

I - Révisions

1 - Mission Apollo

1. Référentiel terrestre: référentiel lié au sol en un point donné de la surface de la Terre.

Référentiel géocentrique: référentiel dont l'origine est au centre de la Terre et les axes pointent vers des étoiles lointaines.

On peut travailler dans le référentiel géocentrique; le référentiel terrestre n'est pas adapté car la durée des phénomènes étudiés dépasse la durée d'un jour.

2. a. Ce point a une trajectoire circulaire uniforme de rayon $r_B = R_T \cdot \cos(\lambda)$ et de période $T = 1$ jour, d'où:

$$v_B = r_B \cdot \Omega = R_T \Omega \cos \lambda.$$

A.N: $v_{B1} = 409 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_{B2} = 463 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

b. On a $E_c = \frac{1}{2} m v_B^2$ d'où: $\epsilon = \frac{-v_{B1}^2 + v_{B2}^2}{v_0^2 - v_B^2}$

On a par ailleurs $v_0 = 8000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Delta E_c = \frac{1}{2} m (v_0^2 - v_B^2)$

On trouve $\epsilon = 7,5 \cdot 10^{-4} = 0,08\%$.

C'est une économie relativement faible.

3. On suppose que la masse de la Terre est répartie de telle sorte que la masse volumique ne dépend que de r . Si M est un point de l'espace, tous les plans contenant (OM) sont plans de symétrie de la distribution de masse donc \vec{g} est dans ce plan et $\vec{g} = g(M) \vec{e}_r$. De plus μ est invariant par rotation autour de O . On applique le théorème de Gauss gravitationnel à la

sphère de centre O et de rayon R_T :

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi R_T^2 g_T = -4\pi G m_T$$

D'où: $g_T = \frac{G m_T}{R_T^2} = 9,83 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ très proche de la valeur tabulée ($9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)

4. a. Dans R_G galiléen, la fusée est soumise à la seule force gravitationnelle qui est centrale. On en déduit que son moment cinétique est conservé: $\vec{T} \wedge m_F \vec{v}_F = \vec{L}_F = \text{cste}$
 Donc M reste dans le plan normal à \vec{L}_F et passant par T et le mouvement est plan.

b. On se place en coordonnées polaires dans le plan du mouvement, l'accélération de la fusée est $\vec{a}_F = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r$ car le mouvement est circulaire uniforme. On applique le PFD à la fusée soumise à la seule force de gravitation dans R_G galiléen:

$$-m_F \frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -G \frac{m_F m_T}{r_0^2} \vec{e}_r$$

D'où:
$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m_F v_0^2 = G \frac{m_F m_T}{2 r_0} \\ v_0 = \sqrt{\frac{G m_T}{r_0}} \end{cases}$$

* c. On a $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$ durée pour parcourir un cercle.

Ainsi $T_0^2 = \frac{4\pi^2 r_0^2}{v_0^2} = 4\pi^2 r_0^2 \cdot \frac{r_0}{G m_T} = \frac{4\pi^2}{G m_T} r_0^3$

ou encore $\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{G m_T}$: c'est la 3^e loi de Kepler.

d. On a $E_m = E_p + E_c = -G \frac{m_F m_T}{r_0} + G \frac{m_F m_T}{2 r_0}$ donc

on conclut: $E_m = -\frac{G m_F m_T}{2 r_0}$

5. a. On a donc $E_m = -\frac{G m_F m_T}{2 a} = -\frac{G m_F m_T}{2 a}$

f. On en déduit v_1 par la relation suivante, valable juste après l'accélération quand la fusée est encore en $r = r_0$:

$$E_{m1} = \frac{1}{2} m_F v_1^2 - \gamma \frac{m_F M_T}{r_0} = - \gamma \frac{m_F M_T}{d_{TL}}$$

$$\text{D'où : } v_1 = \sqrt{2\gamma M_T \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{d_{TL}} \right)} = \sqrt{2 \left(v_0^2 - \frac{\gamma M_T}{d_{TL}} \right)} = 11,2 \cdot \text{km} \cdot \text{s}^{-1}$$

où on a pris $r_0 = \frac{\gamma M_T}{v_0^2}$.

c. Cette durée est alors $\frac{T_1}{2}$ avec $T_1 = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{\gamma M_T}}$ (3^e loi de Kepler)

$$\text{D'où : } t_1 = \sqrt{\frac{\pi^2 d_{TL}^3}{8 \gamma M_T}} = 4,1 \cdot 10^5 \text{ s} = 4,8 \text{ jours.}$$

6. a. À l'approche de la Lune il faut passer de l'énergie

$$E_{m1} = - \gamma \frac{m_L m_F}{d_{TL}} \text{ à } E_{m2} = - \gamma \frac{m_L m_F}{2R_L}$$

Or $2R_L \ll d_{TL}$ donc $E_{m2} \ll E_{m1}$: il faut réduire l'énergie de la fusée et donc freiner.

b. De manière similaire à 4. b. on a $v_0 = \sqrt{\frac{\gamma m_L}{R_L}} = 1,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

II - Référentiels en translation

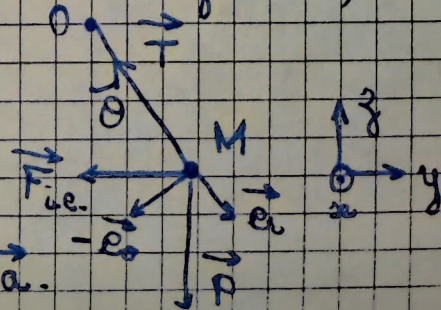
2 - Pendule dans un train

1. a. On se place dans le référentiel du train, qui n'est pas galiléen mais est en translation par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen avec l'accélération \vec{a} . Dans ce référentiel, la masse M est soumise à :

* Son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$

* la tension \vec{T} du fil

* la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_i = -m\vec{a}$.



On applique le PFD à M dans ce référentiel projeté selon \vec{e}_s :

$$m l \ddot{\theta} = - m a \cos(\theta) - m g \sin(\theta)$$

D'où: $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta + \frac{a}{l} \cos \theta = 0$

b. La force \vec{T} est centrale donc a un moment nul en O; par ailleurs:

$$\mathcal{M}_{(O_x)}(\vec{P}) = - m g l \sin \theta \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{(O_x)}(\vec{F}_{i.c.}) = - m a l \cos \theta$$

(Les deux forces font tourner M dans le sens antihoraire d'où le signe -).

On applique le théorème du moment cinétique à M dans le référentiel du train non galiléen en tenant compte de la pseudo-force d'inertie d'entraînement et avec $L_{(O_x)}(M) = m l^2 \dot{\theta}$:

$$m l^2 \ddot{\theta} = - m g l \sin \theta - m a l \cos \theta$$

On retrouve la même équation.

~~c. On se place dans le référentiel terrestre, à l'instant $t=0$ il coïncide avec le référentiel du train et $\vec{v}(\text{train}/R_T) = a \cdot t \vec{e}_y$~~

~~Par comparaison des vitesses: $\vec{v}(M/R_T) = a t \vec{e}_y + l \dot{\theta} \vec{e}_\theta$~~

~~D'où: $E_c = \frac{1}{2} m v^2$~~

c. L'énergie mécanique du point M est:

$$E_m = \underbrace{- m g l \cos \theta}_{\text{énergie potentielle}} + \underbrace{\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2}_{\text{énergie cinétique}}$$

De plus la pseudo-force d'inertie d'entraînement travaille:

$$P(\vec{F}_{i.c.}) = \vec{F}_{i.c.} \cdot \vec{v} = - m a \vec{e}_y \cdot l \dot{\theta} \vec{e}_\theta = - m l a \dot{\theta} \cos \theta$$

Par le théorème de l'énergie mécanique appliqué dans le référentiel

du train: $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{F}_{i.c.})$ donc:

$$+ m g l \dot{\theta} \sin \theta + m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = - m l a \dot{\theta} \cos \theta$$

On retrouve la même équation différentielle après simplification par $\dot{\theta}$.

2. À l'équilibre $\ddot{\theta} = 0$ et on trouve: $\frac{g}{l} \sin \theta_{\text{eq}} + \frac{a}{l} \cos \theta_{\text{eq}} = 0$

$$\text{D'où: } \theta_{\text{eq}} = -\arctan\left(\frac{a}{g}\right).$$

3. Si $\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon$ alors:

$$\begin{cases} \sin \theta = \sin \theta_{\text{eq}} + \varepsilon \cos(\theta_{\text{eq}}) \\ \cos \theta = \cos \theta_{\text{eq}} - \varepsilon \sin(\theta_{\text{eq}}) \end{cases}$$

$$\text{On en déduit: } \ddot{\varepsilon} + \left[\frac{g}{l} \cos(\theta_{\text{eq}}) - \frac{a}{l} \sin(\theta_{\text{eq}}) \right] \varepsilon = 0$$

Les petites oscillations se font à la pulsation ω telle que:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{g}{l} \cos(\theta_{\text{eq}}) - \frac{a}{l} \sin(\theta_{\text{eq}}) \\ &= \frac{g}{l} \cos(\theta_{\text{eq}}) + \frac{a^2}{lg} \cos(\theta_{\text{eq}}) \\ &= \frac{g}{l} \cos(\theta_{\text{eq}}) \left(1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2 \right). \end{aligned}$$

$$\text{Or } \cos(\theta_{\text{eq}}) = \cos\left(\arctan\left(\frac{a}{g}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\left(\arctan\left(\frac{a}{g}\right)\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2}}$$

$$\text{Ainsi: } \omega^2 = \frac{g}{l} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{g}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{l}$$

$$\text{Et: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}}$$

3 - Sismographe

1. À l'équilibre, le référentiel du cadre est galiléen et le point M est soumis à la seule force de rappel du ressort et le poids, ainsi ces forces se compensent et: $-mg + k(l_{\text{eq}} - l_0) = 0$

$$\text{D'où } l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k}.$$

2. On se place dans le référentiel non galiléen R_c en translation par rapport à R_T . Dans ce référentiel, la masse est soumise à :

* La force de rappel $\vec{F}_r = k(l - z) \vec{e}_z$

* Le frottement fluide $\vec{f} = -h \dot{z} \vec{e}_z$

* Le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{e}_z$

* La pseudo-force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i.e.} = -m\vec{a}(c/R_T)$

d'où $\vec{F}_{i.e.} = -m\ddot{z}_c \vec{e}_z$

Le PFD appliqué à la masse projeté selon \vec{e}_z donne :

$$m\ddot{z} + h\dot{z} - k(l - z) - mg = m\ddot{z}_c$$

Or : $-z = l - l_0 = l - l_0 - \frac{mg}{k}$ d'où :

$$\ddot{z} + \frac{h}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \ddot{z}_c$$

3. C'est un système d'ordre 2 de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de facteur de qualité Q tel que $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m}$ d'où $Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$.

On a un régime critique si $Q = \frac{1}{2}$, alors :

$$\ddot{z} + 2\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \ddot{z}_c$$

Dans cette configuration, le régime libre converge, le plus rapidement possible donc on peut supposer que le sinusénoïde répond rapidement par rapport au temps caractéristique du système et supposer qu'on est en régime sinusoïdal forcé.

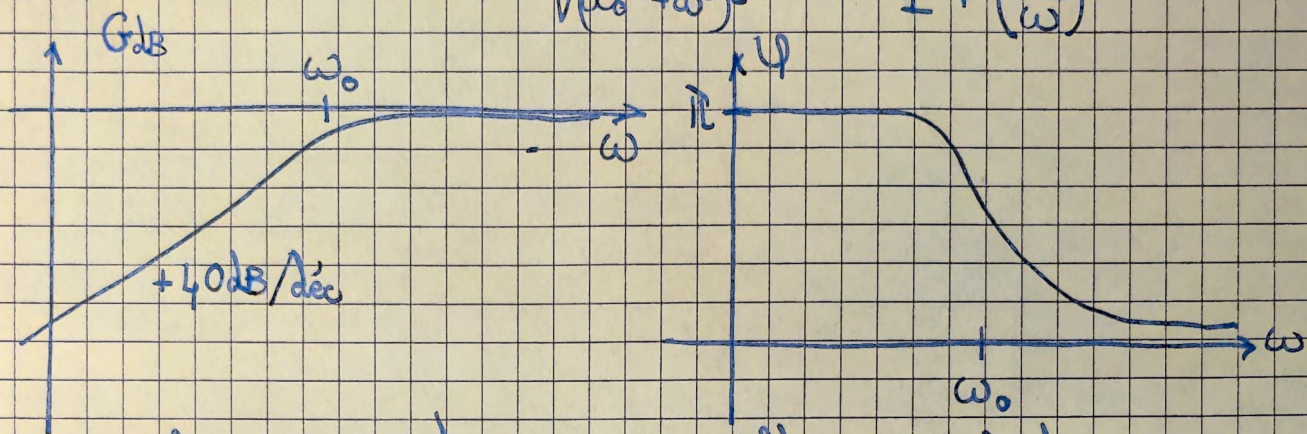
4. En complexes : $(-\omega^2 + 2j\omega\omega_0 + \omega_0^2) \underline{z} = \underline{z}_c \times (-\omega^2)$

D'où : $\underline{z} = \frac{-\omega^2 \underline{z}_c}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_0} = z_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$

où $z_0 = \frac{z_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2}}$ et $\varphi = \arctan\left(\frac{2\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$.

Alors : $z(t) = z_0 \cos(\omega t + \varphi)$

5. On peut écrire $Z_0 = \frac{Z_0 \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 + \omega_0^2)^2}} = \frac{Z_0}{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}$.



Le sismographe se comporte comme un filtre passe-haut. Pour avoir une mesure fiable de l'onde il faut que $Z_0 = Z_0$ ce qui est le cas pour $\omega \gg \omega_0$ donc à haute fréquence : il faut donc choisir un appareil avec une fréquence de résonance la plus basse possible.

III - Référentiels en rotation

4 - Anneau sur une tige en rotation

1. Le point M, dans le référentiel terrestre galiléen, a une énergie mécanique $E_M = \frac{1}{2} m v^2 + m g z$

Or M se déplace le long de l'axe vers le bas donc :

$$\cos(\alpha) \|\vec{v}\| = \left| \frac{dz}{dt} \right|$$

$$\text{D'où : } E_M = \frac{m}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + m g z$$

et $z_0 = 2R \cos(\alpha)$ est l'altitude initiale de laquelle M est lâché. On applique le théorème de l'énergie mécanique à M dans R_T galiléen : $E_M = c^{ste} = E_M(t=0) = m g z_0$

$$\text{On a alors : } m g (z_0 - z) = \frac{m}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2$$

$$\text{D'où : } dt = \frac{1}{\cos \alpha} \times \frac{dz}{\sqrt{2g(z_0 - z)}}$$

La durée du parcours est:

$$t = \int_0^{z_0} dt = \frac{1}{\cos(\alpha) \sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z_0 - z}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cos(\alpha) \sqrt{g}} \int_0^{z_0} \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{\sqrt{2} z_0}{\sqrt{g} \cos \alpha} \quad \text{or } z_0 = 2R \cos \alpha$$

D'où:

$$t = 2 \sqrt{\frac{2R}{g \cos \alpha}}$$

2. Dans le référentiel du cerceau M est soumis à deux nouvelles forces:

* La force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i.e.} = m g \tan(\alpha) \Omega^2 \vec{e}_r$
 où \vec{e}_r est défini en coordonnées cylindriques autour de (Oz)

Cette force dérive d'une pseudo-énergie potentielle effective:

$$\vec{F}_{i.e.} = - \text{grad}(E_{p,i.e.}) \quad \text{avec } E_{p,i.e.} = -\frac{1}{2} m r^2 \Omega^2$$

$$\text{et } r = z \tan(\alpha) \quad \text{d'où } E_{p,i.e.} = -\frac{1}{2} m z^2 \tan^2(\alpha) \Omega^2$$

* La force de Coriolis $\vec{F}_{\text{Cor}} = 2m \Omega \wedge \vec{v}$ qui ne travaille pas

On applique le théorème de l'énergie mécanique dans le référentiel du cerceau en prenant en compte les pseudo-forces liées au caractère non galiléen du référentiel:

$$E_m = \frac{m}{2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + m g z - \frac{1}{2} m z^2 \tan^2 \alpha \cdot \Omega^2 = c^{\text{ste}}$$

$$\text{avec } E_m(t=0) = m g z_0 - \frac{1}{2} m z_0^2 \tan^2 \alpha \cdot \Omega^2$$

$$\text{D'où: } \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = \cos^2(\alpha) 2g(z_0 - z) - \sin^2(\alpha) \Omega^2 (z_0 - z)(z_0 + z)$$

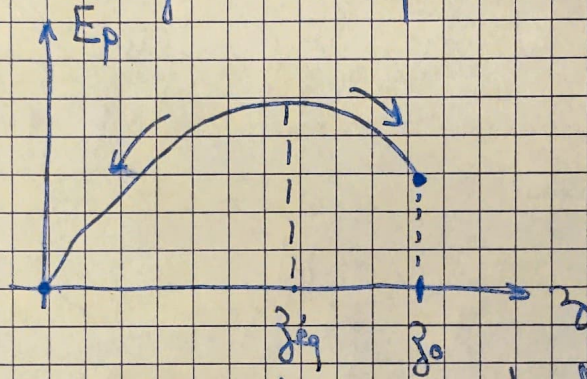
$$= (z_0 - z) \left[2g \cos^2(\alpha) - \Omega^2 \sin^2(\alpha) (z_0 + z) \right]$$

Les positions d'équilibre sont atteintes pour les minima d'énergie potentielle $E_p = m g z - \frac{1}{2} m z^2 \tan^2 \alpha \cdot \Omega^2$.

On a $\frac{dE_p}{dz} = m(g - z\Omega^2 \tan^2 \alpha)$

$\frac{dE_p}{dz} = 0 \Leftrightarrow z_{\text{eq}} = \frac{g}{\Omega^2 \tan^2 \alpha}$ ce qui fournit une position d'équilibre.

Il s'agit d'un équilibre instable:



Si $z(t=0) < z_{\text{eq}}$ le point M va tomber en $z=0$

Si $z(t=0) > z_{\text{eq}}$ le point M va monter et s'éloigner du centre par effet de la pseudo-force d'inertie d'entraînement.

5 - Limite de Roche

1. On se place dans le référentiel dont l'origine est au centre de Saturne et dont les axes pointent vers des étoiles lointaines. Nous supprimons ce référentiel galiléen.

Dans ce référentiel, l'astéroïde est soumis à la seule force de gravitation $\vec{F}_g = -\gamma \cdot \frac{2m \cdot M_s}{d^2} \vec{e}_z$. Cette force est une force centrale, donc le moment cinétique du centre d'inertie de la comète est constant: $\vec{L}_0 = d \vec{e}_\theta \wedge 2m \vec{v}$

Donc le mouvement se fait dans un plan normal à \vec{L}_0 et passant par O.

Dans ce plan, on se place en coordonnées polaires:

$$\begin{cases} m r (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = -\gamma \cdot \frac{2m M_s}{r^2} \\ m r \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Si on suppose le mouvement circulaire, alors $r = d$ et $\dot{r} = 0$.
 Ainsi : $\ddot{\theta} = 0$ donc le mouvement est uniforme et on note $\Omega = \dot{\theta}$.
 Alors : $-d\Omega^2 = -g \cdot \frac{M_s}{d^2}$ d'où $\Omega = \sqrt{\frac{gM_s}{d^3}}$.

2. Chacune des deux sphères décrit une orbite circulaire de rayon $d \pm r$. On étudie la sphère extérieure et on se place toujours dans le même référentiel, alors en appliquant le PFD à la sphère :

$$m\vec{a} = \vec{R} + \vec{F}_{g, \text{Saturne}} + \vec{F}_{g, \text{int}}$$

où $\begin{cases} \vec{F}_{g, \text{Saturne}} = -g \cdot \frac{mM_s}{(d+r)^2} \vec{e}_r & \text{est la force exercée par Saturne} \\ \vec{F}_{g, \text{int}} = -g \cdot \frac{m^2}{(2r)^2} \vec{e}_r & \text{est la force exercée par l'autre comète} \end{cases}$

Alors : $\vec{R} = m\vec{a} - \vec{F}_{g, \text{Saturne}} - \vec{F}_{g, \text{int}}$

$$= \left[\frac{gM_s}{(d+r)^2} + \frac{g m^2}{4r^2} - \underbrace{m(r+d)\Omega^2}_{= m(r+d) \cdot \frac{gM_s}{d^3}} \right] \vec{e}_r$$

$$= \frac{gM_s}{d^2} \times \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{d}\right)^2} + \frac{M_s}{4\left(\frac{r}{d}\right)^2} - \left(1 + \frac{r}{d}\right) \right] \vec{e}_r$$

$$\stackrel{r \ll d}{\approx} \frac{gM_s}{d^2} \left[\left(1 - \frac{2r}{d}\right) + \frac{\mu}{4\mu_s} \cdot \frac{r d^2}{R_s^3} - \left(1 + \frac{r}{d}\right) \right] \vec{e}_r$$

car $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \mu$ $M_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 \mu_s$

$$\approx \frac{gM_s}{d^2} \left[\frac{\mu}{4\mu_s} \cdot \frac{r d^2}{R_s^3} - \frac{3r}{d} \right] \vec{e}_r$$

Le contact sera rompu si $d \leq d_{\text{lim}}$ tel que $\vec{R} = \vec{0}$, avec

$$\frac{\mu r_0 d_{\text{lim}}^2}{4\mu_s R_s^3} = \frac{3r_0}{d_{\text{lim}}}$$

$$\Rightarrow \frac{d_{\text{lim}}}{R_s} = \sqrt[3]{\frac{12\mu_s}{\mu}}$$

$$\Rightarrow \text{On a } \left(\frac{d_{\text{lim}}}{R_s}\right)^3 = \frac{12\mu_s}{\mu} = \frac{12}{\mu} \times \frac{M_s}{\frac{4}{3}\pi R_s^3} = \frac{9M_s}{\pi \mu R_s^3}$$

Ainsi $\frac{d_{lim}}{R_s} = \sqrt[3]{\frac{3M_s}{11\mu R_s^3}} \approx 1,15$

Autrement dit la distance entre la partie intérieure des anneaux et la surface de Saturne doit être de $0,15 R_s$. Sur la photo on observe plutôt le double, mais notre modèle est très simplifié (les astéroïdes ne sont pas des ensembles de deux sphères).

6 - Sécurité routière

1. Lors de cette phase le conducteur n'agit pas donc la voiture garde sa vitesse initiale: $v(t) = v_0$ et $x(t) = v_0 t$
 Au bout du temps de réaction $x_R = v_0 t_R$.

2. Entre R et A, le véhicule est soumis à son poids qui ne travaille pas (mouvement horizontal), et à la force de réaction de la route dont seule la composante tangentielle travaille.

Par la loi de Coulomb du frottement: $\|\vec{T}\| = \mu_0 \|\vec{N}\|$.

On par le PFD appliqué à la voiture dans le référentiel terrestre et projeté sur la verticale, $\|\vec{N}\| = mg$ donc $\|\vec{T}\| = \mu_0 mg$

d'où: $W(\vec{T}) = \int_R^A \vec{T} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 mg (d_A - x_R)$.

3. On applique le théorème de l'énergie cinétique à la voiture entre R et A dans le référentiel terrestre: $\Delta E_c = W(\vec{T})$

D'où: $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -\mu_0 mg (d_A - x_R)$

Ainsi $d_A = x_R + \frac{v_0^2}{2\mu_0 g} = v_0 t_R + \frac{v_0^2}{2\mu_0 g}$

On trouve $\left\{ \begin{array}{l} d_A = 118 \text{ m sur chaussée sèche} \\ d_A = 145 \text{ m sur chaussée mouillée} \end{array} \right.$

4. Dans ce cas, on a en plus une variation d'énergie potentielle

$$\Delta E_p = mg(z_A - z_R) = mg \sin(\epsilon) (d_A - x_R) \text{ lors de la 2^e phase}$$

De plus, le PFD appliqué à la voiture projeté perpendiculairement à (Ox) donne désormais $\|\vec{N}\| = mg \cos(\epsilon)$ donc le travail de la force de frottement est $W(\vec{F}) = -mg\mu_0 \cos(\epsilon) (d_A - x_R)$

On applique le théorème de l'énergie mécanique à la voiture entre R et A :

$$-\frac{1}{2} m v_0^2 + mg \sin(\epsilon) (d_A - x_R) = -mg\mu_0 \cos(\epsilon) (d_A - x_R)$$

$$D'où : mg(d_A - x_R) [\mu_0 \cos \epsilon + \sin \epsilon] = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\text{Ainsi : } d_A = x_R + \frac{v_0^2}{2g(\mu_0 \cos \epsilon + \sin \epsilon)} = 110 \text{ m}$$

2^e partie : relèvement d'un virage

1. On a $a_{\theta} = -R\dot{\theta}^2$ et $a_{\phi} = R\ddot{\theta}$

2. Dans ce cas on a $R\dot{\theta} = v$ d'où $\dot{\theta} = \frac{v}{R} = c^{ste}$. On en déduit que l'accélération est purement radiale $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ ou encore $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$.

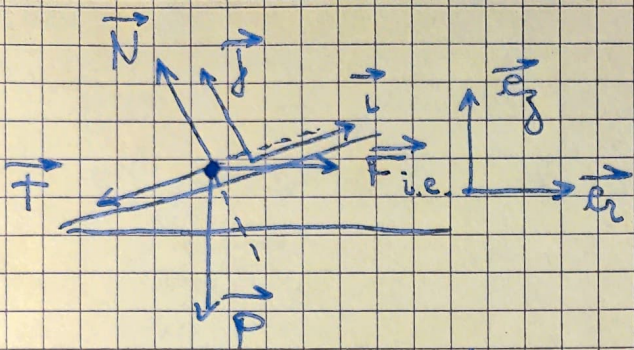
Dans le référentiel de la voiture, on a une pseudo-force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{i.e.} = +m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r = -m \vec{a}$.

La pseudo-force de Coriolis est nulle dans ce référentiel car la voiture est immobile.

3. Dans le référentiel lié à la voiture, celle-ci est immobile et soumise à son poids \vec{P} , la réaction de la route $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ et la force d'inertie $\vec{F}_{i.e.}$.

La voiture étant immobile ces forces se compensent $\vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{i.e.} = \vec{0}$

On projette sur l'axe parallèle à la route et perpendiculaire à la route (vecteurs \vec{i} et \vec{j}) :



$$\begin{cases} N = mg \cos \beta + m \frac{v^2}{R} \sin \beta \\ T = -mg \sin \beta + m \frac{v^2}{R} \cos \beta \end{cases}$$

4. La voiture ne dérape pas si la condition d'adhérence est vérifiée $\|T\| \leq \mu_s \|N\|$, ici on suppose égalité entre les coefficients de frottement statique et dynamique, il faut que :

$$m \frac{v^2}{R} \cos \beta - mg \sin \beta \leq \mu_0 \left(m \frac{v^2}{R} \sin \beta + mg \cos \beta \right)$$

$$\Rightarrow v^2 (\cos \beta - \mu_0 \sin \beta) \leq Rg (\sin \beta + \mu_0 \cos \beta)$$

$$\Rightarrow v \leq v_{\max} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\sin \beta + \mu_0 \cos \beta}{\cos \beta - \mu_0 \sin \beta}}$$

5. Si $\beta = 0$ alors $v_{\max} = \sqrt{Rg \mu_0} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Si le virage est mauvais μ_0 diminue et v_{\max} aussi : $v_{\max} = 62 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
 Quand le frottement tend vers 0 (verglas, $\mu_0 \rightarrow 0$) alors $v_{\max} \rightarrow 0$ et il faut aborder le virage très lentement.

6. On trouve alors $v_{\max} = 74 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$: l'effet est relativement faible et il n'est utile que pour les forts virages avec plex inclinés importants (par exemple lors d'une course automobile).

7 - Pendule de Foucault

1. a. La force d'inertie d'entraînement liée à la rotation de la

terre a pour norme :

$$\|F_{ie}\| \approx m R_T \cdot \Omega^2 \approx m \cdot R_T \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \text{ où } T = 1 \text{ j} = 86400 \text{ s}$$

$$\frac{\|F_{ie}\|}{\|P\|} = \frac{R_T}{g} \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ donc la force d'inertie}$$

d'entraînement est négligeable devant le poids.

b. Dans le référentiel terrestre non galiléen la masse est soumise à :

* La tension du fil $\vec{T} = -T \vec{e}_x$

* Son poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_y$

* La force d'inertie d'entraînement négligeable

* Celle de Coriolis que l'on néglige également

Par le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse :

$$m\vec{a} = -T \vec{e}_x - mg \vec{e}_y$$

On projette :

$$\begin{cases} T = mg \cos \alpha + l \ddot{\alpha} \\ ml \ddot{\alpha} + mg \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

c. Si $\alpha \ll 2\pi$ alors $\sin \alpha \approx \alpha$ et $\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$ où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \text{ on a } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 16,3 \text{ s.}$$

d. La masse a un mouvement selon \vec{e}_x :

$$\vec{v} = l \dot{\alpha} \vec{e}_x = l \dot{\alpha} (\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y) \approx l \dot{\alpha} \vec{e}_x$$

en supposant que le mouvement se fait dans le plan (Oxz) , le mouvement est donc horizontal.

2. a. On a $\Omega = \frac{2\pi}{T_f}$ avec $T_f = 86400 \text{ s}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$

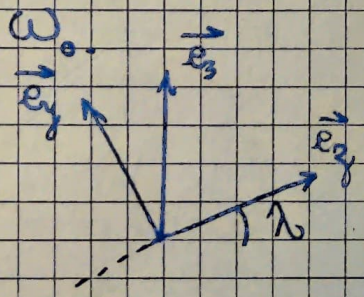
$$\text{soit : } \frac{T_f}{T} = \frac{86400}{16,3} \gg 1 \text{ donc } \Omega \ll \omega_0$$

b. On a $\vec{e}_3 = \sin \lambda \vec{e}_z + \cos \lambda \vec{e}_y$

$$\text{Et } \vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_3$$

D'où la force de Coriolis :

$$\vec{F}_{\text{Cor.}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2\Omega m \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \lambda \\ \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = -2\Omega m \begin{pmatrix} -\sin \lambda y \\ \sin \lambda \dot{x} \\ \cos \lambda \dot{x} \end{pmatrix}$$



Dans (R) la masse est soumise à \vec{F}_{cor} et à la résultante des autres forces, le PFD projeté sur \vec{e}_x et \vec{e}_y donne:

$$\begin{cases} m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x + 2 \Omega m \sin \lambda \dot{y} \\ m \ddot{y} = -m \omega_0^2 y - 2 \Omega m \sin \lambda \dot{x} \end{cases}$$

Où encore
$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2 \tilde{\Omega} \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2 \tilde{\Omega} \dot{x} \end{cases} \quad \text{où } \tilde{\Omega} = \Omega \sin \lambda$$

c. Alors
$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = 2 \tilde{\Omega} (\dot{y} - i \dot{x}) = -2i \tilde{\Omega} \dot{u}$$

D'où
$$\ddot{u} + 2i \tilde{\Omega} \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Le polynôme caractéristique est $\chi^2 + 2i \tilde{\Omega} \chi + \omega_0^2 = 0$

Discriminant réduit: $\Delta' = (i \tilde{\Omega})^2 - \omega_0^2 = -(\omega_0^2 + \tilde{\Omega}^2)$

D'où:
$$\underline{\chi}_0 = -i \tilde{\Omega} \pm i \sqrt{\Delta'} = -i (\tilde{\Omega} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\Omega}^2})$$

Deux racines:
$$\begin{cases} \underline{\chi}_1 = -i (\tilde{\Omega} + \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}) \\ \underline{\chi}_2 = i (\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega}) \end{cases}$$

Et:
$$\underline{u}(t) = \underline{A} e^{\underline{\chi}_1 t} + \underline{B} e^{\underline{\chi}_2 t} = \underline{A} e^{-i(\tilde{\Omega} + \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2})t} + \underline{B} e^{i(\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega})t}$$

d. Alors
$$\underline{u}(t=0) = x_0 \quad \dot{\underline{u}}(t=0) = 0$$

D'où
$$\underline{A} + \underline{B} = x_0 \quad (1)$$

$$-\underline{A} (\tilde{\Omega} + \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}) + \underline{B} (\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega}) = 0 \quad (2)$$

Ainsi $(1) + (2)$ $(1) \times (\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega}) - (2)$ donne:

$$\underline{A} = x_0 \cdot \frac{\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} - \tilde{\Omega}}{2 \sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}} = x_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}} \right)$$

$$\underline{B} = x_0 - \underline{A} = x_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\Omega}}{\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2}} \right)$$

e. Comme $\tilde{\Omega} \ll \omega_0$, on a :

$$\sqrt{\tilde{\Omega}^2 + \omega_0^2} = \omega_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0}\right)^2} \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$\approx \omega_0 + \frac{\tilde{\Omega}^2}{2\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 + \tilde{\Omega}^2}} \approx \frac{1}{\omega_0} - \frac{\tilde{\Omega}^2}{2\omega_0^3}$$

D'où :

$$\underline{A} \approx x_0 \left[\frac{1}{2} - \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} + \frac{\tilde{\Omega}^3}{2\omega_0^3} \right] \quad \underline{r}_1 \approx -i(\omega_0 + \tilde{\Omega})$$

$$\underline{B} \approx x_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} - \frac{\tilde{\Omega}^3}{2\omega_0^3} \right] \quad \underline{r}_2 \approx i(\omega_0 - \tilde{\Omega})$$

Et :

$$\underline{u}(t) \approx x_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} \right) e^{-i(\omega_0 + \tilde{\Omega})t} + x_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} \right) e^{i(\omega_0 - \tilde{\Omega})t}$$

$$= x_0 e^{-i\tilde{\Omega}t} \left[\cos(\omega_0 t) + \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0} \times 2i \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\approx x_0 e^{-i\tilde{\Omega}t} \cos(\omega_0 t) \quad \text{au premier ordre en } \frac{\tilde{\Omega}}{\omega_0}$$

Soit :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\tilde{\Omega} t) \\ y(t) = -x_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\tilde{\Omega} t) \end{cases}$$

On obtient des oscillations de pulsation ω_0 correspondant au mouvement du pendule mais dans un plan qui tourne à la pulsation $\tilde{\Omega}$.

f. On a $\psi(t) = \tilde{\Omega} t = \Omega \cdot t \cdot \sin(\lambda) = \frac{2\pi t}{T_{\text{jour}}} \times t \times \sin(\lambda)$

En un jour ($t = T_{\text{jour}}$) : $\psi = \frac{2\pi \sin(\lambda)}{\text{en radians}} = 360^\circ \times \sin(\lambda)$

On trouve : $\psi = 360 \times \sin(49^\circ) = 271^\circ$

En Guadeloupe $\psi = 99^\circ$: le pendule tourne plus lentement.

Le pendule revient à sa position initiale après 24h si $\sin \lambda = \pm 1$ donc au pôle Nord et au pôle Sud.

g. Il faut que le pendule oscille suffisamment longtemps ($\sim 24h$) sans être perturbé par les frottements de l'air ou des vibrations à haute

fréquence ainsi il est judicieux de choisir une masse élevée (plus d'inertie) et un pendule long (période d'oscillation plus longue).

b. Si le professeur peut maintenir le pendule sans aucune vibration ou tremblement pendant $\sim 24h$, il pourra mesurer l'angle de déviation ψ du plan d'oscillation et en déduire la latitude à laquelle il se trouve.

En pratique, il ne peut pas attendre $24h$ et il tremble/bouge à des fréquences proches de la pulsation propre du pendule donc sa méthode ne peut pas fonctionner.