

Corrigé - DS2 Type Minus/Centree

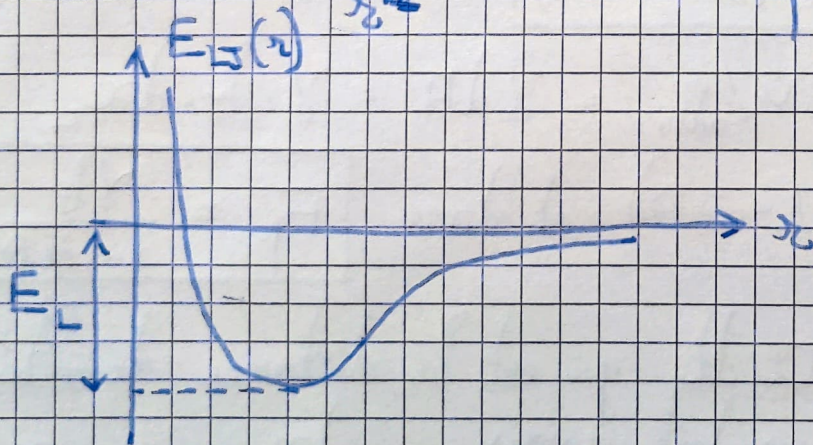
I - Expérimenter avec un morceau de scotch

1. D'autres liaisons sont par exemple les liaisons covalentes, (très énergétiques), les liaisons ioniques (très énergétiques), les liaisons métalliques (très énergétiques), les liaisons hydrogène (moyennement énergétiques). Les liaisons de Van der Waals sont peu énergétiques par rapport à toutes ces liaisons.

2. La force associée à ce potentiel est telle que :

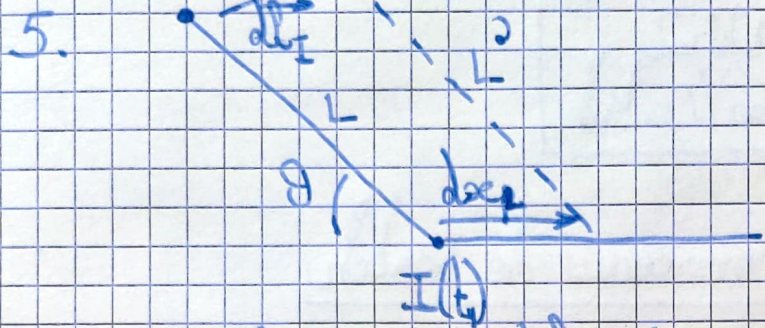
$$\vec{F} \cdot \vec{e}_r = - \frac{dE_L}{dr} = + \frac{12A}{r^{13}} - \frac{6B}{r^7}$$

Le terme $\frac{A}{r^{12}}$ est donc répulsif et le terme $-\frac{B}{r^6}$ attractif.



L'énergie de liaison E_L correspond à la profondeur du puits de potentiel associé à la liaison.

4. Pour décoller le ruban, il faut casser les liaisons de Van der Waals, ainsi : $W_{ad} = N \times E_L$ où N est le nombre de liaisons à casser, qui est a priori proportionnel à la surface d'adhésion.



La longueur totale de scotch reste constante. Si on note L la longueur initiale décollée : $L + dx_L = L'$

$$\text{On : } \begin{cases} \vec{dl}_I \cdot \vec{e}_x = L \cos \theta + dx_L - L' \cos \theta = dx_L (1 - \cos \theta) \\ \vec{dl}_I \cdot \vec{e}_y = (L' - L) \sin \theta = dx_L \sin \theta \end{cases}$$

Ainsi : $\vec{dl}_I = [(1 - \cos \theta) \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y] dx_L$

Et $\delta W_p = \vec{F}_p \cdot \vec{dl}_I$ avec $\vec{F}_p = F_p (-\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$

$$= F_p dx_L [\sin^2 \theta - \cos \theta (1 - \cos \theta)]$$

$$\boxed{\delta W_p = F_p dx_L (1 - \cos \theta)}$$

6. On a : $\delta W_p = \delta W_{adh} = \gamma dA = \gamma \cdot b \cdot dx_L$

D'où : $\gamma b = F_p (1 - \cos \theta)$ et donc $\boxed{F_p = \frac{\gamma b}{1 - \cos \theta}}$

7. On a $dx_L = r_0 \Omega dt$ qui est la distance décollée pendant dt . Ainsi on doit avoir : $\frac{dx_L}{dt} = r_0 \Omega$

On encore $\boxed{x_L(t) = r_0 \Omega t + c^{ste}}$

8. Pour que l'angle de pelage soit constant, le point L doit rester fixe dans le référentiel terrestre. Or :

$$\vec{v}(L/R_T) = \vec{v}(L/O_{ax}) + \vec{V}_0 = r_0 \Omega \vec{e}_x + \vec{V}_0$$

La condition est satisfaite si

$$\mu_0 \Omega = \|\vec{V}_0\|$$

9. Augmenter l'angle θ permet de minimiser la force à appliquer (en prenant $\theta > \frac{\pi}{2}$, on pourrait réduire cette force encore plus).

10. Oui, ce référentiel est en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre, on peut donc le supposer galiléen.

11. Lorsque la masse glisse, la force de frottement est plus faible qu'au moment où le glissement démarre : ceci correspond à la différence entre coefficient de frottement statique μ_s et dynamique μ_d :

$$\begin{cases} \|\vec{f}\| = F_p = \mu_s \|\vec{N}\| \\ \|\vec{f}\| = (1-\epsilon) F_p = \mu_d \|\vec{N}\| \end{cases}$$

à la limite du glissement
lors du glissement

Donc $1 - \epsilon = \frac{\mu_d}{\mu_s}$ ou encore

$$\epsilon = 1 - \frac{\mu_d}{\mu_s}$$

12. On a
$$\begin{cases} l(t) = x_1(t) - x_2(t) \\ x_1(t) = l_0 + V_p t \end{cases}$$

D'où :
$$l(t) = l_0 + V_p t - x_2(t)$$

13. À $t=0$, on est en phase d'adhérence et le ressort est à sa longueur à vide donc n'exerce aucune force. La masse étant à l'équilibre, $\vec{f} = \vec{0}$ (le frottement doit compenser la force de rappel) par conséquent $\|\vec{f}\| < F_p$ et

on démarre une phase d'adhérence.
Au cours de cette phase, la masse est à l'équilibre dans R galiléen, donc soumise à des forces qui se compensent et

$$\|\vec{f}\| = \|\vec{F}_{\text{sappel}}\| = k|l(t) - l_0| = k|V_p t - x_L(t)|$$

= 0 au cours de la phase

La phase s'arrête lorsque $\|\vec{f}\| = F_p$ donc

pour :
$$t_0 = \frac{F_p}{k V_p}$$

14. Lors de la phase suivante, on applique dans R le PFD à la masse soumise à :

* La force de rappel $\vec{F}_{\text{sappel}} = -k(l - l_0) \vec{e}_x = +k(V_p t - x_L) \vec{e}_x$

* La force de frottement $\vec{f} = -(1 - \epsilon) F_p \vec{e}_x$

* Le poids $\vec{P} = m \vec{g}$

* La réaction normale $\vec{N}$ du support

En projetant sur $\vec{e}_x$ on obtient :

$$m \ddot{x}_L = k(V_p t - x_L) - (1 - \epsilon) F_p$$

Où encore, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$\ddot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 V_p t - (1 - \epsilon) \frac{F_p}{m}$$

15. On a alors : $x_L(t_0) = x_L(t=0) = C_1 + C_3 = 0$

$$\dot{x}_L(t_0) = \dot{x}_L(t=0) = \omega_0 C_2 + V_p = 0$$

Donc $C_2 = \frac{V_p}{\omega_0}$ et $C_3 = -C_1$

De plus:

$$\ddot{x}_L + \omega_0^2 x_L = \omega_0^2 (V_p t' + C_3) \quad \text{en remplaçant l'expression}$$

$$= \omega_0^2 V_p t' - (1-\varepsilon) \frac{F_F}{m} \quad \text{d'après Q14}$$

Donc $\omega_0^2 C_3 = -(1-\varepsilon) \frac{F_F}{m} = \frac{k}{-mG} C_3$

Ainsi $C_3 = -(1-\varepsilon) \frac{F_F}{k}$ et $C_4 = +(1-\varepsilon) \frac{F_F}{k}$

16. On a à $t' = 0$: $\begin{cases} \dot{x}_L = 0 \\ x_L(t') = 0 \end{cases} \Leftrightarrow l(t') = l_0 + \frac{F_F}{k}$
(d'après Q13)

D'où $\begin{cases} \dot{x}_L(t'=0) = 0 \text{ m.s}^{-1} \\ l(t'=0) = l_0 + \frac{F_F}{k} \Rightarrow l - l_0(t'=0) = 1,0 \text{ mm} \end{cases}$

Ce qui permet d'identifier le point sur les portraits de phase. De plus à partir de la courbe de gauche on voit qu'au début de la simulation, $x_L(t') < V_p t'$ donc: $l < l_0$

$$l - l_0 = V_p(t_0 + t') - x_L \quad \text{d'après Q12}$$

$$= \frac{F_F}{k} + \underbrace{V_p t' - x_L}_{> 0}$$

$$> \frac{F_F}{k}$$

Donc $l - l_0$ augmente au-delà de 1 mm et le portrait de phase est parcouru dans le sens trigonométrique.

17. La phase de slip cesse lorsque la vitesse de glissement s'annule donc lorsque $\dot{x}_L = 0$ soit $\dot{x}_L = 0$. Cela peut se produire en deux points du portrait de phase. Il faut alors s'assurer que l'équilibre peut être satisfait

ce qui est le cas si $\|\vec{f}\| = k |V_{pt} - x_L| < F_p$.

Pour cela il faut :

$$\begin{aligned} \frac{F_p}{k} > |V_{pt} - x_L| &= |V_{pt_0} + V_{pt}' - x_L| \\ &= \left| \frac{F_p}{k} + V_{pt}' - x_L \right| \end{aligned}$$

Ce qui est le cas si et seulement si $V_{pt}' - x_L < 0$.

On constate que le premier point $V_L = 0$ rencontré sur le portrait de phase satisfait cette condition : la phase de stop s'arrête donc au niveau de ce point. On peut lire t_1 sur le graphique.

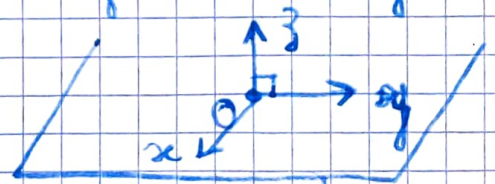
18. Une phase de stick redémarre alors et va se produire à $V_L = 0$ et $\frac{d}{dt}(L - L_0) = V_p$: il s'agit d'un segment de droite sur chacun des deux graphes, qui relie les deux points $V_L = 0$. cf document réponse à la fin du corrigé

Q19 - 34 : corrigé dans la partie CCINP

II - Fonctionnement d'un accéléromètre par effet capacitif

35. On étudie pour commencer un plan infini de charge surfacique σ :

Soit M un point de l'espace.

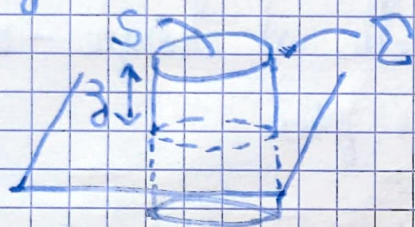


$(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont plans de symétrie de la distribution donc $\vec{E}(M)$ est dans ces plans. De plus

on a invariance par translation selon x et y donc :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$$

Enfin (Oxy) est plan de symétrie de la distribution donc également du champ $\vec{E}$ et $E(-z) = -E(z)$.



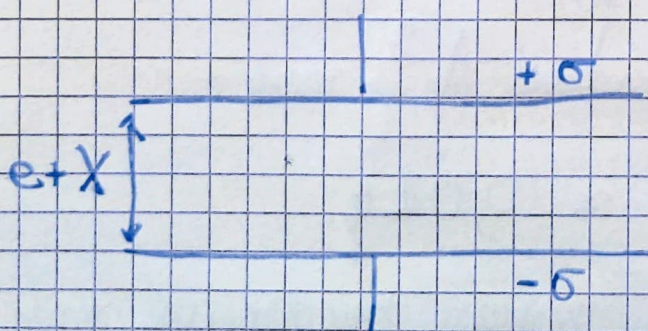
On prend pour Σ un cylindre de hauteur $2z$ comme dessiné ci-contre.

La charge intérieure est $Q_{int} = \sigma S$, par application du théorème de Gauss :

$$\frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = S(E(z) - E(-z)) = 2SE(z)$$

$$\text{D'où } \vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

On étudie désormais un condensateur plan :



Par principe de superposition, $\vec{E}_x$ dans le condensateur $\|\vec{E}\| = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

De plus comme le champ est uniforme la tension vaut :

$$U = \|\vec{E}\| \times \underbrace{(e+X)}_{\text{distance entre armatures}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{U}{e+X} \vec{e}_x}$$

36. On a vu $\frac{U}{e+X} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, or $\sigma = \frac{q}{S}$ où q est la

Charge portée par les armatures et S leur surface.

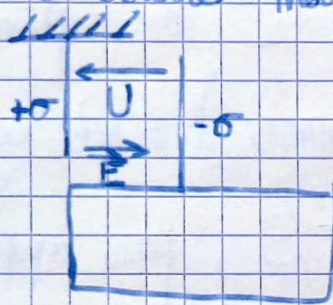
Alors:

$$C_1 = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{e+X} \quad \text{et} \quad C = \frac{\epsilon_0 S}{e} \quad \text{pour } X=0$$

Ainsi:

$$C_1 = \frac{eC}{e+X}$$

37. L'électrode mobile, en supposant qu'elle est chargée $-q$,



subit une force:

$$\vec{F} = -q\vec{E}$$

$$= -q \cdot \frac{U}{e+X} \vec{e}_x$$

$$= -\frac{qU}{e+X} \vec{e}_x = -\frac{C_1 U^2}{e+X} \vec{e}_x$$

$$\text{Or } C_1 = \frac{eC}{e+X}$$

donc:

$$\vec{F} = -\frac{C e U^2}{(e+X)^2} \vec{e}_x$$

Cette force est attractive.

$$38. \text{ On a } \|\vec{F}\| \approx \frac{C \cdot U^2}{e} \approx \frac{10^{-13} \cdot 1}{10^{-6}} \sim 10^{-7} \text{ N}$$

Cette force provoque une accélération de la masse:

$$a \sim \frac{\|\vec{F}\|}{m} \sim 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \approx 0,01 g$$

Elle n'est pas gênante pour des mesures peu précises, mais doit être prise en compte si on veut une précision de l'ordre de 1% ou mieux.

39. Cette électrode étant neutre elle n'affecte pas le champ électrique qui est celui produit par les deux électrodes fixes espacées de $2e$. On peut directement utiliser le

résultat de Q 35 pour affirmer que : $\vec{E} = \frac{2V_s}{2e} \vec{e}_x$

On applique le théorème du gradient :

$$V - V_s = \int_{-e}^X \text{grad}(V) \cdot d\vec{l} = - \int_{-e}^X \vec{E} \cdot d\vec{l}$$
$$= - \int_{-e}^X \frac{V_s}{e} dx = - \frac{X+e}{e} \times V_s$$

Alors : $V = V_s - (1 + \frac{X}{e}) V_s$ d'où : $V = - \frac{X}{e} V_s$

40. L'électrode mobile étant non chargée, elle ne subit aucune force électrique.

41. Le système à deux électrodes fines :

- * N'occasionne aucune force qui serait susceptible de modifier l'accélération de la masse d'épreuve, et donc de perturber les mesures ;
- * Crée une dépendance linéaire de V en fonction de X , ce qui facilite la mesure et réduit fortement les incertitudes relatives lorsque $X \ll e$.

III - Étude des galaxies

42. Dans le référentiel lié au repère (T, X, Y) où X et Y pointent vers des étoiles lointaines, supposées galiléennes, l'étoile E est soumise à la seule force gravitationnelle conservative. Son énergie mécanique est donc conservée :

$$E_m = -G \cdot \frac{M_0 M_T}{r_0} + \frac{1}{2} M_0 v^2 = c^{ste}$$

Or le mouvement étant circulaire, $r_0 = c^{ste}$ donc $v = c^{ste}$
et le mouvement est donc uniforme.

On applique dans ce même référentiel le PFD à l'étoile
projeté selon $\vec{e}_0$:

$$-M_0 \cdot \frac{v^2}{r_0} = -G \cdot \frac{M_0 M_T}{r_0^2}$$

D'où :

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tau = \frac{2\pi r_0}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r_0^3}{GM_T}}}$$

43. On s'attend à avoir :

$$v = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-14} \times 4 \cdot 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{8 \cdot 10^3 \times 8 \cdot 10^{16}}} = \sqrt{2}$$

$$\approx 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

On mesure donc une vitesse bien plus élevée que celle attendue, le trou noir seul ne peut pas en être la cause.

44. On a une analogie entre la masse et la charge
(m et q) ; en comparant l'expression de la force
électrostatique et de la force gravitationnelle on en
déduit que $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ est analogue à $-G$.

Le théorème de Gauss s'écrit $\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$

Par analogie : $\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

45. On choisit les coordonnées sphériques de centre T . Soit
 M un point quelconque, tous les plans contenant T et M

sont plans de symétrie de la distribution de masse, donc $\vec{g}$ est dans tous ces plans. De plus la distribution étant invariante par rotation d'angle θ et φ : $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$.
 Soit Σ la sphère de centre T et de rayon r , alors elle contient une masse M_{int} telle que:

- Si $r \leq R_1$: $M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi R_1^3} = \left(\frac{r}{R_1}\right)^3 M_0$
- Si $R_1 < r \leq R_2$: $M_{int} = M_0$ (la masse du disque est négligée)

Alors: $\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{int}$

D'où:

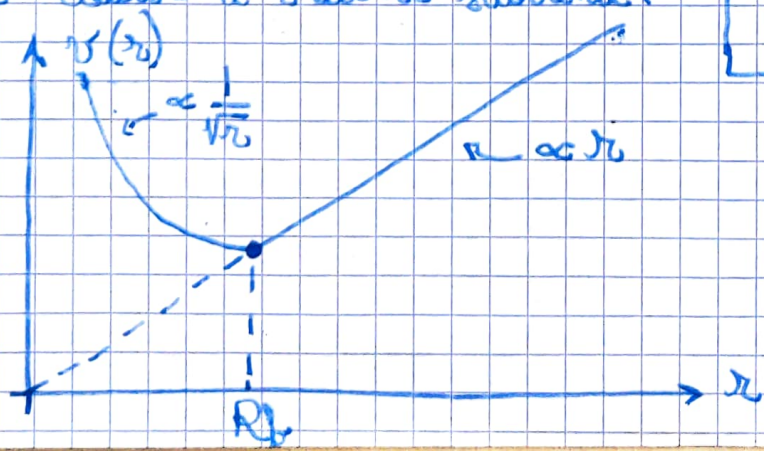
$$\vec{g} = \begin{cases} -\frac{GM_0}{r^2} \vec{e}_r & \text{si } R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{GM_0 r}{R_1^3} \vec{e}_r & \text{si } r \leq R_1 \end{cases}$$

46. On applique à nouveau le PFD à l'étoile, mais la force gravitationnelle est désormais $\vec{F}_g = M_0 \vec{g}$.
 Ainsi: $-M_0 \frac{v^2}{r} = M_0 g(r)$

D'où:

$$v = \sqrt{r |g(r)|} = \begin{cases} \sqrt{\frac{GM_0}{r}} & \text{si } r \geq R_1 \\ \sqrt{\frac{GM_0 r^2}{R_1^3}} & \text{si } r \leq R_1 \end{cases}$$

La courbe a l'allure suivante:



Le domaine $r \geq R_1$ suit les lois de Kepler, car $\vec{g}$ y est identique au champ créé par une masse ponctuelle.

47. On a vu que $v_1 = \sqrt{r_0(-g(r))}$ (Q46)

Donc: $g(r) = -\frac{v_1^2}{r}$

On applique le théorème de Gauss à une sphère de rayon r :

$$\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M_{\text{int}}(r)$$

où $M_{\text{int}}(r) = \int_0^r \underbrace{4\pi r'^2 \mu(r')}_{\substack{\text{masse d'une coquille sphérique} \\ \text{d'épaisseur } dr' \text{ et de rayon } r'}} dr'$ (On néglige la masse du bulle d'après l'énoncé)

Alors: $M_{\text{int}}(r_0) = \frac{r_0^2 g(r_0)}{G} = \frac{v_1^2 r_0}{G}$

On dérive par rapport à r :

$$\frac{v_1^2}{G} = \frac{dM_{\text{int}}}{dr} = 4\pi r^2 \mu(r)$$

D'où: $\boxed{\mu(r) = \frac{v_1^2}{4\pi G r^2}}$

$$[v_1] = L \cdot T^{-1} \quad [r_0] = L \quad \text{et} \quad [G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

Donc $\left[\frac{v_1^2}{G r^2} \right] = \frac{L^2 \cdot T^{-2}}{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2} \cdot L^2} = M \cdot L^{-3} = [\mu]$

La formule est bien homogène, comme μ ne peut dépendre que de v_1 , G et r et que trois dimensions (M, L, T) sont impliquées, $\mu \propto \frac{v_1^2}{G r^2}$ est la seule combinaison possible.

48. Alors: $M_{\text{noir}} = \int_0^{R_d} \mu(r) \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{v_1^2}{G} \times R_d$ masse totale de matière noire

L'application numérique donne :

$$M_{\text{noire}} \approx \frac{4 \cdot 10^{10}}{6 \cdot 10^{-11}} \times 15 \cdot 10^3 \times 3 \cdot 10^{16} = 3 \cdot 10^{41} \text{ kg}$$

$$\frac{M_{\text{noire}}}{M_{\odot}} = \frac{3 \cdot 10^{41}}{2 \cdot 10^{30}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ donc } \boxed{M_{\text{noire}} = 1,5 \cdot 10^{11} M_{\odot}}$$

On en déduit la masse totale :

$$M_{\text{tot}} = M_{\text{H}} + M_{\text{noire}} = 3,5 \cdot 10^{11} M_{\odot}$$

$\frac{M_{\text{noire}}}{M_{\text{tot}}} = \frac{1,5}{3,5} = 0,45$ donc la matière noire représente environ 45% de la masse de la galaxie.

49. On a $\log(\dot{m}) = \log(\alpha_0) + \beta_0 \log(m)$

avec $\beta_0 = \frac{1,6 - 0,8}{12,0 - 9,0} = 0,8$ la pente de la courbe.

Et (pour $\log m = 10$) : $0 = \log(\alpha_0) + \underbrace{10 \beta_0}_{=8}$

Donc $\log(\alpha_0) = -8$ soit $\alpha_0 = 10^{-8} M_{\odot}^{0,2} \cdot \text{an}^{-1}$

Ainsi : $\boxed{\dot{m} = 10^{-8} \times m^{0,8}}$ en $M_{\odot} \cdot \text{an}^{-1}$

50. La création de masse d'étoiles par unité de masse déjà présente (supposée proportionnelle au nombre d'étoiles présentes) vaut :

$$\frac{\dot{m}}{m} = \alpha_0 m^{\beta_0 - 1} = \frac{\alpha_0}{m^{0,2}}$$

Cette quantité est plus grande pour les galaxies moins massives, pour que ce soit le contraire il faudrait que $\beta_0 \geq 1$.

51. On a $\frac{dm}{dt} = \alpha_0 \cdot m^{\beta_0}$

Donc : $m^{-\beta_0} dm = \alpha_0 dt$

Ainsi : $\frac{m^{1-\beta_0} - m_0^{1-\beta_0}}{1-\beta_0} = \alpha_0 t$

Où encore : $m(t)^{1-\beta_0} = m_0^{1-\beta_0} + (1-\beta_0) \alpha_0 t$

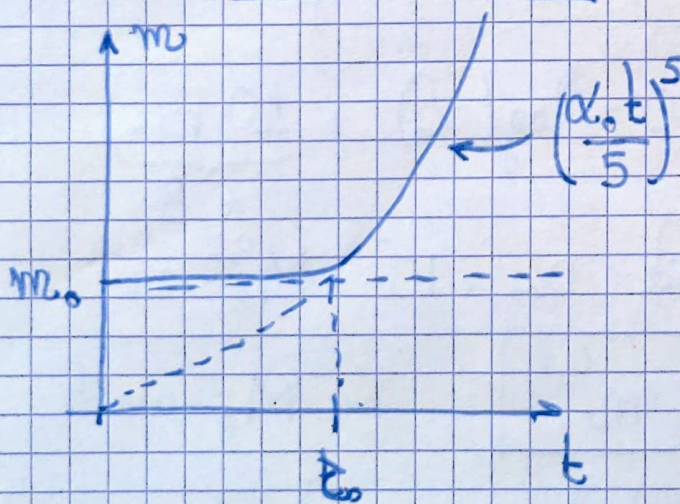
$$m(t) = \left(m_0^{1-\beta_0} + (1-\beta_0) \alpha_0 t \right)^{\frac{1}{1-\beta_0}}$$

Or $\beta_0 = 0,8$ et $1-\beta_0 = \frac{1}{5}$ donc :

$$m(t) = \left(\sqrt[5]{m_0} + \frac{\alpha_0 t}{5} \right)^5$$

On pose $\tau_0 = \frac{5 \sqrt[5]{m_0}}{\alpha_0}$ alors :

$$\begin{cases} \text{si } t \ll \tau_0 : m(t) \approx m_0 \\ \text{si } t \gg \tau_0 : m(t) \approx \left(\frac{\alpha_0 t}{5} \right)^5 \end{cases}$$



La masse d'étoiles reste relativement constante puis augmente brutalement à partir de τ_0 .

52. On a pour $z = 2$: $\frac{1}{3} \approx \frac{3}{4} (H_0 \Delta t)^{2/3}$

Donc $\Delta t \approx \frac{1}{H_0} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{3/2} = \frac{1}{H_0} \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{8}{27 H_0}$

$\approx \frac{8}{27 \times 70} \times \frac{10^6 \cdot 3 \cdot 10^{16}}{10^3} \times \frac{1}{3 \cdot 10^7}$ années

$\approx \frac{8 \cdot 10^{22}}{2 \cdot 10^{13}}$ en km-Mpc⁻¹ conversion des s en années

soit

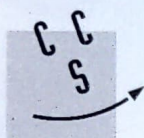
$$\Delta t \approx 4 \text{ milliards d'années}$$

53. La translation des courbes montre que :

$$\log(\alpha_0(z=2)) = \log(\alpha_0(z=0)) + 1,5$$

$$\text{Donc } \alpha_0(z=2) = \alpha_0(z=0) \times 10^{1,5} \\ \approx 30 \cdot \alpha_0(z=0)$$

Depuis le moment $z=2$, le taux de formation d'étoiles a été divisé par 30. Cela peut être dû à la chute de la densité de l'univers et de sa température en raison de son expansion.



~~Numéro d'inscription~~

Prénom

Épreuve : Physique-chimie 2 MP

Feuille

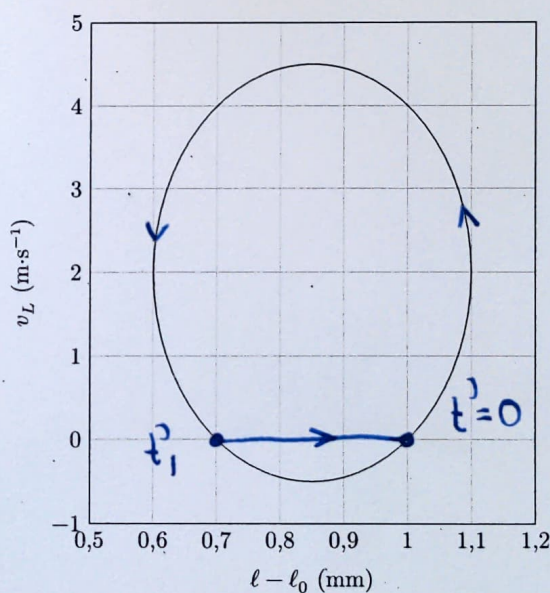


Figure A Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 2,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

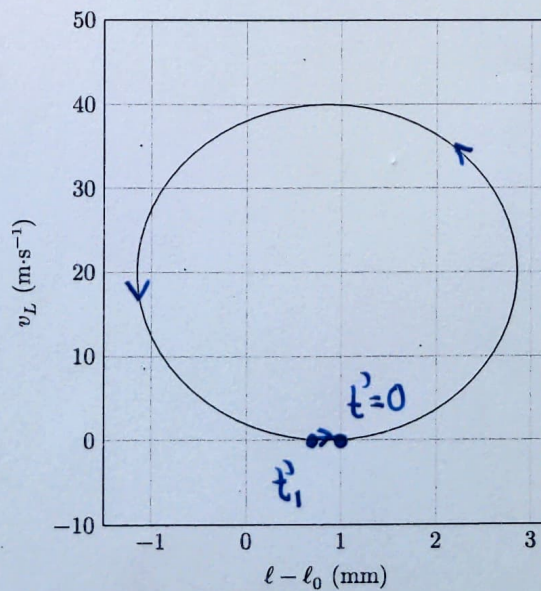


Figure B Résultats de la simulation numérique pour $V_p = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.