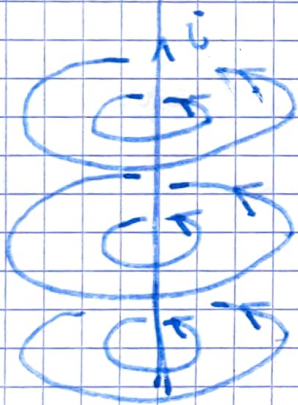


DM5 - Correction Ceintures de Van Allen

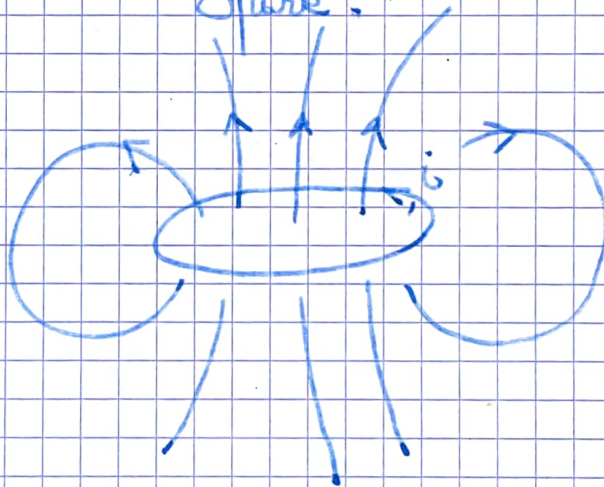
I - Champ magnétique terrestre

1. Une ligne de champ est une ligne tangente en tout point au vecteur champ magnétique.

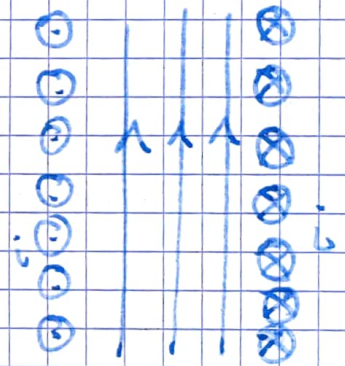
Fil infini :



Spire :



Solénoïde



2. On a $\vec{M} = M \vec{e}_z = -M (\cos \theta \vec{e}_s - \sin \theta \vec{e}_\theta)$

D'où : $(\vec{M} \cdot \vec{e}_s) \vec{e}_s = -M \cos \theta \vec{e}_s$ car le moment est orienté vers le Sud

Ainsi :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} (-\sin \theta \vec{e}_\theta + 2 \cos \theta \vec{e}_s)$$

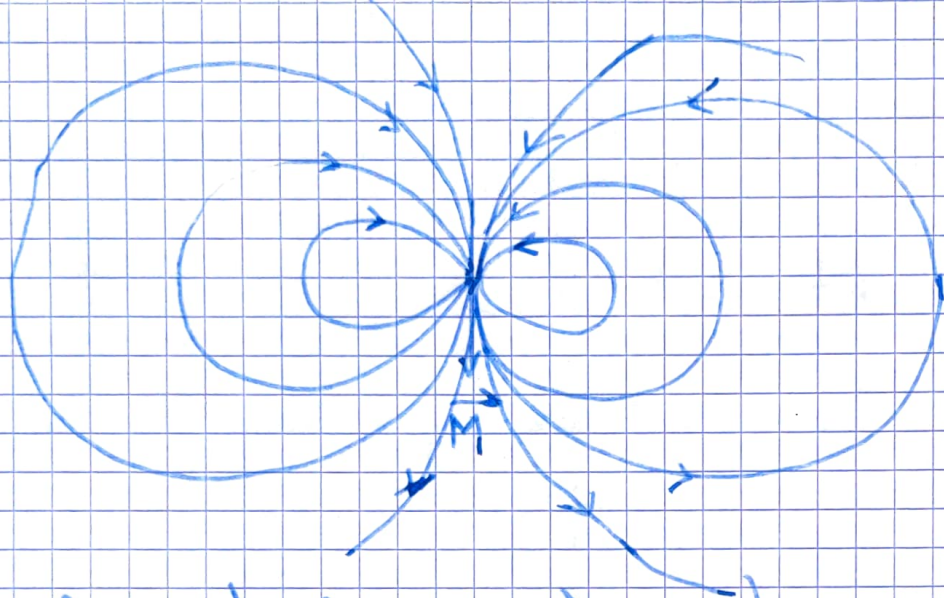
En particulier, aux pôles, $\theta = 0$ ou π et :

$$\|\vec{B}(P)\| = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \times 2|\cos \theta| = \frac{\mu_0 M}{2\pi R^3}$$

D'où : $M = \frac{2\pi R^3 \|\vec{B}\|_{\text{pôle}}}{\mu_0} = \frac{2\pi (6 \cdot 10^6)^3 \cdot 6 \cdot 10^{-5}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 7 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^2$

On retrouve effectivement une valeur proche de celle des données.

3.



Ces lignes de champ sont symétriques par rapport à (xOz) et sont toutes fermées, ce qui n'est pas le cas sur la figure 2 (où un champ continu et uniforme se superpose à celui du dipôle).

I - Formation des aurores polaires

4. On a $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans le plan équatorial, et d'après Q2 :

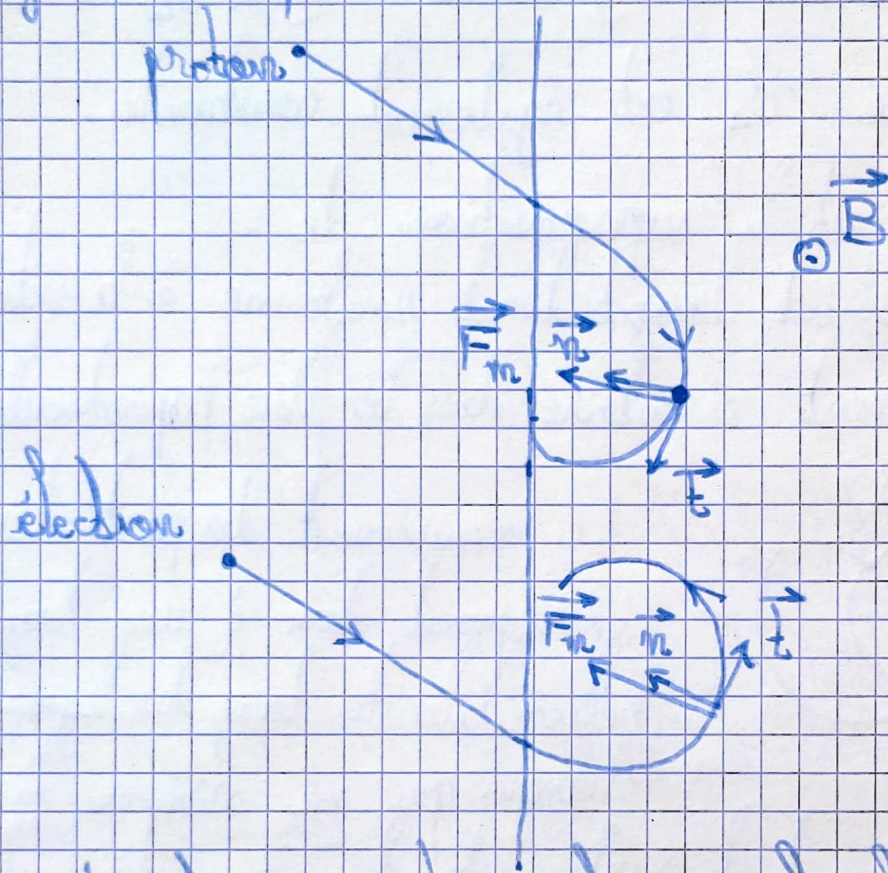
$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 M}{4\pi \cdot (6R_T)^3} \vec{e}_\theta \quad \text{car } \vec{e}_\theta = -\vec{e}_\theta \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2}$$

On constate que $\|\vec{B}\|$ y est environ 100 fois plus faible qu'à la surface de la Terre : il y a une décroissance rapide de la norme du champ avec la distance.

5. La puissance de la force magnétique sur une particule de vitesse $\vec{v}$ est : $P = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$
La vitesse de la particule est donc constante ; sa masse l'étant également, son énergie cinétique se conserve.

6. La force magnétique aura un sens opposé selon la

charge de la particule:



Les trajectoires sont courbées par la force magnétique.

7. On a $\vec{a} = \frac{v_0^2}{r} \vec{n}$ où r est le rayon de courbure.

On applique le PFD à la particule dans le référentiel géocentrique supposé galiléen: $m \vec{a} = \vec{F}_m = |q| \cdot \vec{v} \wedge \vec{B}$

D'où:
$$\frac{m v_0^2}{r_L} = e v_0 B$$

On en déduit $r_L = \frac{v_0 m_0}{e B} = \frac{v_0}{\omega_c}$ avec $\omega_c = \frac{e B}{m}$

8. On projette le PFD à la particule selon $\vec{e}_y$:

$$m \frac{dv_L}{dt} = (q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\parallel \vec{e}_y}) \cdot \underbrace{\vec{e}_y}_{\parallel \vec{e}_y} = 0$$

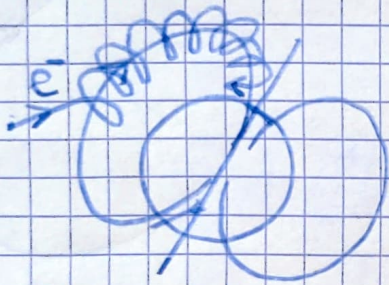
donc $v_L = c$

Or $E_c = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 + \frac{1}{2} m v_{\parallel}^2 = c^2$

On en déduit que $v_{\perp}$ est également constante.

9. La trajectoire est la superposition de :

- * Un mouvement longitudinal uniforme à la vitesse $v_{\parallel}$
- * Un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$



Le mouvement des particules chargées correspond donc à une trajectoire hélicoïdale le long des lignes de champ; qui va arriver là où

ces lignes rejoignent la surface de la Terre, donc au niveau des pôles magnétiques.

III - Ceintures de Van Allen

10.  $\mu = i S \vec{n}$ ← normale à la boucle orientée dans le sens direct

courant ↑ section de la boucle

11. La particule de charge q , parcourt un cercle de rayon $r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c}$. Ceci correspond à une boucle de courant de section $S = \pi r_L^2$. Le courant est donné par :

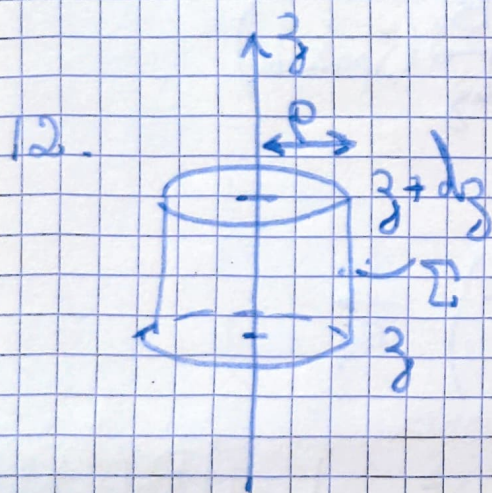
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{\frac{2\pi r_L}{v_{\perp}}} = \frac{q v_{\perp}}{2\pi r_L}$$

Enfin d'après Q.6, on a $\vec{n} = \begin{cases} -\vec{e}_z & \text{pour un proton} \\ +\vec{e}_z & \text{pour un électron} \end{cases}$

Donc $\vec{n} = -\frac{q}{|q|} \vec{e}_z$

Ainsi: $\vec{\mu} = -\frac{q \hbar}{2m\gamma_L} \cdot \hbar \gamma_L^2 \cdot \frac{q}{|q|} \vec{e}_z$ avec $\gamma_L = \frac{v_1 m}{|q| B}$

$$= -\frac{m \gamma_L^2}{2B} \underbrace{\left(\frac{q}{|q|}\right)^2}_{=1} \vec{e}_z = \boxed{-\frac{m \gamma_L^2}{2B} \vec{e}_z}$$



On a, par conservation du flux:

$$\Phi = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Or:

$$\Phi = -\pi \rho^2 B_z(z) + \pi \rho^2 B_z(z+dz) + 2\pi \rho dz B_\rho(z)$$

Donc: $\frac{2}{\rho} B_\rho(\rho, z) = \frac{B_z(z) - B_z(z+dz)}{dz} = -\frac{dB_z}{dz}$

Ainsi:

$$\boxed{B_\rho(\rho, z) = -\frac{\rho}{2} \frac{dB_z}{dz}}$$

13. La particule subit une force:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{mag}} &= q \vec{v}_1 \wedge \vec{B} = q \vec{v}_1 \wedge (B_z \vec{e}_z + B_\rho \vec{e}_\rho) \\ &= q v_1 \vec{e}_t \wedge (B_z \vec{e}_z - B_\rho \vec{n}) \end{aligned}$$

dans le repère de Frenet

Or $\vec{e}_t \wedge \vec{n} = \begin{cases} -\vec{e}_z & \text{pour un proton} \\ +\vec{e}_z & \text{pour un électron} \end{cases}$

d'après Q.6

Donc $\vec{L} \times \vec{v} = -\frac{q}{|q|} \vec{e}_z$ et :

$$F_z = \vec{F}_{\text{mag}} \cdot \vec{e}_z = q \vec{v}_\perp B_\varphi \times \frac{q}{|q|} = -\frac{q^2 v_\perp}{|q|} \cdot \frac{r_L}{2} \times \frac{dB_z}{dz}$$

$$= -\frac{q^2 v_\perp}{|q|} \cdot \frac{m v_\perp^2}{2|q| B} \frac{dB_z}{dz} = -\left(\frac{q}{|q|}\right)^2 \cdot \frac{m v_\perp^2}{2B} \frac{dB_z}{dz}$$

la particule
est en $p = r_L$

14. On a, le long du trajet de la particule :

$$\frac{d}{dt} (B(z_{\text{particule}}(t))) = \underbrace{\frac{dz_{\text{particule}}}{dt}}_{=v_L} \cdot \frac{dB_z}{dz}(z_{\text{particule}})$$

15. On peut écrire que :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{B_z(z_{\text{particule}})} \times \frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) \vec{e}_z$$

$$= \left[-\frac{1}{B_z} \times \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) + \frac{1}{2} m v_\perp^2 \times \frac{1}{B_z^2} \frac{dB_z(z_{\text{particule}})}{dt} \right] \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{B_z} \left[\frac{1}{2} m v_\perp^2 \times v_L \cdot \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{dz} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) \right] \vec{e}_z$$

Or en appliquant le PFD à la particule projeté sur $\vec{e}_z$ on trouve :

$$m \frac{dv_L}{dt} = F_z = -\frac{1}{2} m v_\perp^2 \times \frac{1}{B_z} \frac{dB_z}{dz}$$

D'où :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{1}{B_z} \left[-m v_L \frac{dv_L}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right) \right] \vec{e}_z$$

$$= -\frac{1}{B_z} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_\perp^2 + \frac{1}{2} m v_L^2 \right] \vec{e}_z = 0$$

par conservation
de l'énergie cinétique

16. On a vu $\vec{\mu} = -\frac{m v_L^2}{2B} \vec{e}_z$

Donc: $-\vec{\mu} \cdot \vec{B} = +\frac{1}{2} m v_L^2$

L'énergie cinétique associée au mouvement circulaire de la particule est la même que celle d'un dipôle magnétique rigide placé sur l'axe (Oz) et soumis au champ $\vec{B}$, dont l'énergie potentielle est donnée par: $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

L'énergie cinétique de ce dipôle se réduit alors à $\frac{1}{2} m v_L^2$.

17. L'énergie totale de la particule est donnée par:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_L^2 - \vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$= \frac{1}{2} m v_L^2 + \mu \vec{e}_z \cdot B \vec{e}_z \quad \text{car } \vec{\mu} = -\mu \vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{2} m v_L^2 + \mu B \quad \text{avec } \mu > 0 \text{ (Q11)}$$

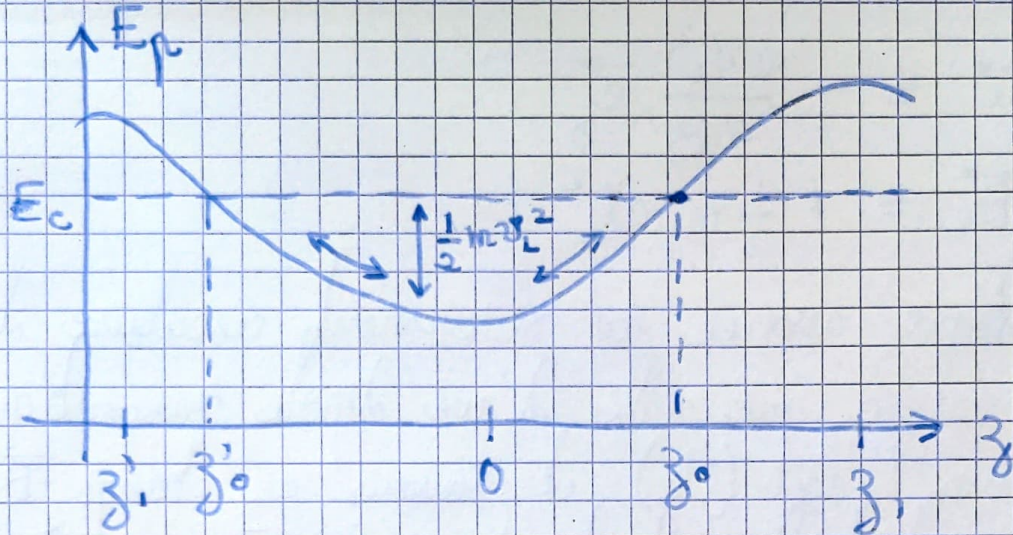
Donc $E_c \geq \mu B$ car $\frac{1}{2} m v_L^2$.

La particule ne peut rester que dans des zones où

$$B \leq B_{\max} = \frac{E_c}{\mu}$$

18. $\vec{B}$ est à flux conservatif, donc des lignes de champ plus resserrées indiquent un champ plus intense: $B_1 \geq B_0$

19. On peut tracer $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = \mu B$ en fonction de la position: on voit que le mouvement est lié entre deux points.



$\frac{1}{2} m v_L^2 \geq 0$
donc la particule
reste entre M_0 et M_0'

Comme la particule est confinée entre ces deux points, elle ne peut jamais aller au bout des lignes de champ, d'où la formation des ceintures de Van Allen.

20. Le déplacement de 0 à z_0 dure $\frac{T}{4}$:

$$\frac{T}{4} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{v} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\dot{z}} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{v_L} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{\frac{2\mu}{m}(B_{\max} - B_z(z))}}$$

$$\text{car } \frac{1}{2} m v_L^2 = \mu (B_{\max} - B_z(z))$$

D'où le résultat de l'énoncé.

21. En ordre de grandeur: $T \sim \sqrt{\frac{m}{\mu B}} z_0 \sim \sqrt{\frac{m}{E_c}} \cdot z_0$

$$\text{car } \mu B = \frac{1}{2} m v_L^2 = E_c \quad (\text{l'essentiel de l'énergie cinétique est lié au mouvement circulaire})$$

On peut prendre $z_0 \sim R_T \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m}$

On trouve $T_{\text{proton}} \approx 0,9 \text{ s}$ et $T_{\text{électron}} \approx 70 \text{ ns}$

On a au plus un ordre de grandeur d'écart avec les mesures ce qui est déjà relativement satisfaisant pour une estimation grossière; notre modèle est capable de capturer l'écart entre les deux particules.