DM20 - Correction

I - Étude d'une carte de marée

1. On constate que les marées les plus importantes sont observées au fond des baies (baie de Cardiff, du M^t S^t Michel, baie de Somme). C'est la structure géographique de la baie qui modifie les conditions aux limites et augmente l'amplitude locale des marées.

2. On observe les lignes cotidales : la marée se propage d'Ouest en Est dans la Manche en environ 7h.
   Ceci n'est pas compatible avec la rotation de la Terre :
   * le point subsolaire se déplace d'Est en Ouest, car la Terre tourne d'Est en Ouest donc les marées devraient aussi aller dans ce sens
   * la vitesse de propagation observée est bien trop lente pour faire le tour de la Terre en 24h.

3. Les marées océaniques ont une période de 12,5h. La vitesse de phase est la vitesse de propagation de la pleine mer (maximum de hauteur d'eau) : $v_\varphi \simeq \dfrac{200\text{ km}}{3\text{ hr}} \sim 70\text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \sim \boxed{20\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$

   On en déduit : $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{v_\varphi} = \dfrac{2\pi}{T \times v_\varphi}$.

   D'où $\lambda = v_\varphi \times T = 70 \times 12{,}5 \simeq \boxed{870\text{ km}}$.

4. L'onde de marée se propage vers l'Est-Nord-Est mais en raison de la pseudo-force d'inertie de Coriolis, elle est déviée vers la

droite donc vers les côtes françaises. La hauteur d'eau augmente au niveau de ces côtes ce qui vient compenser la pseudo-force $\vec{f}_{i.c}$:

propagation $\vec{v}_\varphi$ $\otimes$ $\uparrow \vec{\Omega}$ rotation Terrestre

$\vec{F} \longleftarrow \bullet \longrightarrow \vec{f}_{i.c.} = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_\varphi \cdot m$

force liée au gradient de pression (plus d'eau côté français)

pseudo-force d'inertie de Coriolis

5. Cet estuaire se situe dans une zone à fort marnage (environ 11 m entre la marée haute et la marée basse). Dans l'estuaire de la Seine, le marnage est presque deux fois moindre donc il est moins intéressant d'y construire une usine marémotrice.

II - Champ de marée

6. On a $\boxed{\vec{g}_A(M) = -\frac{\mathcal{G} m_A}{r^2}\vec{e_r}}$.

7. Le référentiel géocentrique est un référentiel dont l'origine est au centre de la Terre et les axes pointent vers des étoiles lointaines. Le référentiel géocentrique est en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique. Comme il s'agit d'un mouvement de translation, dans le référentiel géocentrique, on a, en supposant le référentiel héliocentrique galiléen, une force d'inertie d'entraînement : $\boxed{\vec{f}_{i.e.} = -m\,\vec{a}(T/R_{hélio})}$

8. On applique dans le référentiel héliocentrique, supposé galiléen, le

PFD à la Terre, soumise à la seule force de gravitation :

$$m_T \vec{a}(T/\mathcal{R}_{hélio}) = m_T \vec{g}_S(T)$$

D'où $\vec{a}(T/\mathcal{R}_{hélio}) = \vec{g}_S(T)$ et $\vec{F}_{i.e.} = -m\vec{g}_S(T)$

Or d'après Q6, $\vec{g}_S(T) = -\frac{G M_S}{d_S^2}\vec{e_r}$ distance Terre-Soleil

D'où : $\boxed{\vec{F}_{i.e.} = \frac{G m M_S}{d_S^2}\vec{e_r}}$ où $\vec{e_r}$ pointe du Soleil vers la Terre

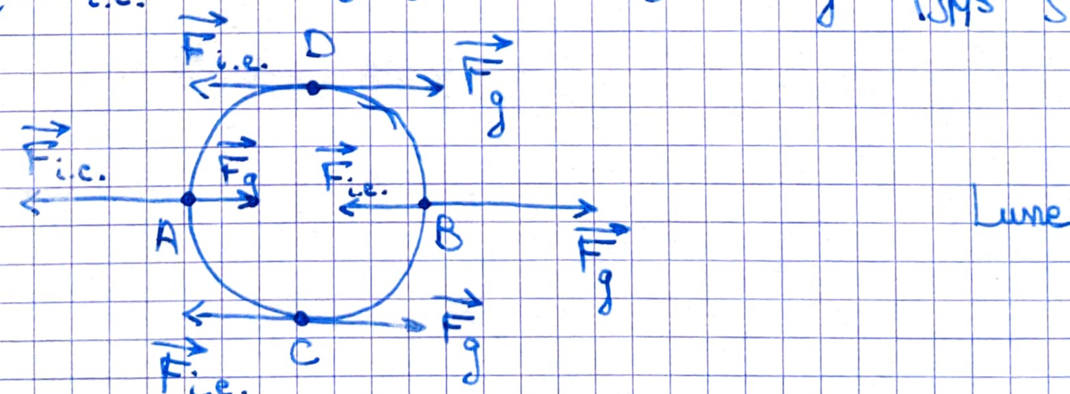
9. On peut réécrire : $\vec{F}_{i.e.} = G m M_S \times \frac{\vec{ST}}{ST^3}$.

De plus la force de gravitation due au Soleil vaut :

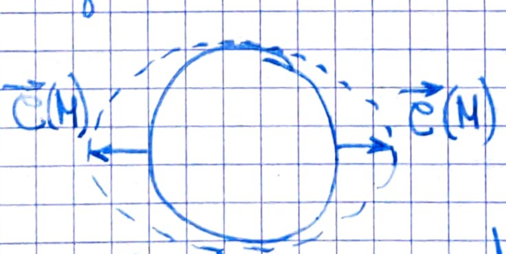
$$\vec{F_g} = -\frac{G m M_S}{\|\vec{SM}\|^2}\cdot\frac{\vec{SM}}{\|\vec{SM}\|} = -G m M_S \frac{\vec{SM}}{SM^3}$$

Ainsi : $\vec{F_g} + \vec{F}_{i.e.} = m\vec{C}_S(M)$ où $\vec{C}_S(M) = -G M_S\left(\frac{\vec{SH}}{SM^3} - \frac{\vec{ST}}{ST^3}\right)$.

10.



La résultante des forces est la suivante :



On a donc une marée haute aux points A et B, et une marée basse aux points C et D. Les points de marée basse sont dans le plan passant par le centre de la Terre et normal à l'axe Terre-Lune.

12. La 3e loi de Kepler relie la distance Terre-Lune d_L à la période du mouvement : $\dfrac{d_L^3}{T_L^2} = \dfrac{\mathcal{G} m_T}{4\pi^2}$

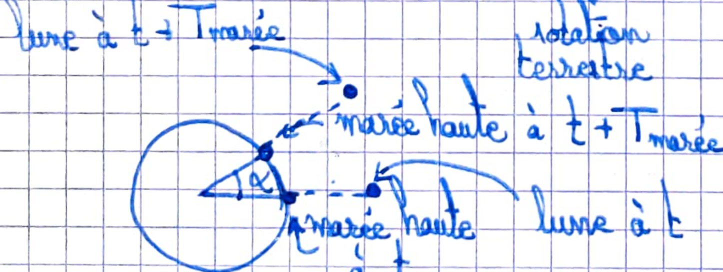
Donc $T_L \simeq 2\pi \sqrt{\dfrac{d_L^3}{\mathcal{G} m_T}} \simeq 6 \cdot \sqrt{\dfrac{4^3 \cdot 10^{24}}{7 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}} \simeq 6\sqrt{16 \cdot 10^{10}}$

$\simeq 24 \cdot 10^5 \,s \sim \dfrac{\pi \cdot 10^7}{12}\, s \sim \boxed{1 \text{ mois}}$

13. On a $T_T = 1 \text{ jour} = 86\,400\,s \sim \boxed{10^5\,s}$

Ainsi $T_L \gg T_T$ et la Lune peut être considérée comme quasi fixe. Pour être précis, entre deux marées hautes successives la Lune aura avancé donc on se retrouvera au point sublunaire après :

$$T_{marée} = \underbrace{\frac{T_T}{2}}_{\text{rotation terrestre}} + \underbrace{\frac{\alpha}{\Omega_T}}_{\text{temps de décalage pour retrouver la Lune}}$$



$\alpha = \Omega_L T_{marée} = 2\pi \dfrac{T_{marée}}{T_L}$

D'où : $T_{marée} = \dfrac{T_T}{2} + \dfrac{T_{marée}\, T_T}{T_L} \underset{\substack{\text{au 1er ordre} \\ T_{marée} \simeq \frac{T_T}{2}}}{\simeq} \dfrac{T_T}{2}\left(1 + \dfrac{T_T}{T_L}\right)$

$\simeq \dfrac{24\,h}{2}\left(1 + \dfrac{1}{30}\right) \simeq \boxed{12{,}4\,h}$

On retrouve bien la période usuelle des marées.

14. On a $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TM} = -d_L \vec{e_z} + r\vec{e_r}$

Alors : $\|\overrightarrow{LM}\|^2 = \overrightarrow{LM} \cdot \overrightarrow{LM} = d_L^2 + r^2 - 2r d_L \underbrace{\cos\theta}_{\vec{e_r} \cdot \vec{e_z}}$

Au premier ordre non nul :

$$\|\overrightarrow{LM}\|^2 \simeq d_L^2 - 2 r d_L \cos\theta \simeq d_L^2\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos\theta\right)$$

Donc, en faisant un DL 1 :

$$\|\overrightarrow{LM}\|^{-3} = \left(\|\overrightarrow{LM}\|^2\right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \frac{1}{d_L^3}\left(1 + 3\frac{r}{d_L}\cos\theta\right)$$

15. On en déduit :

$$\frac{\overrightarrow{LM}}{\|\overrightarrow{LM}\|^3} \simeq \frac{1}{d_L^3}\left(1 + 3\frac{r}{d_L}\cos\theta\right) \times d_L\left(-\vec{e_z} + \frac{r}{d_L}\vec{e_r}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{d_L^2}\left[-\vec{e_z} - 3\frac{r}{d_L}\cos\theta\,\vec{e_z} + \frac{r}{d_L}\vec{e_r}\right]$$

Ainsi $\dfrac{\overrightarrow{LM}}{\|\overrightarrow{LM}\|^3} - \dfrac{\overrightarrow{LT}}{\|\overrightarrow{LT}\|^3} = -\dfrac{r}{d_L^3}\left(-\vec{e_r} + 3\cos\theta\,\vec{e_z}\right)$

Et $\boxed{\vec{C_L}(M) = \dfrac{\mathcal{G} m_L r}{d_L^3}\left(3\cos\theta\,\vec{e_z} - \vec{e_r}\right)}$

16. On constate alors que par analogie $\vec{C_S}(M) = \dfrac{\mathcal{G} m_S r}{d_S^3}\left(3\cos\theta\,\vec{e_z} - \vec{e_r}\right)$

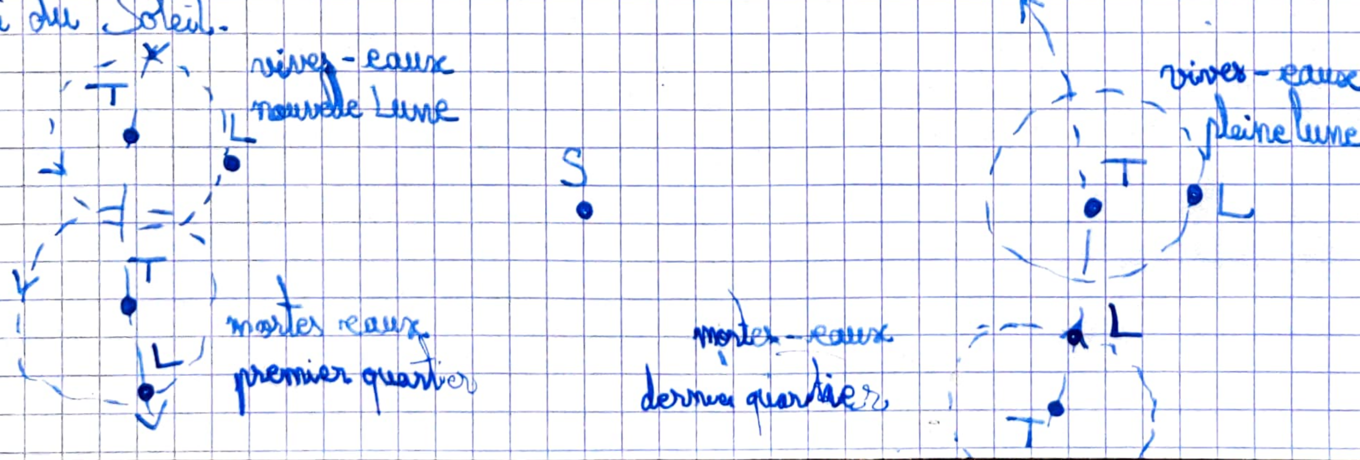
lorsque Lune et Soleil sont alignés (même vecteur $\vec{e_z}$).

Alors $\dfrac{\|\vec{C_L}(M)\|}{\|\vec{C_S}(M)\|} = \dfrac{m_L}{m_S}\cdot\left(\dfrac{d_S}{d_L}\right)^3 \simeq \dfrac{7\cdot 10^{22}}{2\cdot 10^{30}}\cdot\left(\dfrac{1{,}5\cdot 10^{11}}{3{,}8\cdot 10^{8}}\right)^3$

$$\simeq \frac{7}{2}\cdot 10^{-8}\cdot\frac{1}{10}\cdot 10^{9} \simeq 1{,}7$$

Donc la Lune a bien un champ de marée de l'ordre du double de celui du Soleil.

17.



On voit que les grandes marées (vives-eaux) ont lieu quand la Lune et le Soleil sont dans la même direction donc à la ~~nouvelle~~ pleine Lune.
Ceci implique que la périodicité de l'alternance vives-eaux/mortes-eaux se fait à la demi-période de rotation de la Lune, corrigée de l'angle que fait la Terre au cours d'une rotation de Lune autour du Soleil. Par un calcul très similaire à Q13 :

$$T_{VE/ME} = \frac{1}{2} T_L \left(1 + \frac{T_L}{T_S} \right)$$ où $T_S = 1$ an est la période de rotation de la Terre autour du Soleil

$$= 28 \text{ jours} \times \left(1 + \frac{1}{12} \right) \times \frac{1}{2}$$

$$\simeq 15 \text{ jours}$$

III - Ondes de marée dans un bassin océanique

18. Au vu du résultat de Q2, $\lambda \sim 10^3$ km. On a donc :

$$kH \simeq 2\pi \times \frac{H}{\lambda} \ll 1$$ car $H \sim 5$ km (profondeur des océans), $\lambda \sim 10^3$ km

Ainsi $\tanh(kH) \simeq kH$.

De plus :
$$\frac{\frac{\gamma k^3}{\rho}}{gk} \simeq \frac{\gamma k^2}{\rho g} = \frac{4\pi^2 \gamma}{\rho g \lambda^2} \sim \frac{40 \cdot 7 \cdot 10^{-2}}{10^3 \cdot 10 \cdot 10^{12}} \sim 10^{-16}$$

Donc l'effet de la tension de surface de l'eau est négligeable.
La relation de dispersion devient : $\omega^2 = gh k^2 = k^2 c^2$

ou encore $k = \frac{\omega}{c}$ avec $\boxed{c = \sqrt{gH}}$

C'est la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert avec une célérité c.

19. La présence d'une limite en $x = L$ empêche d'avoir une propagation de l'onde de marée dans la direction du bassin

donc il est logique de chercher une onde stationnaire. De plus, le forçage étant sinusoïdal en fonction du temps, on a a priori une solution également sinusoïdale (l'équation de propagation est linéaire).

L'équation de d'Alembert s'écrit $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$.

D'où, en réinjectant : $-\frac{\omega^2}{c^2} f(x) = f''(x)$

Ou encore $f''(x) + k^2 f(x) = 0$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. On a donc

$f(x) = A\cos(kx + \psi)$ où A et ψ sont à déterminer.

20. En $x = 0$ on a $\xi(x=0,t) = \xi_0 \cos(\omega t) = A\cos(\psi)\cos(\omega t + \psi)$

Donc $A\cos(\psi) = \xi_0$ et $\psi = 0$.

En $x = L$: $\frac{d\xi}{dx} = -kA\sin(kL + \psi)\cos(\omega t) = 0$

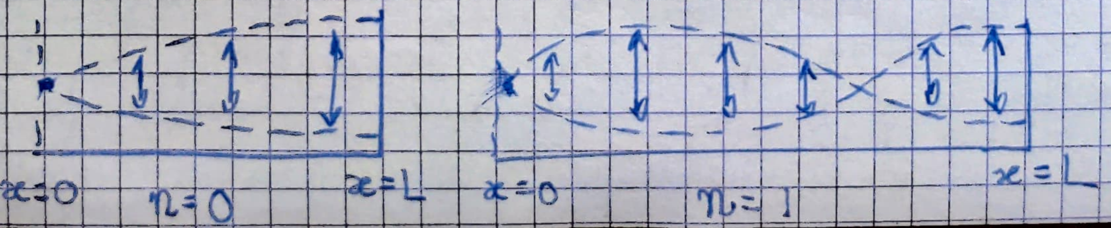
D'où : $\begin{cases} A\sin(kL+\psi) = 0 \\ A\cos(\psi) = \xi_0 \end{cases} \Rightarrow \psi = -kL$ ou $\pi - kL$

On a alors : $A = \frac{\xi_0}{\cos\psi} = \frac{\xi_0}{|\cos(kL)|}$ car $|\cos(kL)| = |\cos(kL - \pi)|$

Ainsi : $\boxed{\xi(x,t) = \xi_0 \cos(\omega t) \times \frac{\cos(k(x-L))}{\cos(kL)}}$

21. L'amplitude des ondes diverge lorsque $\cos(kL) \to 0$, il y a alors résonance. Ceci se produit si : $\exists n \in \mathbb{N}$, $kL = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Ou encore : $\frac{2\pi L}{\lambda} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ soit $\boxed{L = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}}$



Il y a résonance de la marée dans la baie du Mont-St-Michel, on a alors $L = \frac{\lambda}{4}$ (au vu des ordres de grandeurs cités précédemment on a $n=0$)

Et donc $\lambda = 1000$ km d'où $c = \frac{\lambda}{T} = \sqrt{gH}$

Ainsi $H = \frac{\lambda^2}{gT^2} = \boxed{51 \text{ m}}$: c'est effectivement une baie peu profonde et l'hypothèse $H \ll \lambda$ faite en Q18 est bien vérifiée.

22. Désormais, on a toujours :

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t)\cos(kx+\psi)$$

Mais les conditions aux limites deviennent $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x=0) = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x=L) = 0$

Ainsi $\begin{cases} \sin(\psi) = 0 & \Rightarrow \psi = 0 \text{ ou } \pi \\ \sin(kL+\psi) = 0 & \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, kL = n\pi \end{cases}$

D'où : $\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$ est la condition pour avoir une onde stationnaire de marée.

23. Dans la Méditerranée : $\lambda = \sqrt{gH} \times T \simeq 6\,300$ km.

$\frac{2L}{\lambda} \simeq 0,5$ n'est pas du tout un entier (au contraire on est presque le plus éloigné possible d'un entier) donc il ne peut pas y avoir d'ondes stationnaires de marée dans cette mer.

24. On réinjecte dans l'équation avec $\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow i\omega$ et on simplifie par $e^{i\omega t}$:

$$\Delta f + \frac{\omega^2}{c^2} f = \frac{\gamma^2}{c^2} f \quad \text{d'où :} \quad \Delta f + \frac{\omega^2 - \gamma^2}{c^2} f = 0$$

On obtient une équation analogue à la relation de dispersion d'une onde électromagnétique dans un plasma ; seules les ondes dont la pulsation est supérieure à γ peuvent se propager.

25. Cette fonction est telle que : $f(x,y) = \xi_0 \, e^{-\gamma \frac{y}{c}} \, e^{-\frac{i\omega x}{c}}$

Alors :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\xi_0 \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\gamma^2}{c^2}\right) e^{-\frac{\gamma y}{c}} \, e^{-\frac{i\omega x}{c}}$$

$$= -\frac{\omega^2 - \gamma^2}{c^2} f$$ donc la solution convient

26. On obtient alors :

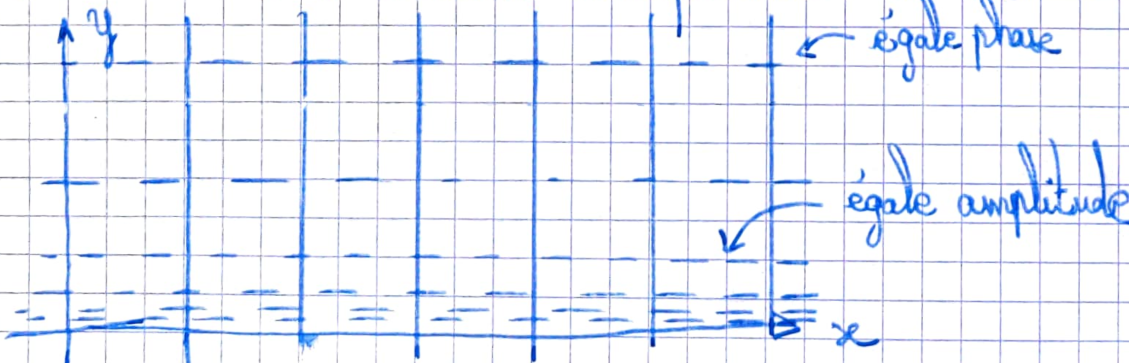
$$\xi(x,y,t) = \xi_0 \, e^{-\frac{\gamma y}{c}} \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

Il s'agit d'une onde progressive selon $+\vec{e_x}$ et stationnaire selon $\vec{e_y}$ avec une décroissance exponentielle, elle est donc évanescente selon $\vec{e_y}$.

Selon $\vec{e_x}$, les ondes se propagent à la vitesse c. Elles sont confinées le long des côtes à cause de l'exponentielle.

27. * L'amplitude est $\xi_0 \, e^{-\frac{\gamma y}{c}}$: les lignes d'égale amplitude sont des droites d'équation $y = c^{te}$

* La phase est $\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)$, à t fixé les lignes d'égale phase sont donc des droites d'équation $x = c^{te}$.



28. On utilise : $e^{-\frac{i\omega x}{c}} + e^{\frac{i\omega x}{c}} = 2\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$

Ainsi $\xi(x,y,t) = 2\xi_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right)$ pour $y = 0$.

Il s'agit d'une onde stationnaire selon x qui présente des noeuds, ou points amphidromiques, lorsque $\cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) = 0$

D'où : $\frac{\omega x}{c} \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

La distance Δx entre de tels points est telle que $\frac{\omega \Delta x}{c} = \pi$

Or, $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ d'où : $\frac{2\pi \Delta x}{\lambda} = \pi$ soit $\boxed{\Delta x = \frac{\lambda}{2}}$

Ce résultat correspond bien à la distance entre deux noeuds pour une onde stationnaire.

Il n'y a pas de tels points pour $y \neq 0$ car on somme alors des sinusoïdes d'amplitude différente.

29. Sur la rive $y = -b$, la phase est plus élevée (donc en retard) pour les x élevés donc l'onde se propage dans le sens des x croissants.

Sur la rive $y = +b$ elle se déplace dans le sens des x décroissants.

Les points A et C sont les points amphidromiques.

30. On constate que dans la Manche, la marée se propage avec des résonances au niveau des baies (amplitude maximale). Dans la mer du Nord, on a la force de Coriolis qui joue un rôle important ce qui produit des ondes de Kelvin et induit la présence de points amphidromiques. L'onde de marée laisse les côtes sur la droite, comme nous l'avons vu pour l'onde étudiée dans les questions précédentes.