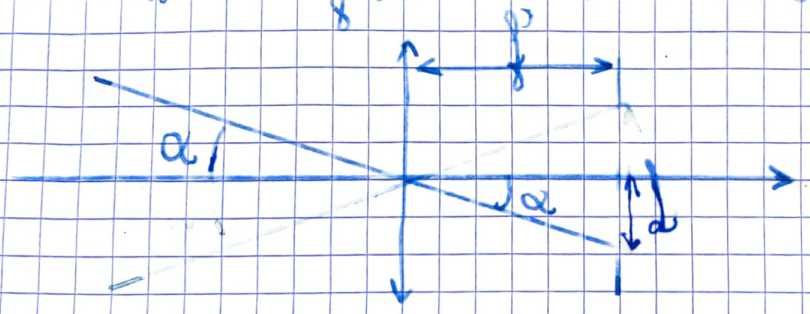
DM 8 - Microscopie

I - Pouvoir de résolution de l'œil

On a N cônes par unité de surface au centre de la fovéa, donc la surface occupée par un cône est $S = \frac{1}{N}$.
On peut donc supposer que la distance entre deux cônes est donnée par $d = \sqrt{S}$.

Considérons deux rayons arrivant avec un angle α_1 les séparant et heurtant la fovéa sur deux cônes voisins :



Alors :

$$\tan \alpha_1 = \frac{d}{f'} = \frac{\sqrt{S}}{f'}$$

Le pouvoir de résolution est en effet atteint lorsque les rayons touchent des cônes voisins.

Alors : $\alpha_1 \approx \tan \alpha_1 = \frac{\sqrt{S}}{f'} = \boxed{\frac{1}{f'\sqrt{N}}}$

$$\frac{1}{\alpha_1} \approx 16 \times \sqrt{16 \cdot 10^4} \approx 4 \times 16 \cdot 10^2 = 6{,}4 \cdot 10^3 \approx \frac{2}{3} \cdot 10^4$$

D'où : $\alpha_1 \approx \frac{3}{2} \cdot 10^{-4}$ rad

$$\approx \frac{3}{2} \cdot 10^{-4} \times 60 \times \frac{180}{\pi} \approx \boxed{0{,}5 \text{ minute}}$$

$\left(1' = \frac{1}{60}° = \frac{1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}\ \text{rad}\right)$

2. La taille de la tache de diffraction sur la fovéa est donnée par $d = 1,22 \cdot \frac{\lambda f'}{D}$ d'après le document 2.

L'angle minimal permettant d'observer deux taches est atteint lorsque la distance entre les images géométriques (centres des figures de diffraction) est d donc lorsque :

$$\tan(\alpha_2) = \frac{d}{f'} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}.$$

Alors : $\alpha_2 \simeq 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = \frac{6}{5} \cdot \frac{500 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-3}} \simeq 2 \cdot 10^{-4}$ rad

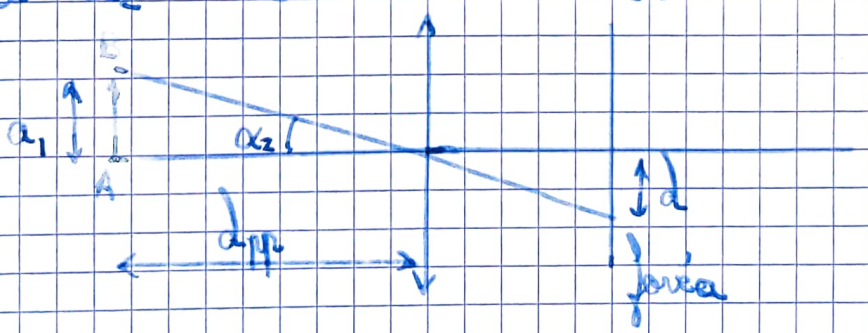
$$= 2 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot \frac{180}{\pi} \simeq \boxed{0,7 \text{ minute d'arc}}$$

$\alpha_2 > \alpha_1$ donc c'est la diffraction par la pupille qui limite le pouvoir de résolution de l'œil.

La plus petite taille observable à 25 cm est observée :

* Au punctum proximum : on place l'objet le plus près possible à la distance $d_{pp} = 25$ cm.
* Sous l'angle $\alpha_2 = 1' = 3 \cdot 10^{-4}$ rad.

* Alors :



$$\tan(\alpha_2) = \frac{a_1}{d_{pp}}$$

Et pour $\alpha_2 = \alpha_2$ (petit angle)

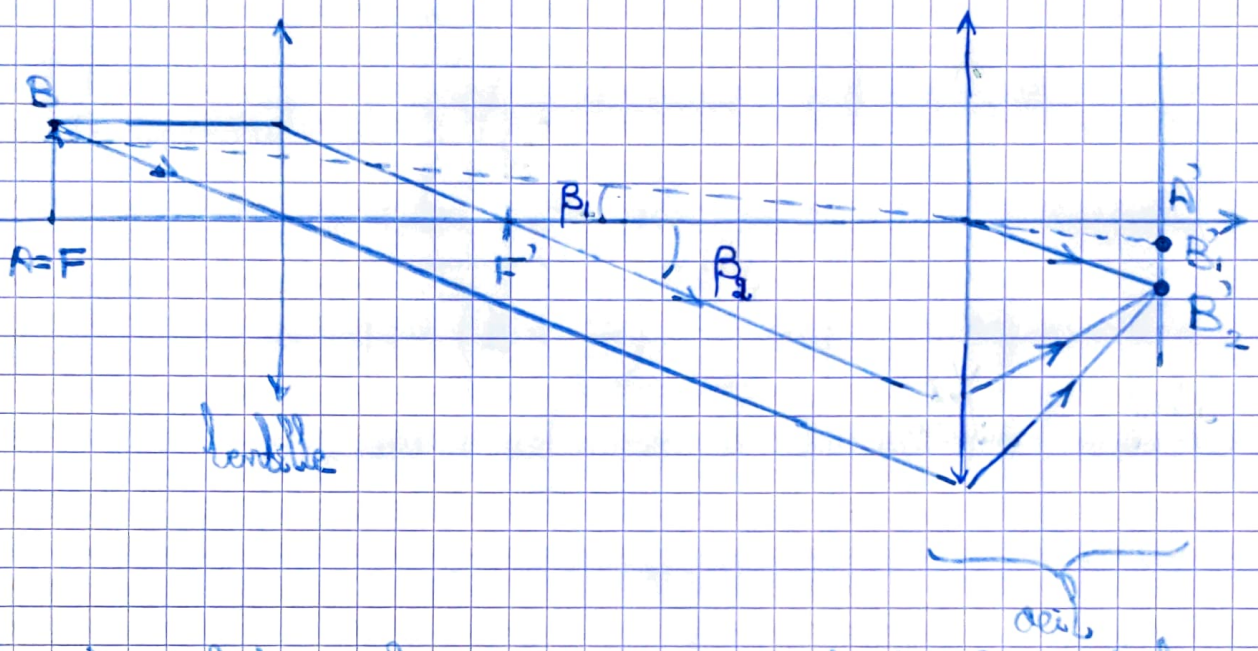
Donc : $a_1 \simeq \alpha_2 \times d_{pp} \simeq 3 \cdot 10^{-4} \times 0,25$ m.

$$\boxed{a_1 \simeq 7,5 \text{ µm}}$$

C'est la taille d'une spore de radis, par exemple.

I - Microscope de Van Leeuwenhoek

4.



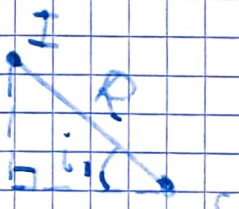
En plaçant l'objet à observer au foyer objet de la lentille, on le voit sous un angle β_2 supérieur à l'angle β_1 sous lequel il serait observé en l'absence de lentille ; l'image $A'B_2$ est alors agrandie par rapport à l'image $A'B'_1$ sur la rétine. De plus, l'œil n'a pas besoin d'accommoder pour cette observation.

5. Par les lois de Descartes : $\begin{cases} \sin i_1 = n \sin r_1 \\ \sin i_2 = n \sin r_2 \end{cases}$

De plus CIJ est isocèle donc $r_1 = r_2$.

Donc $\sin i_1 = \sin i_2$ et donc $\boxed{i_1 = i_2}$

De plus $\boxed{x = R \sin i_1}$ (cf schéma ci-contre).



Enfin, en faisant la somme des angles dans CIJ :

$$\pi = r_1 + r_2 + (\pi - i_1 - i_2)$$

On a $\sin r_1 = \sin r_2 = \frac{1}{n} \sin i_1$

D'où : $r_1 = r_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right)$

Mais $i_1 \ll 1$ dans le cadre de l'approximation de Gauss.

Donc : $r_1 = r_2 \approx \frac{i_1}{n}$ et : $\frac{2 i_1}{n} - i_1 - B_x = 0$

Ou encore : $\boxed{B_x = \left(\frac{2}{n} - 1\right) i_1}$

Enfin en faisant la somme des angles dans CJF' :

$\pi = B_x + B + \pi - i_2$ avec $i_2 = i_1$

Donc $B = i_1 - B_x = \frac{x}{R} - \left(\frac{2}{n} - 1\right)\frac{x}{R}$ en utilisant les formules avec $\sin i_1 \approx i_1$

Ou encore : $\boxed{B = 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x}{R}}$

Par la loi des sinus dans CJF' : $\frac{CJ}{\sin B} = \frac{CF'}{\sin(\pi - i_2)}$

D'où : $f'_L = CF' = \frac{\sin(\pi - i_2)}{\sin B} \cdot CJ = R \times \frac{i_1}{B}$

($i_2 = i_1$ et petits angles)

$$= R \times \frac{\frac{x}{R}}{2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{x}{R}}$$

D'où : $\boxed{f'_L = \frac{nR}{2(n-1)}}$ AN : $f'_L = \frac{1,5 \times 0,6}{0,5 \times 2} = \boxed{0,9 \text{ mm}}$

On peut remarquer que f'_L ne dépend pas de x donc on a bien stigmatisme approché dans les conditions de Gauss.

6. On a $\gamma = \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ et $|\gamma| > 1$ donc $|\overline{CA'}| > |\overline{CA}|$

donc $|\overline{CA}| < \frac{f}{2}$.

conformément à la figure 3. On a $\ell = \overline{OA'} = \overline{AA'}$.

Posons $x = \overline{OC} = -\overline{CA} > 0$. Alors $\gamma' = \dfrac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = \dfrac{\ell - x}{-x}$.

De plus par la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{\overline{CF'}} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{\ell - x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'_L}$$

On encore après multiplication des deux membres par $x(\ell - x) f'_L$:

$$x f'_L + (\ell - x) f'_L = x(\ell - x)$$

Et donc : $x^2 - \ell x + f'_L \cdot \ell = 0$

Le discriminant est $\Delta = \ell^2 - 4 f'_L \ell = \ell(\ell - 4 f'_L)$

Alors :

$$x = \frac{1}{2}\left(\ell \pm \sqrt{\ell(\ell - 4f'_L)}\right)$$ on prend le signe - car on a vu que $x < \frac{\ell}{2}$

$$= \frac{1}{2}\ell\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f'_L}{\ell}}\right)$$

$$\simeq \frac{1}{2}\ell \times \frac{2f'_L}{\ell}$$ par un DL, en $4f'_L/\ell$

$$\simeq f'_L.$$

Et donc : $\gamma = \dfrac{\ell - f'_L}{-f'_L}$ ou encore $\boxed{\gamma = -\left(\dfrac{\ell}{f'_L} - 1\right)}$

Application numérique : $\gamma \simeq \dfrac{200}{3,5} \simeq \boxed{60}$

III - Microscope moderne

7. On a $\Delta = \overline{F_1 F_2} = \overline{F_1 O_1} + \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 F_2}$

$$= -f'_1 + d_0 - f'_2$$

$$\boxed{\Delta = d_0 - (f'_1 + f'_2)}$$

8. On veut que l'œil puisse observer sans accommoder donc on doit avoir une image à l'infini par le microscope, ce qui signifie que l'image de AB par (L_2) doit être dans le plan focal objet de (L_2) : $A \xrightarrow{L_1} F_2' \xrightarrow{L_2} \infty$

Par la relation de conjugaison de Descartes :

$$-\frac{1}{\overline{O_1A}} + \frac{1}{\overline{O_1F_2'}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \overline{O_1A} = -h_0 \\ \overline{O_1F_2'} = f_1' + \Delta \end{cases}$$

Donc : $$-\frac{1}{h_0} + \frac{1}{f_1' + \Delta} = \frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \frac{1}{h_0} = \frac{\Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)}$$

D'où : $$\boxed{h_0 = f_1'\left(1 + \frac{f_1'}{\Delta}\right)}$$

9. Le grandissement correspond au rapport entre la taille de l'image intermédiaire et celle de l'objet :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1' + \Delta}{-h_0} \quad \text{or} \quad \frac{1}{h_0} = \frac{\Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)}$$

donc $$\boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}}$$ d'où $f_1' = \frac{\Delta}{|\gamma_1|} = \frac{160}{40} = \boxed{4 \text{ mm}}$

10. cf annexe.

11. L'angle sous lequel on voit A_1B_1 (image intermédiaire) est $\alpha' \approx \tan\alpha' = \left|\frac{\overline{A_1B_1}}{f_2'}\right|$.

Si il se trouvait au punctum proximum, on le verrait sous un angle : $\alpha_{pp} \approx \tan(\alpha_{pp}) = \left|\frac{\overline{A_1B_1}}{d_{pp}}\right|$

Alors :

$G_2 = \dfrac{\alpha'}{\alpha_{PP}} = \boxed{\dfrac{d_{PP}}{f'_2}}$

D'où : $f'_2 = \dfrac{d_{PP}}{G_2} = \dfrac{250 \text{ mm}}{10} = \boxed{25 \text{ mm}}$

12. On a : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha_0} = \dfrac{\alpha' \, d_{PP}}{\overline{AF}} = \dfrac{\alpha' \cdot d_{PP}}{\overline{A_1B_1}} \cdot \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$

$= -\dfrac{\alpha'}{\alpha_{PP}} \cdot \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \boxed{G_2 \times |\gamma_1|}$

Ainsi : $G = 10 \times 40 = \boxed{400}$

13. Prenons un objet de 1 µm, alors : $\alpha_0 = \dfrac{1 \text{ µm}}{25 \text{ cm}} = \dfrac{10^{-6}}{1/4}$

d'où $\alpha_0 = 4 \cdot 10^{-6}$ rad inférieur au pouvoir de résolution de l'œil

Et $\alpha' = G \cdot \alpha_0 = 400 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$ rad

On a bien $\alpha' \ll 1$: l'approximation de Gauss est vérifiée.

Et on peut observer l'objet car α' est supérieur au pouvoir de résolution de l'œil.

14. ① s'exprime en m^{-1}.

On a : $\mathcal{P} = \dfrac{|\alpha'|}{\overline{AB}} = \dfrac{\alpha'}{\alpha_{PP}} \times \dfrac{\alpha_{PP}}{\overline{AB}} = \underbrace{\dfrac{\alpha'}{\alpha_{PP}}}_{G_2} \cdot \underbrace{\dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}}_{|\gamma_1|} \times \dfrac{1}{d_{PP}}$

D'où $\boxed{\mathcal{P} = \dfrac{G_2 |\gamma_1|}{d_{PP}}}$ Ici $\mathcal{P} = \dfrac{400}{0{,}25} = \boxed{1600 \text{ m}^{-1}}$

15. On lit la position de la 3e et de la 7e graduations de l'objet, qui sont positionnées à la 13e et la 89e graduations de la lunette, espacée avec une incertitude de

$u_{lect}(\alpha') = \frac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{12}} \times \sqrt{2} = \frac{0,0482}{\sqrt{6}} = 0,020°$ pour la lecture

Ainsi les $7-3 = 4$ graduations du marbre produisent un angle :

$$\alpha' = 0,0482 \times (89 - 13) = 3,66°$$

Et :

$$u(\alpha') = \sqrt{u_{lecture}(\alpha')^2 + u_{grad}(\alpha')^2}$$

L'incertitude liée aux graduations s'additionne pour chaque graduation car elle est systématique :

$$u_{grad}(\alpha') = (89 - 13) \times 0,0005 = 0,038°$$

On trouve : $u(\alpha') = 0,043°$

De plus $AB = 4 \times \frac{1}{100} \text{ mm} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

D'où $P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\frac{\pi}{180} \times 3,66}{4 \cdot 10^{-5}} = 1597 \text{ m}^{-1}$

Et $u(P) = \frac{u(\alpha')}{AB} = \frac{\frac{\pi}{180} \times 0,038}{4 \cdot 10^{-5}} = 17 \text{ m}^{-1}$

Ainsi :

$$\boxed{P = (1,60 \pm 0,02) \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}}$$

16. Cette valeur est compatible à la valeur théorique, l'écart normalisé vaut :

$$\chi = \frac{|1600 - 1597|}{17} = 0,18$$

χ est du même ordre de grandeur que 1 donc les mesures sont compatibles.

17. On a $\alpha'_{min} = \frac{0,61 \cdot \lambda}{w_0} = \frac{0,61 \cdot 500 \cdot 10^{-9}}{0,65} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$

$\simeq 0,5 \mu m$.

Ce mode permet de voir [illegible] et quelques détails mais ne permet pas d'aller aux échelles sub-cellulaires.

18. Il faudrait limiter le phénomène de diffraction, par exemple en augmentant l'ouverture numérique N_A. Ceci est possible si on augmente le rayon des lentilles (mais ce n'est pas forcément facile si elles ont un rayon de courbure très petit).

19. On a vu que $h_1 = f'_1\left(1 + \frac{f'_1}{\Delta}\right)$ (Q8)

D'où : $w' = h_1 - O_1P$

$= f'_1\left(1 + \frac{f'_1}{\Delta}\right) - O_1P$ avec $\begin{cases} f'_1 = 4\ mm \\ O_1P = 3,5\ mm \\ \Delta = 160\ mm \end{cases}$

$= 4\left(1 + \frac{4}{160}\right) - 3,5$

$$\boxed{w' = 0,6\ mm}$$

Lors du réglage, l'utilisateur risque de tourner la vis trop fort et provoquer un choc entre l'objectif et l'échantillon. Pour protéger à la fois l'objectif et l'échantillon on peut introduire un ressort.

20. Pour voir l'objet nettement, il faut que l'image de AB par $(L_1)+(L_2)$ soit entre l'infini et le punctum maximum.

On a $|\overline{O_1A}| = h_1 = f'_1\left(1 + \frac{f'_1}{\Delta}\right)$ dans le cas déjà étudié où l'image est à l'infini.

Étudions le cas où elle est au punctum maximum :

on note $|\overline{O_1A}| = h$ dans ce cas.

Alors : on a : $\overline{F_2' A'} = -d_{pp}$

distance œil-image (négative)

Par la relation de conjugaison de Newton à L_2 :

$$\overline{F_2 A_1} \cdot \overline{F_2' A'} = -f_2'^2 \quad \text{donc} \quad \overline{F_2 A_1} = \frac{f_2'^2}{d_{pp}}.$$

De plus $\overline{O_1 A_1} = \overline{O_1 F_1'} + \overline{F_1' F_2} + \overline{F_2 A_1}$

$$= f_1' + \Delta + \frac{f_2'^2}{d_{pp}}$$

Et par la relation de conjugaison de Descartes pour L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1 F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f_1'} \Leftrightarrow \frac{1}{f_1' + \Delta + \frac{f_2'^2}{d_{pp}}} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f_1'}$$

On trouve :

$$h' = f_1' \left(1 + \frac{f_1'}{\Delta + \frac{f_2'^2}{d_{pp}}}\right) \quad \text{or} \quad \frac{f_2'^2}{d_{pp}} \ll \Delta$$

$$\simeq f_1' \left(1 + \frac{f_1'}{\Delta}\left(1 - \frac{f_2'^2}{\Delta d_{pp}}\right)\right)$$

$$\simeq h - \frac{f_1'^2 f_2'^2}{\Delta^2 d_{pp}}$$

La latitude de mise au point est la distance dont on peut déplacer l'objet :

$$\boxed{l = \frac{f_1'^2 f_2'^2}{\Delta^2 d_{pp}} = 1{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{mm} = 1{,}6\ \mu\text{m}}$$

Ceci est l'ordre de grandeur de la taille d'une cellule donc on ne verra pas les couches de cellules au dessus ou au dessous de la couche qui se situe à la hauteur h : on peut donc observer une unique couche de cellules.

IV - Microscope confocal

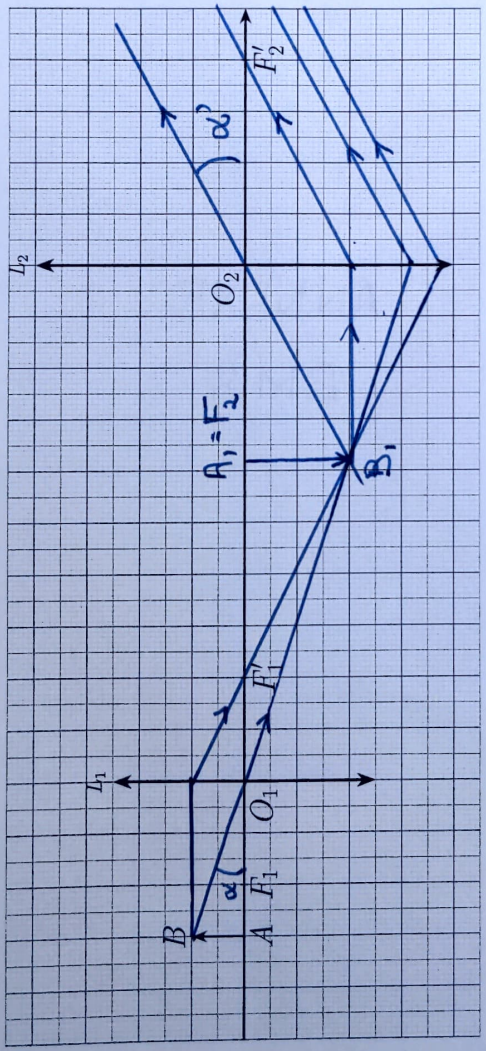
21. 22. Voir annexe.

23. Le trou permet de sélectionner uniquement les rayons qui convergent vers le photodétecteur. Les constructions précédentes indiquent que c'est le cas uniquement des rayons qui passent sur l'axe optique dans le plan de l'échantillon, on image donc un point.
Ceci permet d'optimiser la résolution latérale (partie 3.3) et la latitude de mise au point (partie 3.4) par un seul procédé.

24. On n'image qu'un point ; pour observer tout l'échantillon il faudra déplacer le diaphragme afin d'image une zone dans le plan de l'échantillon.
Au contraire, dans le cas du microscope classique, on image tout le plan en un seul cliché.

Annexe à rendre avec la copie

Schéma à compléter relatif à la question Q10



Q21

luametatex 2.0808 20210105 LMTX

Ne rien écrire dans la partie barrée

P044-DR/2021-01-23 10:11:35

Question 6

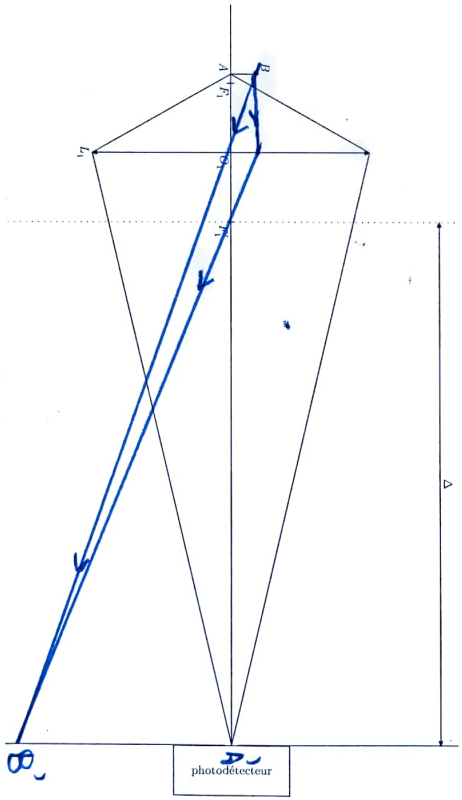


Figure B

Q 22

Question 7

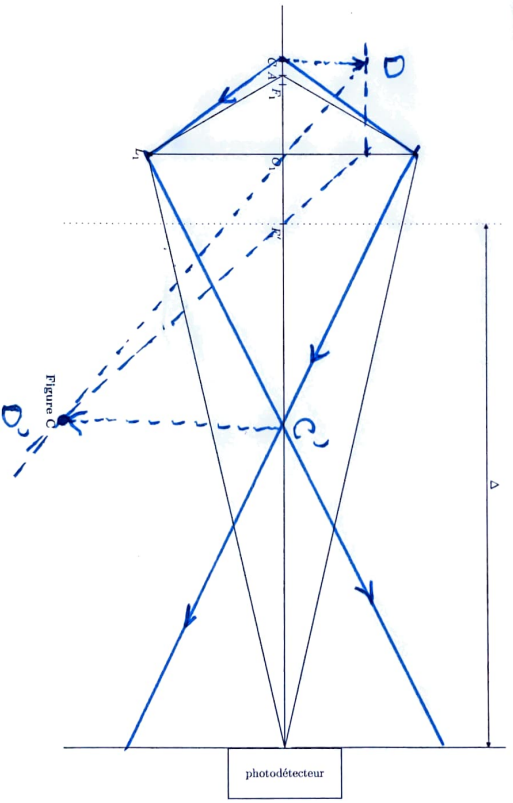


Figure 6