

Corrigé - DM 1

Ascenseur spatial

1 - Étude de l'équilibre du câble

1. L'échelle spatiale des mouvements est de l'ordre de grandeur du rayon de la Terre (et même bien plus), et le temps caractéristique pour mettre un satellite en orbite est de l'ordre de grandeur de la journée donc la rotation de la Terre doit être prise en compte. On travaille donc dans le référentiel géocentrique.

2. Un objet est dit en orbite géostationnaire, si la période de son orbite coïncide avec la période de rotation de la Terre. On applique le PFD à un satellite sur cette orbite, de masse m , soumis à la seule force de gravitation dans le référentiel géocentrique :

$$-m\omega_0^2 \vec{e}_r = -G \cdot \frac{m M_T}{r_x^2} \vec{e}_r$$

$$\text{D'où : } \boxed{r_x = \sqrt[3]{\frac{G M_T}{\omega_0^2}}}$$

3. La force de gravitation au point M pour $r = r_x$ vaut :

$$\vec{f}_x = -G \cdot \frac{m M_T}{r_x^2} \vec{e}_r = -m g_x \vec{e}_r$$

$$\text{avec } g_x = G \cdot \frac{M_T}{r_x^2} = G M_T \times \frac{\omega_0^{4/3}}{G M_T^{2/3}} = \boxed{\sqrt[3]{G M_T \omega_0^4}}$$

4. Le morceau de câble tourne autour de la Terre à la vitesse de rotation de la Terre ω_0 donc son accélération

dans le référentiel géocentrique et donnée par :

$$\vec{a} = -r\omega_s^2 \vec{e}_r$$

De plus, le morceau de câble est soumis à :

* L'attraction gravitationnelle de la Terre :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G \times \frac{\lambda dr \times M_T}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{où } \lambda dr \text{ est la masse du morceau de câble.}$$

$$\text{Or } \frac{GM_T}{r^2} = \frac{GM_T}{r_s^2} \times \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 = g_s \left(\frac{r_s}{r}\right)^2$$

$$\text{Donc } d\vec{F}_{\text{grav}} = -\lambda g_s \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 dr \vec{e}_r$$

* La force de tension exercée par la partie extérieure du câble :

$$\vec{T}_{\text{droite}} = T(r+dr) \vec{e}_s \quad (\text{tire le câble vers l'extérieur})$$

* Celle exercée par la partie intérieure :

$$\vec{T}_{\text{gauche}} = -T(r) \vec{e}_s \quad (\text{tire le câble vers l'intérieur})$$

5. Le PFD appliqué au morceau de câble dans le référentiel géocentrique donne :

$$-r\omega_s^2 \times \lambda dr = -\lambda g_s \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 dr + \underbrace{T(r+dr) - T(r)}_{= \frac{dT}{dr} dr}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{dT}{dr} = \lambda g_s \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 - \lambda r\omega_s^2$$

$$\text{Or : } g_s = r_s\omega_s^2 \text{ donc } \omega_s^2 = \frac{g_s}{r_s}$$

$$\text{En posant } \chi = \lambda g_s \text{ on trouve } \boxed{\frac{dT}{dr} = \chi \left(\frac{r_s^2}{r^2} - \frac{r}{r_s} \right)}$$

6. L'extrémité du câble, de masse nulle (pas de masse attachée au bout), est soumise à l'attraction gravitationnelle nulle (car

la masse est nulle) et à la tension du câble à gauche :

$$\underbrace{-m \times 4r_k \omega^2}_{=0} = -T(4r_k) = 0$$

On en déduit : $T(r) = \int_{4r_k}^r \frac{dT}{dr} dr$

← la borne est choisie pour avoir $T(4r_k) = 0$

$$T(r) = \int_{4r_k}^r \chi \left(\frac{r_k^2}{r^2} - \frac{r}{r_k} \right) dr$$

$$= \chi r_k^2 \left[\frac{1}{4r_k} - \frac{1}{r_k} \right] - \frac{\chi}{r_k} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{16r_k^2}{2} \right]$$

$$T(r) = \chi \left(\frac{33}{4} r_k - \frac{r_k^2}{r} - \frac{r^2}{2r_k} \right)$$

7. Au point d'ancrage à l'équateur, on a $r = r_T$ et :

$$T(r_T) = \chi \left(\frac{33}{4} r_k - \frac{r_k^2}{r_T} - \frac{r_T^2}{2r_k} \right)$$

Par ailleurs $T(r)$ est maximale pour $\frac{dT}{dr} = 0$ soit $\frac{r_k^2}{r^2} = \frac{r}{r_k}$

donc pour $r = r_k$, alors : $T_{\max} = \chi \left(\frac{33}{4} - 1 - \frac{1}{2} \right) r_k$

ou encore :

$$T_{\max} = \frac{27}{4} \chi r_k$$

8. E s'exprime en GPa donc en Pa, avec :

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

Or la tension s'exprime en N : $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

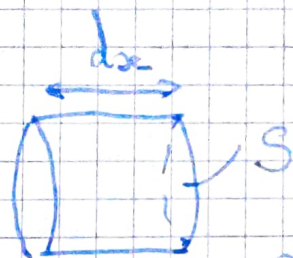
$$\text{On a bien : } 1 \text{ Pa} \times 1 \text{ m}^2 = 1 \text{ N}$$

Donc $E \times S = T$ est une formule homogène.

9. Pour que le câble résiste, il faut que $S \geq \frac{T_{\max}}{E}$, d'où
ici :

$$S \geq \frac{27}{4} \frac{\lambda g_s r_s}{E}$$

Or $\lambda = \frac{dm}{dx}$ ← masse d'un morceau de câble de longueur dx



$$= \frac{\rho S dx}{dx} = \rho \times S \quad \text{où } \rho \text{ est la masse volumique.}$$

Donc le câble résiste si : $1 \geq \frac{27}{4} \frac{\rho}{E} g_s r_s$

On a $r_s = r_T + 36000 \text{ km} = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$

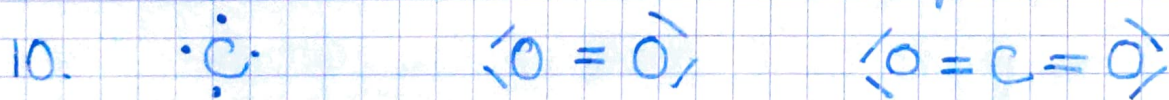
Et $g_s = (G m_T \omega_o^4)^{1/3} = \left(\left(\frac{2\pi}{T_o} \right)^4 \cdot G m_T \right)^{1/3} = 0,22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

(avec $T_o = 1 \text{ jour} = 24 \times 3600 = 86400 \text{ s}$)

On trouve : $\frac{27}{4} \frac{\rho}{E} g_s r_s = \begin{cases} 2,2 \text{ pour l'acier} \\ 0,08 \text{ pour le carbone} \end{cases}$

Donc seuls les nanotubes de carbone permettent au câble de résister.

II - Protection du câble contre les agressions extérieures



11. On peut écrire : $[\text{O}_2] = \frac{n(\text{O}_2)}{V}$

De plus : $n(\text{O}_2) = 0,21 \times n_{\text{tot}}$ et $PV = n_{\text{tot}} RT$

par la loi des gaz parfaits. Ainsi, on a :

$$[\text{O}_2] = 0,21 \times \frac{P}{RT}$$

À pression et température ambiantes, $P = 10^5 \text{ Pa}$ et $T \approx 298 \text{ K}$ d'où $[\text{O}_2] = 8,5 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$

12. Cette loi s'écrit : $k = A_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}$
 où A_0 est une constante (vitesse de la réaction à haute température)
 en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ ou encore en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$
 • E_a est l'énergie d'activation de la réaction en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$

13. À basse température, la réaction ne se produit pas. Puis au fur et à mesure que la température augmente, la réaction commence à se produire et $\frac{dw}{dt} < 0$. La réaction est de plus en plus rapide lorsque la température augmente mais à un moment donné la vitesse de réaction diminue à nouveau car il n'y a plus de réactif. À $t = 75 \text{ min}$, tout le carbone a été consommé.

14. On a : $-\frac{1}{w} \frac{dw}{dt} = k[\text{O}_2] = A_0[\text{O}_2] e^{-\frac{E_a}{RT}}$
 D'où : $\ln\left(-\frac{1}{w} \frac{dw}{dt}\right) = \ln(A_0[\text{O}_2]) - \frac{E_a}{RT}$
 On lit deux points sur la courbe :
 $x = 0,00126 \quad -0,00105$
 $y = -2,4 \quad -5,5$
 On en déduit $y = ax + b$ avec $\begin{cases} a = 1,8 \cdot 10^4 \text{ K}^{-1} \\ b = 14 \text{ min}^{-1} \end{cases}$
 Or $a = \frac{E_a}{R}$ et $b = \ln(A_0[\text{O}_2])$ soit $E_a = Ra$, $A_0 = \frac{e^b}{[\text{O}_2]}$

D'où

$\begin{cases} E_a = 150 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ A_0 = 1,4 \cdot 10^5 \text{ min}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$
--

15. Sachant que $[\text{O}_2]$ est maintenue constante, on a :

$$\frac{dw}{dt} + k[O_2]w = 0 \Rightarrow w = w_0 e^{-k[O_2]t}$$

À $t = t_{1/2}$ on a $w = \frac{w_0}{2}$ donc $e^{-k[O_2]t_{1/2}} = \frac{1}{2}$

Ainsi $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k[O_2]} = \frac{\ln(2)}{A_0[O_2]} e^{\frac{E_a}{RT}}$

Avec $T = 298 \text{ K}$ on trouve $t_{1/2} = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ min}$

ou encore $t_{1/2} = 2,4 \cdot 10^{14} \text{ ans}$: la réaction est extrêmement lente, elle est cinétiquement bloquée. Il n'y a pas de risque pour le câble.

16. On a alors $T = 1300 \text{ K}$ et $[O_2] = 8,5 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

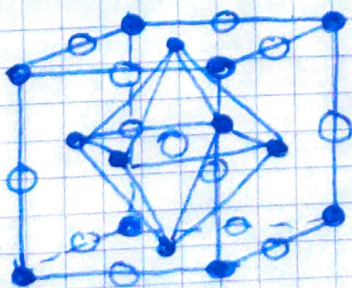
On trouve : $t_{1/2} = 8,5 \cdot 10^6 \text{ s} = 16 \text{ ans}$

L'oxydation présente désormais un risque pour le câble, en effet ce type d'infrastructure est généralement déployé pour une utilisation de longue durée.

2 - Protection par le niture de titane

18. Ti possède 4 électrons de valence. En cherchant à se rapprocher de la configuration électronique du gaz noble le plus proche, il va former Ti^{4+} .

19.



• Ti

○ N (site octaédrique central et arêtes).

20. Le nombre d'atomes de titane est :

$$N(\text{Ti}) = \underbrace{6 \times \frac{1}{2}}_{\text{faces}} + \underbrace{8 \times \frac{1}{8}}_{\text{corners}} = 4$$

De même :

$$N(\text{N}) = \underbrace{1}_{\text{site central}} + \underbrace{12 \times \frac{1}{4}}_{\text{arêtes}} = 4$$

La stoechiométrie est cohérente : un atome d'azote pour un de titane.

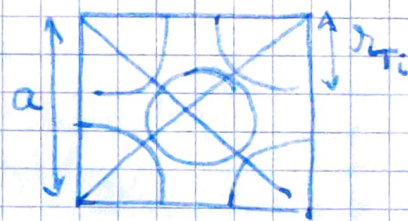
21. On a une masse volumique

$$\rho = \frac{N(\text{Ti}) \cdot M_{\text{Ti}} + N(\text{N}) \cdot M_{\text{N}}}{a^3 \times N_A}$$

soit $\rho = \frac{4 M(\text{TiN})}{N_A a^3}$

$$a = \sqrt[3]{\frac{4 M(\text{TiN})}{N_A \rho}} = 430 \text{ pm}$$

22. Il y a tangence selon la diagonale d'une face dans le modèle des sphères dures : $a\sqrt{2} = 4r_{\text{Ti}}$

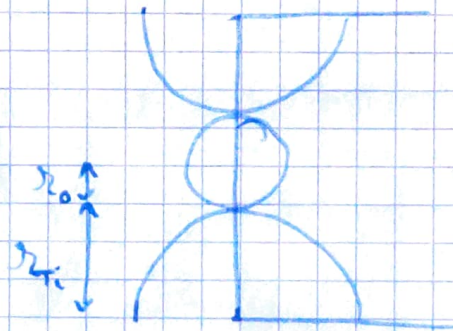


D'où $r_{\text{Ti}} = \frac{a\sqrt{2}}{4} = 152 \text{ pm}$

23. Sur une arête :

$$a = 2r_{\text{Ti}} + 2r_{\text{O}}$$

D'où : $r_{\text{O}} = \frac{a}{2} - r_{\text{Ti}}$



On trouve $r_{\text{O}} = 63 \text{ pm} \geq r_{\text{N}}$.

Ce site peut donc bien être occupé par l'atome d'azote.

III - Montée de la cage d'ascenseur le long du fil

24. On a pendant la première phase : $\ddot{z}(t) = a$ et $z(t=0) = 0$

D'où : $z(t) = \frac{1}{2} a t^2$ $\dot{z}(t) = a t$

La vitesse atteinte en fin de première phase est v_0 donc on a $v(t_0) = a \cdot t_0 = v_0$.

Par ailleurs lors de la seconde phase, $\dot{z}(t) = v_0$ et $z(t=t_0) = \frac{1}{2} a t_0^2$. On en déduit :

$$z(t) = \frac{1}{2} a t_0^2 + v_0(t - t_0) = \frac{1}{2} a t_0^2 + a t_0(t - t_0) \\ = a t_0 \left(t - \frac{t_0}{2} \right)$$

En particulier $z(t_m) = h$ donc $h = a \left(t_0 t_m - \frac{t_0^2}{2} \right)$

ou encore : $t_0^2 - 2 t_m t_0 + \frac{2h}{a} = 0$

Discriminant réduit $\Delta' = t_m^2 - \frac{2h}{a}$ et donc $t_0 = t_m \pm \sqrt{\Delta'}$

Or $t_0 < t_m$ donc : $t_0 = t_m - \sqrt{t_m^2 - \frac{2h}{a}}$

Ici $t_m = 4j = 4 \times 86400 \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ s}$ donc $t_m^2 \approx 10^{11} \text{ s}^2$
et $\frac{2h}{a} = \frac{2 \times (494 - 27)}{a} \approx 3,3 \cdot 10^8 \text{ s}^2$

Donc $\frac{2h}{a} \ll t_m^2$, ainsi : $\sqrt{t_m^2 - \frac{2h}{a}} \approx t_m \sqrt{1 - \frac{2h}{a t_m^2}} \approx t_m \left(1 - \frac{h}{a t_m^2} \right)$

Et : $t_0 \approx \frac{h}{a t_m} = 469 \text{ s}$ soit $t_0 \approx 8 \text{ min}$

Alors $v_0 = a t_0 = 469 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $z_0 = \frac{1}{2} a t_0^2 \approx 110 \text{ km}$

On a bien $z_0 \ll h$.

25. La cabine est soumise à la force de gravitation exercée par la Terre : $\vec{F}_g = - G \frac{m M_T}{r^2} \vec{e}_r$

Ainsi que la réaction du câble sur les cylindres que l'on notera $\vec{R}$.

Les autres forces en jeu sont des forces intérieures au système.

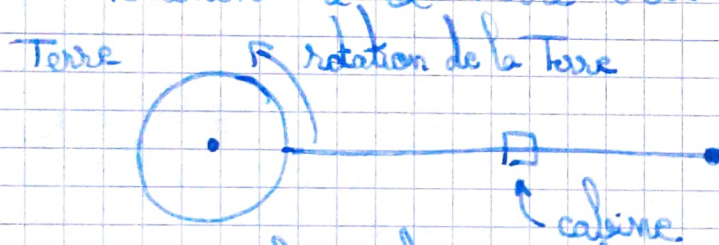
26. On a $\|\vec{F}_g\| = \mathcal{G} \frac{mM_T}{r^2}$

On pendant la première phase : $r_T \leq r \leq r_T + z_0$

Mais $z_0 = 500 \text{ m} \ll r_T$ donc $r_T + z_0 \approx r_T$ et r reste environ constant au cours de la 1^{re} phase.

On aura alors : $\vec{F}_g \approx m\vec{g}$ où $\vec{g} = -g\vec{e}_z$

27. Si on se place dans le référentiel géocentrique, le moment cinétique de la cabine autour de l'axe de rotation de la Terre doit se conserver :



$$\|\vec{L}_0(\text{cabine})\| = m r^2 \dot{\theta}$$

Lorsque la cabine monte, z augmente, donc $\dot{\theta}$ doit diminuer ce qui signifie que la cabine va tourner moins vite que la Terre, ceci va déformer le câble et l'"enrouler" autour de la Terre.

28. Le cylindre roule sans glisser sur le câble, il monte donc à la vitesse $v = R_c \cdot \dot{\theta}$ d'où $\dot{z} = R_c \dot{\theta}$ ou encore : $\boxed{z = R_c \times \theta}$ en prenant $\theta(t=0) = 0$.

29. • On applique le PFD au système S dans le référentiel terrestre, et on projette selon $\vec{e}_z$: Le système a une accélération $+a\vec{e}_z$ et est soumis à :
 * son poids $\vec{P} = -2M_c g \vec{e}_z$
 * la réaction $\vec{R}$ du câble

Ainsi : $\vec{R} - 2m_c g \vec{e}_z = a \vec{e}_z$

Ou encore : $\vec{R} \cdot \vec{e}_z = 2Ma + 2m_c g$ (*)

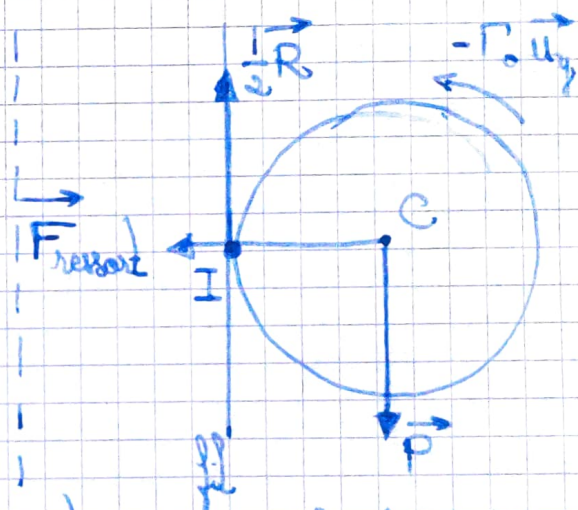
• On applique le théorème du moment cinétique à un

glinbre autour de son axe. Le cylindre est soumis à :

- * La force de rappel du ressort
- * Son poids
- * La réaction au niveau du fil $\frac{1}{2} \vec{R}$ sur chaque cylindre
- * Le couple des moteurs.

Les deux premières forces s'appliquent sur l'axe donc leur moment est nul. De plus :

$$\begin{aligned} \vec{M}_C\left(\frac{1}{2}\vec{R}\right) &= \vec{CI} \wedge \frac{1}{2}\vec{R} \\ &= +\frac{1}{2}R_c(\vec{R} \cdot \vec{e}_y)\vec{u}_y \\ &= -R_c m_c(a+g)\vec{u}_y \\ &\text{d'après (*)} \end{aligned}$$



On applique le théorème du moment cinétique au cylindre :

$$J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_C\left(\frac{1}{2}\vec{R}\right) + \vec{M}_{moteur}$$

On encore :

$$-\frac{1}{2}m_c R_c^2 \ddot{\theta} \vec{u}_y = [m_c R_c(a+g) - \Gamma_0] \vec{u}_y$$

Ainsi :

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} R_c m_c (a+g) + \frac{1}{2} m_c R_c^2 \ddot{\theta}$$

Or $R_c \ddot{\theta} = (R_c \dot{\theta})' = \ddot{z} = a$ d'où $\boxed{\Gamma_0 = R_c m_c \left(\frac{3}{2}a + g\right)}$

On trouve $\boxed{\Gamma_0 = 2,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}}$

30. La force $\vec{R}$ exercée par le fil sur les cylindres peut affecter la tension du fil.

On a : $\|\vec{R}\| = 2m_c(a+g) \approx 2,2 \cdot 10^4 \text{ N}$.

Or la tension du fil près du sol est $T(z_0)$ calculée en Q7.

L'application numérique donne $T(r_+) \approx 1,4 \cdot 10^7 \text{ N}$.

On a donc $\|\vec{R}\| \ll T(r_+)$ et la chaleur n'affecte pas la tension du câble.

IV - Conclusion

31. Il faudrait construire des paraboloides de carbone longs de plusieurs fois le rayon de la Terre ce qui semble irréalisable. De plus il faudrait un câble rigide pour éviter le problème d'effondrement évoqué en Q27. Enfin, l'oxydation du câble, semble être un problème qui limite la pérennité du dispositif, et le choix d'une protection risque d'affecter les propriétés mécaniques du câble.