

Lycée Baimbridge, MP 2026-2027

à rendre pour le 1er septembre 2026

Physique Chimie

DM 1

Ascenseur spatial

(En partie adapté de Mines MP 2011 et E3A MP 2020)

L'ascenseur spatial est un mécanisme permettant de s'extraire du champ de pesanteur terrestre sans utiliser de fusée. On suppose pour cela qu'un câble réalisé par filage de nanotubes de carbone, de plus de 100 000 km de long, inextensible, a pu être dressé à la verticale d'un point de l'équateur de la Terre. Ce câble possède une masse linéique $\lambda = 1.00 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ (masse linéique = masse par unité de longueur). Cette masse linéique extrêmement faible, associée à une forte résistance mécanique, le rend capable de supporter de très fortes tensions sans casser.

Dans tout le problème, la Terre est assimilée à un corps sphérique homogène de rayon $r_T = 6380 \text{ km}$, de centre O_T et de masse volumique homogène $\mu_T = 5.5 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

1 Etude de l'équilibre du câble

Les notations sont celles de la figure suivante : le point d'ancrage E du câble est un point de l'équateur terrestre, r_T est le rayon de la Terre et O_T son centre. L'altitude du point M du fil est notée z , on note $r = r_T + z = O_TM$ et h la hauteur totale du câble. Le point H représente l'extrémité haute du câble : $z_H = h$ et $r_H = r_T + h$. Ce point est libre. On pourra utiliser le vecteur unitaire $\vec{u}_r = \overrightarrow{O_TM}/r$.

□ **1** – Expliquer pourquoi il convient d'étudier le mouvement dans le référentiel géocentrique.

□ **2** – Rappeler la définition de l'orbite géostationnaire terrestre. Etablir l'expression littérale du rayon r_s correspondant à cette orbite en fonction de la masse m_T de la Terre, de G et de la pulsation sidérale terrestre $\omega_\sigma = \frac{2\pi}{T_\sigma}$.

Dans toute la suite du problème, on considèrera un câble de longueur totale $h = 4r_s - r_T$. On a donc $O_TH = r_H = 4r_s$.

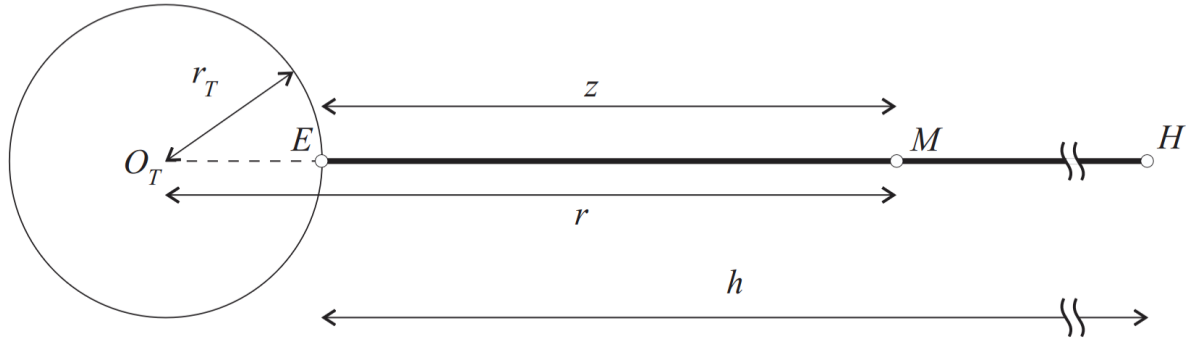


Figure 1: Vue générale de la Terre et du câble.

On note g_s le module de l'accélération de la pesanteur en $r = r_s$, c'est-à-dire la quantité telle que $f_s = mg_s$ où f_s est le module de la force de gravitation subie par un corps de masse m situé en $r = r_s$.

□ **3** – Déterminer g_s en fonction de m_T , G et ω_σ .

Comme le câble est très long, la tension du câble dépend de la position r : on la note donc $T(r)$. On choisit comme système un morceau de câble compris entre r et $r + dr$. Ce câble est soumis à un certain nombre de forces, parmi lesquelles :

- La tension exercée par la partie de câble située entre les rayons $r' = r_T$ et $r' = r$, qui a pour norme $T(r)$;
- La tension exercée par la partie de câble située entre les rayons $r' = r + dr$ et $r' = h$, qui a pour norme $T(r + dr)$.

□ **4** – Etablir l'expression de l'accélération du système dans le référentiel géocentrique, et faire un bilan des forces qui s'appliquent sur le système.

□ **5** – En appliquant le principe fondamental de la dynamique au système, montrer que :

$$T(r + dr) - T(r) = \chi \left(\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right) dr \quad (1)$$

où χ est un paramètre que l'on exprimera en fonction de λ et de g_s . En déduire que :

$$\frac{dT}{dr} = \chi \left(\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right) \quad (2)$$

□ **6** – Expliquer pourquoi on doit avoir $T(r_H) = 0$. En déduire l'expression de la tension $T(r)$ en fonction de χ , r et r_s .

□ **7** – En déduire la tension du fil au niveau du point d’ancrage à l’équateur, ainsi que la tension maximale du fil notée $T_{\max}$.

Le module d’Young d’un matériau, noté E , est une propriété mécanique des matériaux qui dépend de leur structure cristallographique. Il vaut $E_a = 210$ GPa pour l’acier et $E_c = 1$ TPa pour les nanotubes de carbone. Le module d’Young relie la tension qu’un câble est capable de supporter avec la section du câble S selon la loi $T = ES$.

□ **8** – Vérifier la cohérence de cette loi physique par analyse dimensionnelle.

□ **9** – Exprimer la masse linéique du câble λ en fonction de sa section S et de sa masse volumique ρ . Sachant que la densité de l’acier est de 8 et celles des nanotubes de carbone de 1,3, conclure sur le choix du matériau.

2 Protection du câble contre les agressions extérieures

2.1 Cinétique de l’oxydation du câble

Le choix du carbone peut poser problème. En effet, ce matériau peut être oxydé par le dioxygène de l’air pour former du dioxyde de carbone selon la réaction suivante :



□ **10** – Proposer une formule de Lewis pour chacun de ces composés.

Nous souhaitons savoir si cette réaction est suffisamment rapide pour détériorer le câble. Pour cela, nous supposons que la réaction est d’ordre 1 en fonction des deux réactifs (carbone et dioxygène). Ces réactifs n’étant pas en solution aqueuse, la vitesse de réaction ne s’écrit pas en fonction de leur concentration mais on pourra définir, de manière analogue, une vitesse de réaction en fonction de la masse w de carbone. La loi de vitesse est la suivante :

$$v = -\frac{dw}{dt} = k[\text{O}_2]w \quad (4)$$

Une équipe de recherche a travaillé sur cette réaction chimique en laboratoire, dans les conditions habituelles de pression, et a étudié la vitesse de la réaction.

□ **11** – En considérant l’air comme un mélange idéal de gaz parfaits (mélange de dioxygène et de diazote à 21 % en dioxygène), exprimer $[\text{O}_2\text{(g)}]$ en fonction de la pression P , la température T et la constante des gaz parfaits R . En déduire la valeur numérique de $[\text{O}_2]$.

□ **12** – Rappeler la loi d’Arrhénius. On fera intervenir deux constantes A_0 et E_a dont on donnera le sens physique et l’unité.

La valeur de $[O_2]$ a été gardée constante au cours de l'expérience. Les chercheurs ont fait varier la température et ont obtenu les courbes suivantes. La courbe de gauche représente $\frac{dw}{dt}$ en fonction du temps et de la température (l'axe des abscisses est gradué avec les deux variables, en degrés et en minutes). La courbe de droite représente $\ln\left(-\frac{1}{w} \frac{dw}{dt}\right)$ en fonction de $-\frac{1}{T}$.

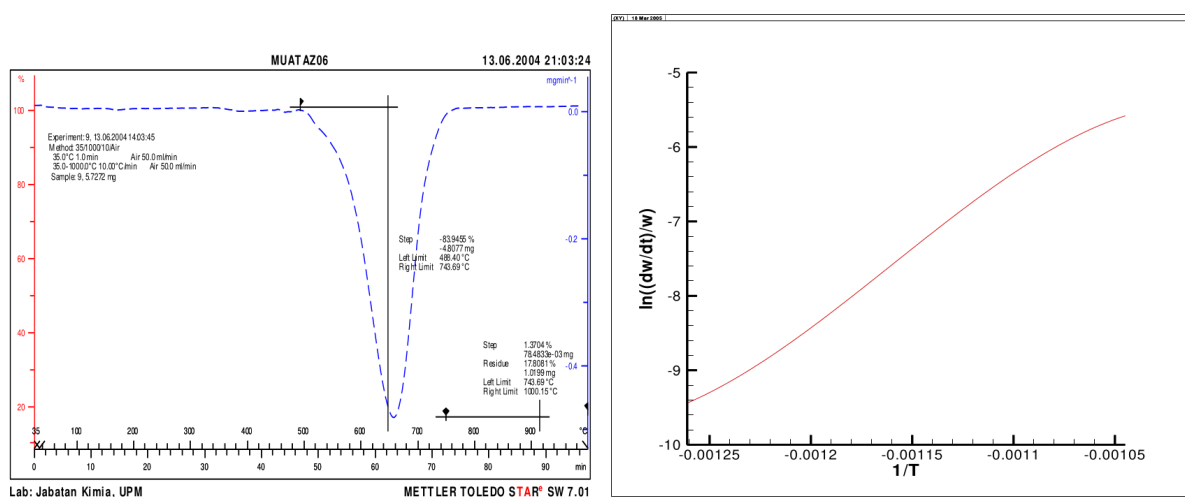


Figure 2: Résultats des expériences menées sur l'oxydation de nanotubes de carbone. A gauche : dérivée temporelle de la masse des nanotubes de carbone en fonction du temps et de la température. A droite : $\ln(-\frac{1}{w} \frac{dw}{dt})$ en fonction de $-1/T$. Le temps est en minutes, w en grammes, et les autres grandeurs en unités SI. Source : *Al-Mayman, S. I., Al-Abbad, N. M., Atieh, M. A. (2014). Thermal oxidation kinetic of carbon nanotubes (CNTs). Arabian Journal for Science and Engineering, 39(2), 621-630.*

- ☐ 13 – Expliquer qualitativement l'allure de la courbe de gauche.
- ☐ 14 – Déduire de la courbe expérimentale la valeur des constantes E_a et A_0 .
- ☐ 15 – En supposant la concentration en dioxygène constante, exprimer $w(t)$ en fonction de la masse initiale de carbone $w(t=0)$, ainsi que d'un temps de demi-vie $t_{1/2}$ que l'on exprimera en fonction de k et de $[O_2]$, puis en fonction de A_0 , E_a et $[O_2]$.
- ☐ 16 – Calculer $t_{1/2}$ à la surface de la Terre, à température ambiante. L'oxydation du carbone présente-t-elle un risque pour le câble ?
- ☐ 17 – Même question dans la mésosphère, à 100 km d'altitude, où la température est de l'ordre de 1000°C et la concentration en dioxygène est environ 10^7 fois plus faible qu'à la surface de la Terre.

Ici, nous avons supposé que la vitesse de la réaction ne dépend pas du diamètre du câble. En réalité, ce n'est pas le cas car la vitesse de la réaction dépend de la surface de contact entre le câble et l'atmosphère. Par ailleurs, dans la mésosphère, la présence d'oxygène atomique O, très réactif, modifie la vitesse de la réaction. Des estimations plus fines peuvent être réalisées mais l'ordre de grandeur de durée de vie d'un câble en carbone est relativement similaire.

2.2 Protection par du nitrure de Titane

Le nitrure de titane, TiN, est un alliage qui peut servir de revêtement afin de remédier à ce problème. Non seulement il a des propriétés de protection contre l'oxydation des matériaux, mais il est par ailleurs extrêmement résistant aux frottements mécaniques, et évite donc l'usure du câble lors du passage de l'ascenseur. Nous allons étudier plus précisément la structure de ce composé chimique.

□ **18** – Le titane se situe dans la 4e ligne et 4e colonne du tableau périodique. Combien d'électrons de valence possède-t-il ? Quel ion est-il susceptible de former ?

Le nitrure de titane présente une structure analogue à celle du chlorure de sodium. Les atomes de titane cristallisent dans un réseau cubique à faces centrées (CFC) et les atomes d'azote occupent les sites octaédriques. On donne la masse molaire du cristal $M(\text{TiN}) = 61.9 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et le rayon de l'atome d'azote $r_N = 56 \text{ pm}$. La masse volumique du nitrure de titane est $\rho = 5.24 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

□ **19** – Représenter la maille en perspective.

□ **20** – Déterminer la population en explicitant le calcul et vérifier la stoechiométrie du nitrure de titane.

□ **21** – Exprimer puis calculer le paramètre de maille a .

□ **22** – En déduire la valeur numérique du rayon de l'atome de titane.

□ **23** – Exprimer le rayon r_o d'un site octaédrique en fonction du paramètre de maille a , et vérifier l'habitabilité de ce site pour un atome d'azote.

3 Montée de la cage d'ascenseur le long du fil

Le système de propulsion de la cabine d'ascenseur est modélisé sur la figure suivante. La montée est assurée par la rotation en sens inverse de deux gros cylindres de caoutchouc identiques, chacun de rayon $R_c = 1 \text{ m}$, de masse $m_c = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$, de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2}m_c R_c^2$. Ces cylindres sont mûs par un moteur électrique exerçant sur chacun un couple. Le moment résultant de ce couple est $\vec{\Gamma}_g = +\Gamma_0 \vec{u}_y$ pour le cylindre de gauche et $\vec{\Gamma}_g = -\Gamma_0 \vec{u}_y$ pour le cylindre de droite. Les deux cylindres serrent le câble

grâce à un ressort reliant leurs deux centres, ainsi il existe une force de réaction entre les cylindres et le câble. La longueur à vide $\ell_0 = R_c$ et la constante de raideur k du ressort permettent d'assurer un roulement sans glissement au contact du câble. On néglige les masses de la cabine, de ses occupants et des moteurs par rapport à celles des cylindres.

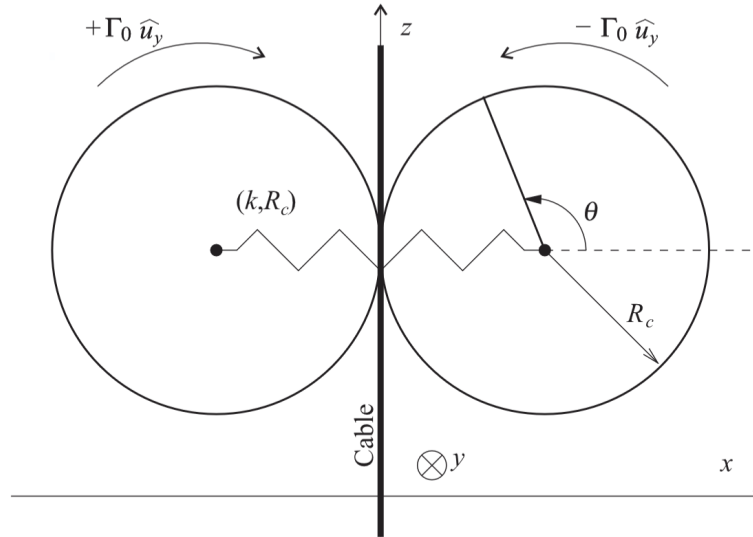


Figure 3: Vue générale des cylindres assurant la montée de la cabine.

On négligera toute action de l'air (frottement et vent) sur le système.

Dans le référentiel $(E, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, avec $\vec{e}_z = \vec{u}_r$, la cabine, repérée par le point M , est en E à $t = 0$. La montée de $z = 0$ (où la vitesse initiale est nulle) à $z = h$ dure au total $t_m = 4$ jours et se décompose en une phase d'accélération constante d'intensité $a = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pendant une durée t_0 , suivie d'une phase à vitesse constante de module v_0 .

□ **24** — Calculer les valeurs numériques de la durée t_0 , de la vitesse v_0 et de l'altitude z_0 atteintes à la fin de la première phase. On pourra faire un développement limité pour simplifier les expressions. On vérifiera que $z_0 \ll h$.

□ **25** — Faire un bilan des forces **extérieures** exercées sur le système S constitué de la cabine, de ses occupants, des deux cylindres, du ressort, et des moteurs.

□ **26** — Justifier le fait que l'on puisse considérer que pendant la première phase, la force de gravitation exercée par la Terre sur S est sensiblement constante.

□ **27** — En exploitant la conservation du moment cinétique du système S dans le référentiel géocentrique, expliquer comment la montée du câble le long du fil peut affecter la verticalité du câble au cours de sa montée. Proposer un moyen technique pour remédier à ce problème.

Dans toute la suite de cette partie, on supposera que le fil reste parfaitement immobile, vertical, tendu et on négligera la ou les forces susceptibles d'affecter la verticalité du fil.

L'angle de rotation du cylindre de droite est noté θ , compté positivement comme indiqué sur la figure. Le vecteur vitesse angulaire de ce cylindre est donc $\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\vec{e}_y$. On prend $\theta = 0$ pour $z = 0$.

□ **28** – Etablir la relation entre θ et z .

□ **29** – Etablir l'expression littérale du moment Γ_0 que doit exercer le moteur agissant sur ce cylindre pour assurer la montée pendant la première phase (accélérée) du mouvement en fonction de m_c, R_c, g et a . Effectuer l'application numérique.

□ **30** – Justifier par un calcul numérique que la montée du système n'affecte pas sensiblement la tension du fil dans la première phase.

4 Conclusion

Le projet d'ascenseur spatial est décrié par certains scientifiques qui jugent qu'il relève de la science-fiction en raison de défis techniques majeurs. Néanmoins, il permettrait d'envoyer des satellites en orbite avec un coût économique et une empreinte carbone beaucoup plus faibles, et la découverte récente des nanotubes de carbone a suscité un nouvel intérêt pour ce type de dispositif. L'agence spatiale japonaise, en 2018, a réalisé un prototype miniature d'ascenseur spatial pour transporter du matériel entre deux satellites.

□ **31** – A la lumière des quelques calculs précédents, quels vous semblent être les principaux obstacles à la réalisation d'un ascenseur spatial ? Quels phénomènes physiques non abordés dans ce DM pourraient également empêcher la réalisation de l'ascenseur ?