Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

à rendre pour le 12 novembre 2026

Physique Chimie

DM 9

L'arc-en-ciel
(Adapté de CCINP 2023 et X 2008)

1 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

1.1 Arc-en-ciel principal (CCINP)

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel. On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n. Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la figure 1. Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i. L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

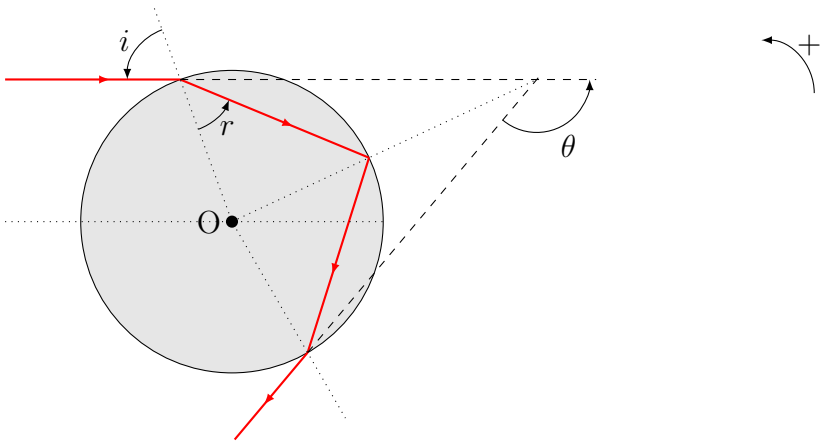


Figure 1: Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (figure 1) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

☐ **1** – Rappeler les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r.

☐ **2** – La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté θ (figure 1). Montrer que : $\theta = \pi - 4r + 2i$. Exprimer l'angle θ en fonction de n et de $y = \sin(i)$.

☐ **3** – Montrer que $\theta(y)$ passe par un extremum lorsque y a pour valeur :

$$y_0 = \sin(i_0) = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Donnée : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \arcsin(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$

☐ **4** – Justifier à l'aide de la figure 2 que l'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\theta_c = \theta(y_0)$.

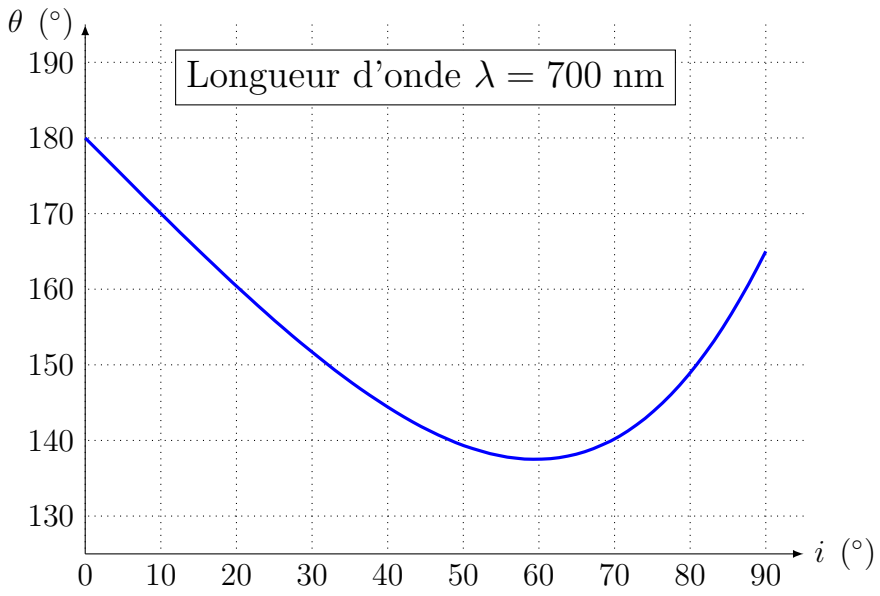


Figure 2: Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

☐ **5** – Calculer y_0 et θ_c (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400$ nm, $n = 1{,}343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1{,}330$).

☐ **6** – Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'œil de l'observateur, tracer les rayons émergents rouge et bleu dans la direction θ_c. L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

1.2 Arc-en-ciel secondaire (X)

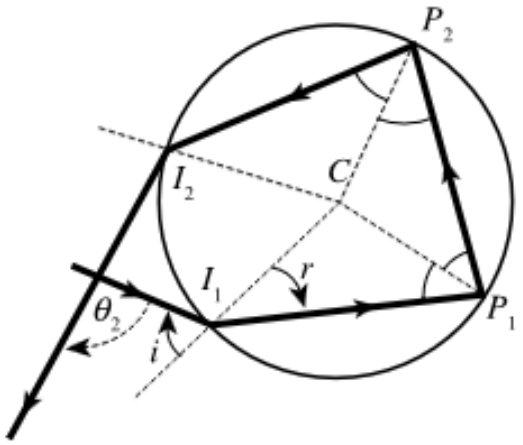


Figure 3: Rayon subissant deux réflexions internes.

En réalité, un rayon incident peut subir plusieurs réflexions internes ; la figure 3 illustre le cas de deux réflexions. On admettra les deux résultats suivants :

- L'angle d'émergence de l'arc d'ordre k, correspondant à k réflexions internes, est

$$\theta_k = k\pi + 2i - 2(k+1)r$$

- l'angle de déviation critique (déviation stationnaire) θ_c d'ordre k est donné par :

$$\theta_c^k = k\pi + 2\arccos\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}} - 2(k+1)\arccos\left(\frac{k+1}{n}\sqrt{\frac{n^2-1}{k(k+2)}}\right)$$

☐ **7** – Justifier que l'arc primaire et l'arc secondaire ($k = 2$) ne se recouvrent pas (la région entre les deux arcs s'appelle la bande sombre d'Alexandre). Quel est l'ordre des couleurs dans l'arc secondaire ? Cet arc est-il situé à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc primaire ?

☐ **8** – En quoi les dispersions spatiales des longueurs d'onde par un prisme et par une goutte sont-elles différentes ? Pourquoi n'observe-t-on jamais l'arc-en-ciel tertiaire ?

2 Théorie ondulatoire de l'arc en ciel

2.1 Observation des arcs surnuméraires (CCINP)

On cherche à rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses.

Deux sources lumineuses ponctuelles S_1 et S_2 émettent deux ondes électromagnétiques monochromatiques de pulsations respectives ω_1 et ω_2.

Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice n et interfèrent en un point P après avoir parcouru les distances $x_1 = S_1P$ et $x_2 = S_2P$. On modélise les amplitudes des ondes en P par les grandeurs scalaires :

$$s_1(P,t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1)$$

$$s_2(P,t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

avec $k_i = n_i \frac{\omega}{c}$ ($i = 1$ ou 2), a_1, a_2, φ_1 et φ_2 constantes. c est la célérité de la lumière dans le vide.

☐ **9** – Donner un ordre de grandeur de ω_1 et ω_2 pour la lumière visible.

☐ **10** – L'intensité lumineuse $I(P)$ observée à l'œil nu en P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en P, soit : $I(P) = K \langle s^2(P,t) \rangle_\tau$. Sur quelle durée τ cette valeur moyenne est-elle calculée ?

☐ **11** – Calculer l'intensité $I(P)$ et montrer qu'elle s'écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + I_{12}(P)$$

À quelle(s) condition(s) le terme $I_{12}(P)$ est-il non nul ?

Donnée : $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$

☐ **12** – On suppose dans la suite que $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ et $\varphi_1 = \varphi_2$. Montrer que l'intensité en P s'écrit :

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta(P)\right)$$

où λ est la longueur d'onde dans le vide. La grandeur $\delta(P)$, appelée différence de marche, sera exprimée en fonction de l'indice n du milieu, de x_1 et de x_2.

Il est possible (photo 4) dans un arc-en-ciel d'observer, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, un phénomène d'interférences responsable d'arcs dits *surnuméraires*.

☐ **13** – Représenter la courbe $I(P)$ en fonction de $\delta(P)$. En observant la photo 4, que peut-on dire de I_1 et I_2 ?

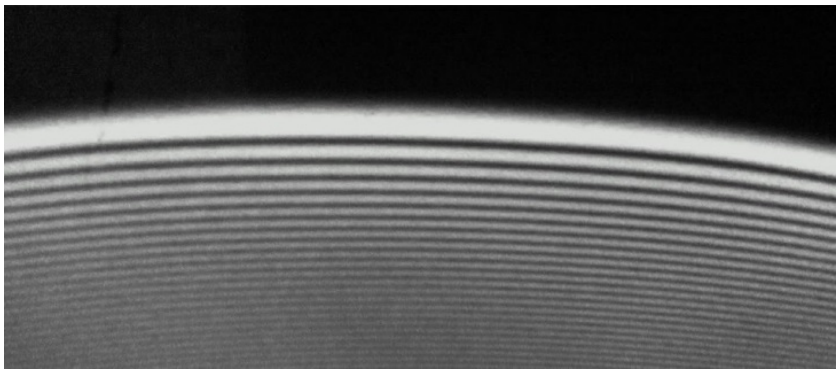


Figure 4: Franges d'interférences obtenues en lumière monochromatique avec une goutte d'eau.

2.2 Calcul de la position des arcs (X)

Pour expliquer la structure des arcs surnuméraires, et notamment le fait qu'ils soient de plus en plus resserrés en s'éloignant de l'arc-en-ciel, il faut une description quantitative de ce phénomène.

On considère une goutte sphérique de rayon a, éclairée par un rayon situé à la distance b de son centre ; la grandeur b s'appelle paramètre d'impact. L'angle d'incidence est noté i, l'angle de réfraction est noté r, le point de réflexion interne est noté P. Le trait plein correspond au rayon critique qui donne une déviation θ_c, de paramètre d'impact b_0, et les traits tiretés à deux rayons voisins symétriques $b = b_0 \pm \delta b$. On pose $\dfrac{b}{a} = \sin i = y$.

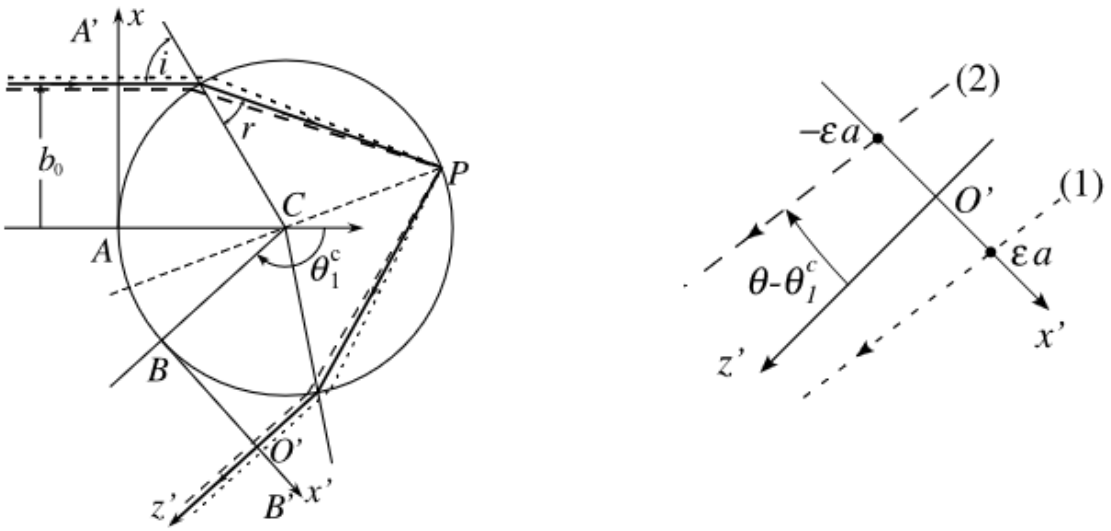


Figure 5: A gauche : Trajet de la lumière dans une goutte de centre C et de rayon a, au voisinage de l'angle critique. A droite : agrandissement autour de O' avec exagération de l'angle de déviation.

Dans la suite, on note $\theta_0'' = \left.\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}y^2}\right|_{y=y_0}$ et on suppose que au voisinage de θ_c^1 :

$$\theta(y) \approx \theta_c^1 + \frac{1}{2}\theta_0''(y-y_0)^2$$

☐ **14** – Pour $\theta = \theta_c^1$, la position du point P est stationnaire et les trois rayons voisins représentés sur la figure 5, de paramètres respectifs $(b_0, b_0 \pm \delta b)$ convergent, au second ordre près en δb, au point P ; justifier cette convergence. Quelle est, dans cette approximation, la symétrie associant le rayon incident au rayon émergent ?

Dans toute la suite, l'onde sortante est modélisée localement comme une onde cylindrique orthogonale à la figure et le modèle d'étude est limité à deux dimensions, dans le plan méridien de la figure 5. Au voisinage de l'angle critique, la dépendance quadratique de $\theta - \theta_c^1$ en fonction de $\Delta y = y - y_0$ entraîne que deux rayons proches du rayon critique et symétriques par rapport à ce dernier émergent avec le même angle de sortie (figure 5.b). Une interférence à l'infini entre ces deux rayons parallèles est dès lors possible. Sur la figure 5, la surface d'onde plane incidente de trace AA' et le plan de trace BB' nous serviront à préciser les phases optiques au voisinage du rayon critique.

La direction de sortie du rayon critique est choisie comme axe $O'z'$; l'axe $O'x'$, porté par BB', est représenté sur la figure 5. L'amplitude de l'onde sortante s'exprime par :

$$A(x', z', t) \propto e^{i(\omega t - \Phi(x', z'))}$$

On cherche à déterminer la phase (réelle) $\Phi(x', z')$ au voisinage du point O', situé sur le rayon critique. La phase de l'onde lumineuse pour les points de l'axe BB' est notée $\psi(x') = \Phi(x', 0)$.

☐ **15** – Pour $|\theta - \theta_c^1| \ll 1$, justifier, au voisinage de O', la forme $\Phi(x', z') \approx \psi(x') + kz'$ où $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{2\pi}{\lambda}$.

☐ **16** – L'équation de la surface d'onde passant par O' est donc $kz' = \psi(0) - \psi(x')$. Rappeler le lien géométrique entre rayons et surfaces d'onde. Représenter le résultat sur une figure (toujours dans le plan méridien) où figureront le rayon critique et un rayon voisin. Établir alors la relation $\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x'} \approx -k(\theta - \theta_c^1)$ en tenant compte de l'inégalité $|\theta - \theta_c^1| \ll 1$.

☐ **17** – On pose, au voisinage de la déviation critique, $x' = \epsilon a$, avec $0 < \epsilon \ll 1$. Montrer que $\epsilon \approx y - y_0$. Établir alors la relation : $\psi(x') - \psi(0) = -\dfrac{1}{6}ka\theta_0''\epsilon^3$.

☐ **18** – Représenter l'allure locale de la surface d'onde passant par O'.

Soient deux rayons sortants (1) et (2) (figure 5.b) correspondant à deux rayons incidents proches du rayon critique et symétriques par rapport à ce dernier. Ces rayons émergents, parallèles, interfèrent à l'infini. Ils coupent BB' en $x'_{\pm} = \pm\epsilon a$. Au déphasage $\psi(\epsilon a) - \psi(-\epsilon a)$ au niveau de BB' s'ajoute le déphasage de propagation dû à leur inclinaison commune $(\theta - \theta_c^1)$ par rapport à $O'z'$.

☐ **19** – Calculer la différence de marche correspondante et le déphasage associé. Montrer que le déphasage total $\Delta(\epsilon)$, à l'ordre non nul le plus bas en ϵ, est donné par :

$$\Delta(\epsilon) = 2ka \times \frac{1}{3}\theta_0''\epsilon^3$$

☐ **20** – Déduire de l'étude qui précède que les angles d'interférence constructive, θ_N , sont exprimés par :

$$\theta_N - \theta_c^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi N}{ka}\right)^{2/3}\theta_0''^{1/3}$$

, où N est un nombre entier. Commenter en comparant avec la photographie étudiée précédemment (figure 4).

☐ **21** – Pourquoi les arcs surnuméraires associés aux gouttes de grosse taille sont-ils en pratique invisibles, confondus avec l'arc primaire ? Quel est l'effet de la diversité de la taille des gouttes sur l'observabilité des arcs surnuméraires ?

☐ **22** – On admet que les arcs surnuméraires ne sont visibles que lorsque leur séparation est supérieure à l'étalement angulaire dû à la dispersion, soit, pour $N = 1$, $\theta_1 - \theta_c^1 > 3 \cdot 10^{-2}$ rad. Adoptant la valeur numérique $\theta_0'' = 9.9$, calculer $a_{\max}$ pour une longueur d'onde de 700 nm. Commenter.

3 Conclusion

☐ **23** – A la lumière des développements précédents, commenter de manière aussi détaillée que possible la photographie ci-dessous.



Figure 6: Photographie d'un arc-en-ciel. Source : Wikimedia Commons, Alexis Dworsky.