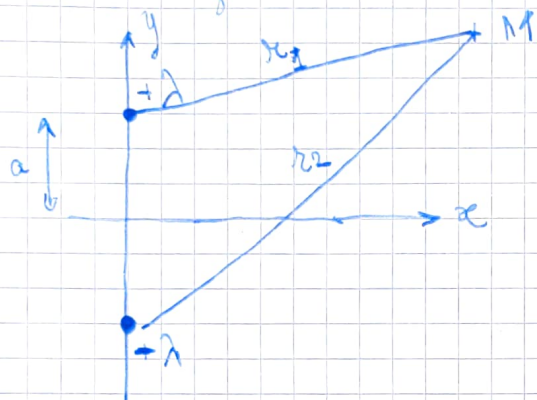
On  $\int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = V(r_1) - V(r_2)$  d'où :



$$V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(r) + C^{ste} = \boxed{\frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)}$$

où  $r_0$  est une constante arbitraire.

2. On a maintenant une situation différente au niveau du repère, on définit  $r_+$  et  $r_-$  comme suit :



Alors par principe de superposition :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{r_+}{r_0}\right) - \ln\left(\frac{r_-}{r_0}\right) \right]$$

$$\boxed{V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)}$$

3. Sur une surface équipotentielle  $V_0 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_-}{r_+}\right)$

Donc  $\frac{r_-}{r_+} = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$  : le rapport entre les rayons est

constant. Pour plus de simplicité on note  $k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right)$  et

on a :

$$\boxed{\frac{r_-}{r_+} = k}$$

4. Si  $V_0 = 0$  alors  $k = 1$  et  $r_- = r_+$ . Ceci implique que

$$r_-^2 = r_+^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-a)^2 = x^2 + (y+a)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 - 2ya = x^2 + y^2 + a^2 + 2ya$$

$$\Leftrightarrow 4ya = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 0 \quad \text{car } a \neq 0.$$

L'équipotentielle  $V_0 = 0$  est donc un plan d'équation  $y = 0$ .

5. Les équipotentielles vérifient :

$$r_- = k r_+ \Leftrightarrow r_-^2 = k^2 r_+^2$$

$$\Leftrightarrow (y+a)^2 + x^2 = k^2 ((y-a)^2 + x^2)$$

$$\Leftrightarrow (1-k^2)x^2 + (1-k^2)(y^2 + a^2) + (1+k^2) \times 2ya = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} \times 2ya = 0$$

$$\begin{aligned}
 r_2 &= k r_1 \Rightarrow x^2 + y^2 + a^2 + \frac{1+k^2}{1-k^2} \cdot 2ya = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 + a^2 - \underbrace{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2}_{\text{on a ajouté et retranché ce terme}} = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1+k^2}{1-k^2} a\right)^2 = \left[\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 - 1\right] a^2 \geq 0 \text{ car } \frac{1+k^2}{1-k^2} \geq 0
 \end{aligned}$$

Les équipotentielles sont donc des cylindres dont l'intersection avec  $(xOy)$  est un cercle de centre  $C = \left(0; a \cdot \frac{k^2+1}{k^2-1}\right)$

et de rayon  $R = a \sqrt{\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 1}$

6. Si  $V_0$  augmente alors  $k$  augmente et le centre des cercles se rapproche de  $a$ , et  $R \rightarrow 0$ .

Si  $V_0$  est faible alors  $k^2 \rightarrow 1$  et  $a \frac{k^2+1}{k^2-1} \rightarrow \infty$  : les cercles ont un centre avec  $y_c \gg a$ . On a aussi  $R \rightarrow \infty$  donc les cercles sont grands:

