
TD numérique sur le phénomène de slip-stick

On cherche, dans ce TP, à résoudre numériquement le mouvement de collé-glissé que nous avons vu en TD. Pour cela, on considère un mobile sur un tapis roulant attaché à un ressort. Le but est de calculer la trajectoire du mobile en fonction du temps $x(t)$.

On rappelle les résultats principaux de l'exercice de TD. Dans une première phase, le solide est entraîné par le tapis roulant. Il avance à la vitesse v_0 .

Dans un second temps, la force de rappel devient plus forte que la force de frottement et le solide commence à glisser. Il revient alors vers sa position initiale jusqu'à ce qu'il ne glisse plus sur le tapis, et on revient au premier cas.

On a montré que lors de la phase d'adhérence, le solide avance jusqu'à une position maximale $x_{max} = \frac{f_s mg}{k}$. Lors de la phase de glissement, en négligeant le coefficient de frottement dynamique nous avons montré qu'il a un mouvement oscillant avec une pulsation caractéristique $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (Remarque : dans ce TP nous ne négligerons pas le frottement dynamique)

Dans la suite, on prendra les valeurs suivantes caractéristiques d'un bagage coincé sur un tapis roulant :

- $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$
- $v_0 = 1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
- $m = 20 \text{ kg}$
- $f_s = 0.6$
- $f_d = 0.4$

1 Rappels sur la discrétisation

On va modéliser les mouvements de la valise en utilisant la méthode d'Euler explicite. Considérons une équation différentielle $\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t)$. Pour la résoudre, on calcule petit à petit $y(t)$ en partant de la condition initiale, puis en avançant avec un pas de temps dt .

Connaissant t et $y(t)$, on en déduit $\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), t)$ à l'instant t . On peut alors calculer $y(t + dt)$ à l'aide d'un développement de Taylor à l'ordre 1 :

$$y(t + dt) = y(t) + \frac{dy}{dt} \times dt$$

Il s'agit d'une approximation qui est d'autant plus précise que dt est petit. Mais une valeur plus petite de dt implique un plus grand nombre de pas de temps, et donc de calculs : il y a un compromis à faire entre la précision et la rapidité du calcul.

□ **1** — Donner le temps caractéristique de la phase d'adhérence et celui de la phase de glissement. Quelle est la phase la plus rapide des deux ? Comment choisir le pas de temps dt pour que la simulation fonctionne ? Proposer une valeur pour dt .

□ **2** — Compléter la partie du code sur l'initialisation des variables.

2 Phase d'adhérence

□ 3 – Le mouvement commence par une phase d'adhérence. Au cours de cette phase, quelle est la vitesse de la valise? Écrire la fonction `mouvement_adgerence` qui permet d'obtenir $v(t + dt)$ et $x(t + dt)$ à partir de $x(t)$ et $v(t)$ lors de cette phase. On déterminera $x(t + dt)$ par la méthode d'Euler.

□ 4 – A quelle condition va s'arrêter la phase d'adhérence? Pour pouvoir vérifier cette condition, écrire la fonction `condition_adgerence_verifiee` qui utilise la fonction `force_de_rappel` et qui indique si la condition d'adhérence est toujours vérifiée.

3 Phase de glissement

Une fois que cette condition n'est plus vérifiée, on passe à la phase de glissement. On rappelle l'équation du mouvement qui a été établie en TD :

$$m\ddot{x} + kx = -f_d mg \times \text{sgn}(v - v_0)$$

où $\text{sgn}(v)$ représente le signe de la vitesse.

□ 5 – Rappeler la signification physique de chaque terme et en particulier expliquer la forme du dernier terme.

Dans le cadre de la modélisation numérique, on préfère transformer cette équation en deux équations d'ordre 1 donnant $\dot{v}$ et $\dot{x}$ en fonction de v et x :

$$\dot{v} = -kx - f_d mg \times \text{sgn}(v - v_0) \qquad \dot{x} = v$$

□ 6 – Écrire la fonction `mouvement_glissement` qui permet d'obtenir $v(t + dt)$ et $x(t + dt)$ à partir de $x(t)$ et $v(t)$ lors de la phase de glissement, en utilisant la méthode d'Euler sur chacune des deux équations différentielles. On pourra utiliser la fonction `np.sign()`.

Nous souhaitons maintenant savoir quand la phase de glissement va s'arrêter. Cette phase s'arrête lorsque la vitesse du mobile est égale à celle du tapis, $v = v_0$. La condition de glissement s'écrit donc, en pratique, $v \neq v_0$.

□ 7 – Le cas $v = v_0$ va-t-il se produire en pratique dans notre modèle numérique? A l'aide d'une représentation graphique de $x(t)$ et $v(t)$ au cours de la phase de glissement, expliquer pourquoi on peut choisir comme condition de glissement $v < v_0$ pour que notre modèle numérique fonctionne. Écrire la fonction correspondante `condition_glissement_verifiee`.

4 Transitions entre les phases

Maintenant, nous devons coupler les deux fonctions définies précédemment, `mouvement_adherence` et `mouvement_glissement`, afin de calculer la position du mobile à tout instant. Pour cela, nous définissons la variable booléenne `adherence` qui indique si l'on se trouve dans une phase de glissement (`adherence = False`) ou d'adhérence (`adherence = True`).

□ **8** – Expliquer le fonctionnement de la fonction `mouvement` qui donne $x(t + dt)$, $v(t + dt)$ en fonction de $x(t)$, $v(t)$ et de la variable `adherence` à t , et qui donne aussi la variable `adherence` à $t + dt$.

□ **9** – Dans la partie de code principale servant à calculer $x(t)$, compléter la valeur initiale de `adherence`.

□ **10** – Lancer le code. Reproduire les graphiques sur votre feuille et identifier la partie qui correspond à la phase de glissement et celle qui correspond à la phase d'adhérence. Orienter le portrait de phase.

□ **11** – Justifier que l'une des deux parties du portrait de phase est un segment droit. Si comme dans le TD on avait négligé le coefficient de frottement dynamique, quelle serait la forme de l'autre partie du portrait de phase ? Pour le vérifier, vous pouvez mettre $f_d = 0$ dans la première cellule et relancer le code.