

# Corrigé - DSS

## I - Le gecko

### 1 - Interactions entre molécules polaires

1. Molécule de  $\text{HCl}$ :  $\text{H}^{+\delta} \text{---} \text{Cl}^{-\delta}$

Le chlore est plus électronégatif que l'hydrogène donc il porte une charge partielle  $-\delta$  négative. On peut assimiler cette molécule à deux charges  $\pm q$  localisées en  $z = \pm \frac{a}{2}$ , on a alors:

$$\vec{p} = qa \vec{e}_z$$

2. On note  $r_+$  = PM et  $r_-$  = NM.

On se place dans le cadre de l'approximation dipolaire:  $r \gg a$

Alors on peut écrire, en notant  $z$  la coordonnée de M, selon  $\vec{e}_z$ :

$$r^2 - z^2 = r_+^2 - \left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = r_-^2 - \left(z + \frac{a}{2}\right)^2$$

ou la loi de Pythagore.

D'où, en remarquant que  $z = r \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} r_+^2 &= r^2 + \left(r \cos \theta \cdot \frac{a}{2}\right)^2 - (r \cos \theta)^2 \\ &= r^2 - ar \cos \theta + \frac{a^2}{4} \\ &\approx r^2 - ar \cos \theta \quad (\text{approximation dipolaire}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, par le principe de superposition:

$$V_1(r) = V_+(r) + V_-(r)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

crée par +q      crée par -q

d'après l'expression de V pour une charge ponctuelle

$$\text{Or } \frac{1}{r_+} = (r_+^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$$

$$\text{De même } \frac{1}{r_-} \approx \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta\right)$$

$$\text{Ainsi } V_1(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \frac{2a}{2r} \cos \theta \quad \text{ou encore avec } p_1 = qa:$$

$$V_1(M) = \frac{p_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

3. On a  $\vec{E}_1 = -\text{grad } V$

$$= - \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

$$= - \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{2}{\epsilon_0} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\sin \theta}{r^2} \vec{e}_\theta \right]$$

Donc :  $\boxed{\vec{E}_1(M) = - \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)}$

4. On va de la forme de l'énergie potentielle et de  $\vec{F}$ , le couple :

- \* places  $\vec{p}_2$  coïncider à  $\vec{E}_1$  ( $\vec{F} = \vec{0}$  à l'équilibre)
- \*  $\vec{p}_2$  et  $\vec{E}_1$  auront même sens (minimum d'énergie potentielle)

Si l'équilibre est stable  $\rightarrow \boxed{\alpha = 0}$

5. On a, en supposant les moments dipolaires alignés,  $\theta = 0$

donc  $\vec{E}_1 = - \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u}_r$  et  $\vec{p}_2 = p_2 \vec{u}_r$  car  $\alpha = 0$

Ainsi  $\boxed{E_p = - \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = - \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0 r^3}}$

2. N :  $p = 1.1 = 3 \cdot 10^{-25} \text{ C.m}$  et  $r = 0.5 \cdot 10^{-2}$

On trouve  $\boxed{E_p = 1.3 \cdot 10^{-21} \text{ J}}$

## 2- Calcul de la force d'adhérence du g<sub>1</sub> au plafond.

6.  $f$  est une force par unité de surface, homogène à une pression.  
 $D$  est homogène à un volume.

On va voir par exemple que le travail des forces de pression est :

$$\underbrace{\delta W}_{\text{travail}} = - \underbrace{p}_{\text{pression}} \cdot \underbrace{dV}_{\text{volume}}$$

Donc :  $p = \frac{\delta W}{dV}$  est homogène à une pression  $\times$  un volume.

Donc  $p$  est homogène à une énergie.

7. On a d'après le schéma  $D = 1 \text{ m}$ . La force nécessaire pour maintenir le g<sub>1</sub> est  $\vec{F}_1 = mg$  car il n'est soumis qu'à son poids et à l'adhérence.



$$F_{\text{adh}} = f \times S = f \times N_{\text{spatules}} \times a^2 = \frac{f a^2}{6 \times 10^{-5}} \times N_{\text{spatules}}$$

où  $S$  est la surface de contact,  $N_{\text{spatules}}$  le nombre de spatules utilisées et  $a = 0,2 \mu\text{m}$  l'axe côté.

Le nombre total de spatules est  $N_{\text{tot}} = 6 \cdot 10^4 \times 500 = 3 \cdot 10^8$

On a le pourcentage de spatules utilisées :

$$\% = \frac{N_{\text{spatules}}}{N_{\text{tot}}} = \frac{6 \cdot 10^3 \text{ mg}}{f a^2 N_{\text{tot}}} = 7,7 \cdot 10^{-4} \approx \boxed{0,08\%}$$

En pratique, le gecko se déplace et doit soutenir des accélérations qui impliquent occasionnellement  $\|\vec{F}\| > mg$ , donc l'utilisation de plus de spatules.

8. Le mouvement est en deux phases :

∴ Le gecko chute d'une hauteur  $h = 10 \text{ cm}$ , il est soumis seulement à son poids conservatif dans  $R_T$  galiléen. On lui applique le théorème de l'énergie cinétique pour trouver la vitesse  $v_0$  à laquelle il arrive :  $\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$ .

Or, le gecko est soumis à son poids et à sa force de cisaillement  $\vec{F}$  avec  $\|\vec{F}\| = (50\%) \times (1 \text{ patte}) \times (10 \text{ N/patte}) = 5 \text{ N}$ .

Cette force est non conservative et sur un mouvement vertical à son travail est  $W = -\|\vec{F}\| \cdot d$ .

En appliquant le théorème de l'énergie mécanique au gecko dans  $R_T$  galiléen on trouve :  $-\frac{1}{2} m v_0^2 - mgd = -\|\vec{F}\| \cdot d$

On a :  $(\|\vec{F}\| - mg)d = \frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$

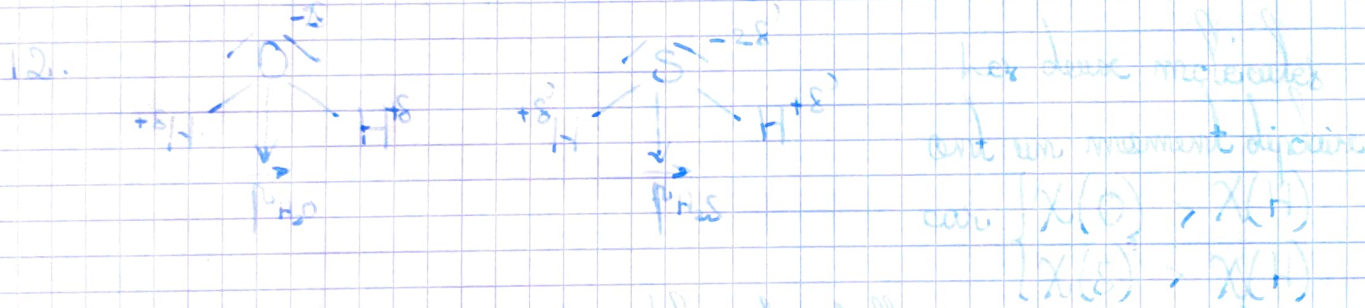
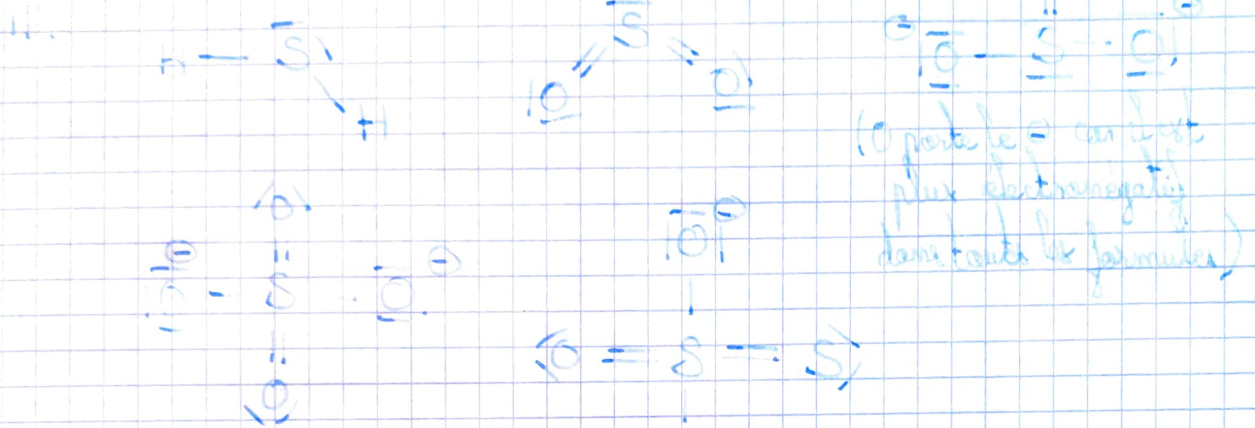
Soit :  $d = h \times \frac{mg}{\|\vec{F}\| - mg} = 11 \text{ mm}$

## I - Autour de la chimie du soufre

9. On a 2 éléments dans le bloc s et 6 dans le bloc p (à partir de la 2<sup>e</sup> période). Donc ici  $Z = 3 \times 2 + 6 + 1$

On a donc  $[Z = 16]$

10. Les électrons de valence sont ceux sur la dernière couche,  
ici  $n = 6$



Mais  $|X(\text{S}) - X(\text{H})|$  est bien plus faible que  $|X(\text{O}) - X(\text{H})|$ .  
 Donc  $|\mu_{\text{H}_2\text{S}}| \ll |\mu_{\text{H}_2\text{O}}|$ . Les liaisons hydrogène sont donc plus fortes dans l'eau, qui a une température de fusion et d'ébullition plus élevée que le soufre.

13. Par la loi des gaz parfaits, le nombre de moles de gaz dans  
 $V = 2,5 \text{ L}$  est :  $n = \frac{pV}{RT} = \frac{10^5 \text{ Pa} \times 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3}{8,3 \text{ J.mol}^{-1}\text{K}^{-1} \times 295 \text{ K}}$

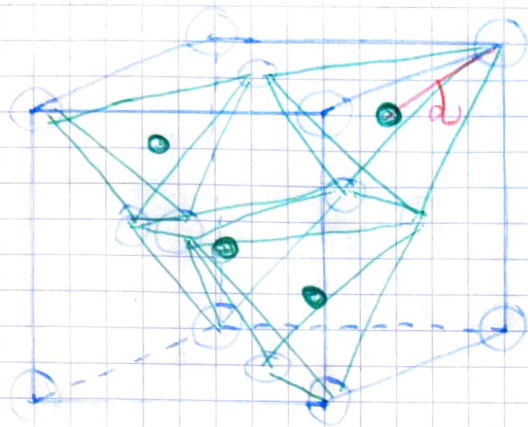
Alors  $n \approx 0,10 \text{ mol}$

D'où la molarité  $[S \approx 0,10 \text{ mol.L}^{-1}]$

$\text{H}_2\text{S}$  est faiblement polaire donc a une solubilité intermédiaire entre  $\text{I}_2$  (apolaire) et  $\text{H}_2\text{O}$  (très polaire).  $\text{NH}_3$  peut former des liaisons hydrogène donc est aussi très soluble.



14.



et 4 sites tétraédriques

15. Nombre d'anions en propre:  $N_s = \underbrace{8 \times \frac{1}{8}}_{\text{sommes}} + \underbrace{6 \times \frac{1}{2}}_{\text{faces}} = 4$

Nombre de cations:  $N_{\text{Zn}} = 4$  entièrement dans la maille.

Ils sont en même proportion, la formule est  $\boxed{\text{ZnS}}$

16.  $\rho = \frac{1}{a^3} \times (4 m_{\text{Zn}} + 4 m_{\text{S}})$  où  $m_x$  est la masse d'un atome X.

Où:  $m_{\text{Zn}} = \frac{M_{\text{Zn}}}{N_A}$  et de même pour  $m_{\text{S}}$ .

$$\Rightarrow \rho = \frac{4}{N_A a^3} (M_{\text{Zn}} + M_{\text{S}})$$

$$M_{\text{Zn}} = 65.4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$M_{\text{S}} = 32.1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

$$a = 543 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 543 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{AN: } \boxed{\rho = 4,05 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}}$$

17. Elle se trace selon la diagonale de la maille en rouge sur le schéma. Il y a 4 anions autour de chaque cation:  $\boxed{[\text{Zn}^{2+}] = 4}$ .  
Il y a 8 sites tétraédriques autour de  $\text{S}^{2-}$  mais seule la moitié est occupée donc  $\boxed{[\text{S}^{2-}] = 4}$ .

18. On a  $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$  ← diagonale du grand cube

$$\text{donc } d = 235 \text{ pm} \text{ et } R(\text{Zn}^{2+}) + R(\text{S}^{2-}) = 258 \text{ pm}$$

mais  $d < R(\text{Zn}^{2+}) + R(\text{S}^{2-})$ , il y a contact entre les ions le long de  $d$ . On a une liaison unique.



19. On a  $d'$  en rouge sur la diagonale d'une poutre  $d' = a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

On doit avoir :  $d = \frac{a\sqrt{3}}{2} = R(\epsilon_m^2) + R(S^2)$

$$\left\{ d' = \frac{a}{\sqrt{2}} = 2R(S^2) \right.$$

D'où :  $R(\epsilon_m^2) + R(S^2) \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \times 215 R(S^2)$

On enca :

$$\underbrace{\frac{R(\epsilon_m^2)}{R(S^2)}}_{= 0.402} \geq \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{= 0.225}$$

L'inégalité est bien vérifiée

20. Le volume occupé est :

$$V = 4 \times \frac{1}{8} R(\epsilon_m^2)^3 + 4 \times \frac{1}{8} R(S^2)^3$$

$$= \frac{16}{3} R (R(\epsilon_m^2)^3 + R(S^2)^3)$$

D'où :  $C_1 = \frac{V}{a^3} = \frac{16}{3a^3} (R(\epsilon_m^2)^3 + R(S^2)^3) = \boxed{0.63}$

## II - Récupération d'énergie vibratoire

### 1 - Généralités

21. Si on applique des accélérations importantes, on va augmenter le déplacement de la masse sismique et donc l'énergie récupérée. En revanche, cela risque d'endommager le système mécanique ou électrique.

22. L'accélération  $a$  est reliée au déplacement  $z$  par  $a = \ddot{z}$ .  
Ainsi on a typiquement  $a = (2\pi f)^2 \times z$  où  $f$  est la fréquence.  
Soit :  $z \sim \frac{a}{(2\pi f)^2} \sim 3.2 \mu\text{m}$

L'énergie récupérée en un cycle est donnée par le travail des forces, qui sont proportionnelles à  $m \cdot a$  où  $m$  est la masse sismique, ainsi  $W \sim m a \times z$ . Pour obtenir la puissance, on dérive,



ainsi  $P = \dot{W} \sim 210 \times W = 210 \times m a \times z$

A.N: on trouve  $P \sim 2 \cdot 10^{-5} \text{ W}$  ce qui n'est pas du tout suffisant pour charger un smartphone ( $P \sim 10 \text{ W}$ )

## 2 - Fonction de transfert

23. En l'absence de vibration, le référentiel du boîtier est galiléen. Dans ce référentiel, on applique le PFD à la masse soumise à:

\* Sans poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{e}_z$

\* La force de rappel  $\vec{F}_R = k(l - l_0) \vec{e}_z$

\* La force de frottement est nulle ( $\vec{F} = \vec{0}$ ) car  $\vec{V}_{H/R_S} = \vec{0}$ .

Ainsi, à l'équilibre, le PFD projeté sur  $\vec{e}_z$  donne:

$$-mg \vec{e}_z + k(l - l_0) \vec{e}_z = \vec{0}$$

D'où:  $\boxed{l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}}$

24. On a:  $\underbrace{\vec{V}_{H/R}}_{\substack{\text{vitesse de M} \\ \text{par rapport au} \\ \text{sol}}} = \underbrace{\vec{V}_{M/R_S}}_{\substack{\text{vitesse par} \\ \text{rapport au} \\ \text{boîtier}}} + \underbrace{\dot{z}_{\text{boîtier}} \vec{e}_z}_{\substack{\text{vitesse du boîtier} \\ \text{par rapport au sol}}}$

On se place dans le référentiel terrestre galiléen, la masse est soumise aux mêmes forces, on applique le PFD au système {masse}:  $m \frac{d}{dt}(\vec{V}_{H/R}) = -mg \vec{e}_z + k(l - l_0) \vec{e}_z + \vec{F}$

avec  $\vec{F} = -\lambda \vec{V}_{H/R_S} = -\lambda \dot{z} \vec{e}_z$ .

$$\left\{ \frac{d}{dt}(\vec{V}_{H/R}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}_{M/R_S}) + \ddot{z}_{\text{boîtier}} \vec{e}_z = (\ddot{z} + \ddot{z}_{\text{boîtier}}) \vec{e}_z \right.$$

On a en projetant sur  $\vec{e}_z$ :

$$m(\ddot{z} + \ddot{z}_{\text{boîtier}}) = k(l - l_{eq}) - \lambda \dot{z}$$

Où par définition de  $l_{eq}$  on a  $l - l_{eq} = -z$  et donc:



$$m(\ddot{z} + \ddot{z}_{\text{vib}}) + \lambda \dot{z} + k z = 0$$

25. On note  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{k m}}{\lambda}$ , alors :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{z}_{\text{vib}}$$

On étudie un mouvement sinusoïdal :  $\begin{cases} z_{\text{vib}}(t) = \underline{z}_{\text{vib}} e^{j\omega t} \\ \dot{z}_{\text{vib}}(t) = \underline{\dot{z}} e^{j\omega t} \end{cases}$

Alors :  $(-\omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{z} = +\omega^2 \underline{z}_{\text{vib}}$

D'où : 
$$H(j\omega) = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} = \boxed{\frac{\omega^2/\omega_0^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}}}$$

Il s'agit d'un filtre passe-haut d'ordre 2, en effet on voit que  $|H(j\omega)| \xrightarrow[\omega \gg \omega_0]{} 1$  et  $|H(j\omega)| \xrightarrow[\omega \ll \omega_0]{} 0$ .

De plus ce filtre présente une résonance car  $Q = 100 > \frac{1}{2}$  d'après l'énoncé.

26. À la fréquence de résonance  $|\underline{z}|$  est maximal donc c'est là que l'on pourra récupérer le plus d'énergie.

### 3 - Transduction électrostatique

27. Soit  $S$  une surface fermée contenant une charge  $Q_{\text{int}}$ . Le flux du champ électrique à travers  $S$  est donné par :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

28. Soit  $M$  un point de l'espace. Tout plan passant par  $M$  et contenant  $\vec{e}_z$  est plan de symétrie de la distribution de charges, donc  $\vec{E}(M)$  est contenu dans ces plans :  $\vec{E}(M) = E(x, y, z) \vec{e}_z$ .

De plus la distribution est invariante par translation selon

$\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  ainsi :  $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$ .

Enfin  $(x, 0, y)$  est plan de symétrie donc  $E(-z) = -E(z)$ .



Autrement dit  $\vec{E}_+ = +E\vec{e}_z$  et  $\vec{E}_- = -E\vec{e}_z$  avec  $E > 0$ .

On prend pour  $S$  un pavé droit entre  $-z$  et  $+z$  dont la base a une surface  $\Sigma$ . Alors :  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\vec{E}_+ - \vec{E}_-) \cdot \vec{e}_z \times \Sigma$   
 $= 2E\Sigma$ .

Or par le théorème de Gauss  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} = \frac{\Sigma \cdot \sigma}{\epsilon_0}$ .

D'où  $2E\Sigma = \frac{\Sigma \cdot \sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$  et :

$$\boxed{\vec{E}_+ = +\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}_- = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z}$$

29. On utilise le principe de superposition, et la linéarité du théorème de Gauss qui nous permet d'affirmer que pour  $-\sigma$  à la place de  $\sigma$  on aura un champ opposé.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } \vec{E}_{z>e} &= \vec{E}_+ + (-\vec{E}_+) = \vec{0} \\ \vec{E}_{z>e} &= \vec{E}_- + (-\vec{E}_+) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z \\ \vec{E}_{z<0} &= \vec{E}_- + (-\vec{E}_-) = \vec{0} \end{aligned}$$

30. La différence de potentiel entre les armatures se calcule par le théorème du gradient :

$$U = V_1 - V_2 = -\int_1^2 \text{grad}(V) \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E} \cdot (-e\vec{e}_z)$$

$$\text{soit } U = \frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

Et la charge portée par les armatures est  $Q = S \times \sigma$ .

$$\text{D'où la capacité } \boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{e}}$$

31. On a maintenant  $d-z \leq e \leq d+z$  et donc :

$$\boxed{C_{\min} = \frac{\epsilon_0 S}{d+z} \quad \text{et} \quad C_{\max} = \frac{\epsilon_0 S}{d-z}}$$

Rq : dans l'énoncé original CC-ND cette formule n'était pas rappelée.

32. Lorsque la capacité est maximale on a  $E = \frac{1}{2} C_{\max} U^2$

La charge vaut alors  $Q = C_{\max} U$ .



Après un cycle on a  $C = C_{\min}$  et toujours  $Q = C_{\max} U$ .

Donc la tension a changé et vaut maintenant  $U' = \frac{Q}{C_{\min}} = \frac{C_{\max}}{C_{\min}} U$

$$\text{Ainsi } E^2 = \frac{1}{2} C_{\min} \times \left( \frac{C_{\max}}{C_{\min}} U \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{C_{\max}^2}{C_{\min}} U^2$$

On a donc:

$$W = E^2 - E = \frac{1}{2} U^2 \left( \frac{C_{\max}^2}{C_{\min}} - C_{\max} \right)$$

$$\text{Soit } \boxed{W = \frac{1}{2} (C_{\max} - C_{\min}) \frac{C_{\max}}{C_{\min}} U^2}$$

33. En se déplaçant, la bobine va bouger par rapport au champ créé par l'aimant ce qui va créer un phénomène d'induction qui repose sur la loi de Faraday:

force électromotrice  $\rightarrow e = - \frac{d\Phi}{dt}$  flux de  $\vec{B}$  à travers la bobine.

#### IV - Mesure d'un coefficient de frottement et interprétation $\mu$

##### 1 - Préliminaire.

34. Soit  $I$  le point de contact entre deux solides  $S_1$  et  $S_2$ :

$$\boxed{\vec{v}_g(S_2/S_1) = \vec{v}(I \in S_2) - \vec{v}(I \in S_1)}$$

Elle ne dépend pas du référentiel.

35. On passe de l'adhérence au glissement lorsque les contraintes appliquées et l'équilibre des forces sont tels que la loi de Coulomb du frottement statique ne peut plus être satisfaite.

36. On passe du glissement à l'adhérence si:

- \* la vitesse de glissement s'annule
- \* ET l'équilibre des forces est compatible avec la loi de Coulomb du frottement statique.



## 2 - Mesure du coefficient de frottement dynamique

37. Phase 1: le fil est tendu, le solide 1 avance et le solide 2 descend.

Phase 2: le fil est détendu, le solide 1 avance et le solide 2 est fixe.

38. On se place dans  $R_+$  galiléen.

On applique le PFD au solide 1, soumis à son poids  $\vec{P}_1 = m\vec{g}$ , les forces de frottement  $\vec{T}$  et  $\vec{N}$  décrites dans l'énoncé et la tension du fil  $\vec{F}_1 = F\vec{e}_x$ . On a  $\vec{T} = -T\vec{e}_x$  car  $\vec{T}$  s'oppose au glissement. On projette sur  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_z$ :

$$\begin{cases} m\ddot{X} = F - T & (1) \\ N - mg = 0 & (2) \end{cases}$$

On applique le PFD au solide 2 soumis à son poids  $\vec{P}_2 = \alpha m\vec{g}$ , et la tension du fil  $\vec{F}_2 = -F\vec{e}_z$ . On projette sur  $(Oz)$ :

$$\alpha m\ddot{Z} = \alpha mg - F \quad (3)$$

39. On est toujours en phase de glissement donc  $\vec{T} = -Nf_d\vec{e}_x$   
Soit  $\vec{T} = -fdmg\vec{e}_x$

40. Le fil étant tendu, il est inextensible, ainsi  $\ddot{X} = \ddot{Z}$

(1) + (3) donne:  $(1+\alpha)m\ddot{X} = \alpha mg - T$   
 $= \alpha mg - fdmg$   
 $= (\alpha - fd)m g$

D'où:  $\ddot{X} = \frac{\alpha - fd}{\alpha + 1} g = \text{cte}$

Et  $\dot{X}(t) = \frac{\alpha - fd}{\alpha + 1} gt$  car on lâche le solide sans vitesse initiale

Le solide s'arrête lorsque  $X - X_0 = H_0$  soit  $\frac{\alpha - fd}{\alpha + 1} \cdot \frac{gt_i^2}{2} = H_0$



Ainsi :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H_0}{g} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha-fd}}$$

$$\text{et } V_1 = \dot{X}(t_1) = X(t_1) \cdot \frac{2}{t_1}$$

D'où :

$$V_1 = \sqrt{2gH_0 \cdot \frac{\alpha-fd}{\alpha+1}}$$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{2H_0}{t_1}$$

41. Dans cette phase  $F=0$  et  $m\ddot{X} = -T = -fdmg$   
D'où  $\ddot{X} = -fdg \Rightarrow \dot{X}(t) = V_1 - fdg(t-t_1)$

$$\Rightarrow X(t) = X_1 + V_1(t-t_1) - \frac{fdg}{2}(t-t_1)^2$$

42. On a arrêt lorsque  $\dot{X}=0 \Rightarrow t_2-t_1 = \frac{V_1}{fdg}$  (avec  $X_1 = X_0 + H_0$ )

$$\text{D'où } D-H_0 = X(t_2)-X_1 = \frac{V_1^2}{fdg} - \frac{fdg}{2} \cdot \left(\frac{V_1}{fdg}\right)^2 = \frac{V_1^2}{2fdg}$$

$$\text{Or on a eu } V_1^2 = 2gH_0 \cdot \frac{\alpha-fd}{\alpha+1}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } D-H_0 &= \frac{H_0}{fd} \cdot \frac{\alpha-fd}{\alpha+1} \Leftrightarrow (1+\alpha)fd(D-H_0) = (\alpha-fd)H_0 \\ &\Rightarrow fd(D(1+\alpha) - \alpha H_0) = \alpha H_0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \boxed{fd = \frac{\alpha H_0}{D(1+\alpha) - \alpha H_0}}$$

43. On considère le système {solide 1 + fil + solide 2} soumis à des forces conservatives, la réaction normale du support et la réaction de la poulie qui ne travaillent pas, et la force de frottement de norme constante.

En phase 1 on applique le TEM dans  $R_+$  galiléen :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}(1+\alpha)mV_1^2 - \alpha mgH_0 = \underbrace{-H_0 \times fd mg}_{\text{travail des forces de frottement}} \quad (1)$$

En phase 2 :

$$\Delta E_m = -\frac{1}{2}mV_1^2 = -(D-H_0) \times fd mg \quad (2)$$

On fait (1) + (1+ $\alpha$ ) $\times$ (2) :



$$\begin{aligned}
 -\alpha mg H_0 &= -H_0 f_d mg - (1+\alpha)(D-H_0) f_d mg \\
 &= D(1+\alpha) f_d mg + \alpha H_0 f_d mg
 \end{aligned}$$

Soit:  $D(1+\alpha) f_d mg = \alpha(1+f_d) mg H_0$

Où encore  $f_d [D(1+\alpha) - \alpha H_0] = \alpha H_0$

Ainsi  $\boxed{f_d = \frac{\alpha H_0}{D(1+\alpha) - \alpha H_0}}$  on retrouve bien le même résultat.

44. Ici  $\alpha = \frac{60}{50} = 1,2$ ,  $H_0 = 40$  cm et  $D = 150$  cm.

On trouve:  $\boxed{f_d = 0,17}$

### 3- Interprétation microscopique des lois de Coulomb

45. On somme sur toutes les jonctions:

$$A = \sum_{\text{jonction}} A_i = \sum_{\text{jonction}} \frac{R_{z_i}}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} \sum_{\text{jonction}} R_{z_i} = \frac{1}{\sigma_c} R_z$$

D'où:  $\boxed{R_z = \sigma_c A}$

46. Pour un bloc d'acier de 300 g, la réaction du support équilibre le poids et  $R_z = mg$ , d'où  $\boxed{A = \frac{mg}{\sigma_c}}$

A.N:  $A \approx 2,9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$

D'où  $\frac{A}{S} = \frac{2,9 \cdot 10^{-9}}{24 \cdot 10^{-4}} \sim \boxed{1,2 \cdot 10^{-6}}$  ainsi  $A \ll S$ .

47. En cas de glissement, d'après l'énoncé:  $|R_x| = \tau_c A$ . En sommant sur toutes les jonctions:  $|R_x| = \tau_c A$

D'où:  $\boxed{\frac{|R_x|}{R_z} = \frac{\tau_c}{\sigma_c}}$

48. On trouve qu'il y a un rapport constant entre la réaction normale et la réaction tangentielle et que  $R_x$  est effectivement indépendante de  $S$ : on explique bien les observations.



49. L'aire de contact pour une jonction est :

$$A_1 = \pi r_0^2 = \pi R^{2/3} \cdot (R R_{z1})^{2/3}$$

Les aspérités étant identiques :

$$A = N A_1 = N \pi R^{2/3} (R R_z)^{2/3}$$

Or  $R_{z1} = \frac{R_z}{N}$  donc :  $A = N^{1/3} \times \pi R^{2/3} (R R_z)^{2/3}$

50. On a toujours  $|R_x| = \zeta_c A$  et donc :

$$\frac{|R_x|}{R_z} = \pi R^{2/3} \zeta_c \cdot R^{2/3} \times \frac{N^{1/3}}{R_z^{1/3}}$$

Ce rapport n'est pas constant, il dépend de  $R_z$  et aussi de la surface apparente de contact  $S$  qui affecte le nombre d'aspérités.

Donc ce modèle n'explique pas les lois du frottement.

51.  $\int_0^\infty \Psi(z) dz = \int_0^\infty dN = N$  nombre total d'aspérités

52. Les jonctions se forment si elles ont un sommet  $z > d$ , d'où :

$$N_J = \int_d^\infty \Psi(z) dz$$

53. C'est la somme des contributions des aires de chacun des groupes de jonctions entre  $z$  et  $z+dz$  :

$$dA = dN \times A_1(z) = dN \times \pi r_0^2(z)$$

Or on sait que  $\begin{cases} r_0 = R^{1/3} (R R_{z1})^{1/3} \\ h = R^{-1/3} (R R_{z2})^{2/3} \end{cases}$

D'où :  $r_0^2 = R \times h$

Et  $h$  correspond à la réduction de hauteur de la sphère :  $h = z - d$ .

D'où  $r_0^2(z) = R \times (z - d)$ .

Ainsi :  $dA = dN \times \pi R (z - d) = \pi R (z - d) \Psi(z) dz$

Soit :  $A = \int_d^\infty \pi R (z - d) \Psi(z) dz$



54. On a de même:  $dR_z = dN \times R_{z_1}(z)$ .

$$\text{Or } h = z-d = R^{-1/3} (\pi R_{z_1})^{2/3}$$

$$\text{Soit } R_{z_1} = \frac{1}{\pi} \times (z-d)^{3/2} R^{1/2}$$

$$\text{Et } dR_z = \frac{\psi(z) dz}{\pi} \times (z-d)^{3/2} \times R^{1/2}$$

$$\text{D'où } R_z = \int_d^\infty \frac{R^{1/2}}{\pi} \cdot (z-d)^{3/2} \psi(z) dz$$

55. Alors  $A = \pi \psi_0 R \int_d^\infty e^{-\alpha z} (z-d) dz$

$$\stackrel{u=z-d}{=} \pi \psi_0 R \int_0^\infty e^{-\alpha d} \cdot u e^{-\alpha u} du$$

$$A = \frac{\pi \psi_0 R}{\alpha^2} e^{-\alpha d} \quad \text{en utilisant le formulaire}$$

De même:

$$R_z = \frac{R^{1/2}}{\pi} \psi_0 \int_d^\infty e^{-\alpha z} (z-d)^{3/2} dz$$

$$= \frac{R^{1/2}}{\pi} \psi_0 e^{-\alpha d} \int_0^\infty u^{3/2} e^{-\alpha u} du$$

$$R_z = \frac{3\sqrt{\pi} R}{4\pi \alpha^{5/2}} \psi_0 e^{-\alpha d}$$

56. Alors  $|R_c| = \zeta_c A$  et :

$$\frac{|R_c|}{R_z} = \frac{\zeta_c \pi \psi_0 R}{\alpha^2} \cdot \frac{4\pi \alpha^{5/2}}{3\sqrt{\pi} R \psi_0} = \frac{4}{3} \zeta_c \pi \sqrt{\pi} \alpha R$$

Ce rapport ne dépend que de  $\zeta_c$ ,  $R$ ,  $\alpha$  et  $R$  qui sont des propriétés du matériau indépendantes de  $R_z$  et de la surface de contact. Donc le modèle permet d'expliquer les propriétés du frottement solide.