

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

20 septembre 2025

Physique Chimie

DS 2

Durée : 4 heures

*Calculatrice **autorisée***

Le sujet est constitué de quatre parties totalement indépendantes. Il n'est pas nécessaire de les aborder dans l'ordre.

Les réponses doivent systématiquement être justifiées (sauf mention explicite du contraire). La clarté de la rédaction et la justesse du raisonnement mené seront valorisées, même si la tentative de réponse n'est pas aboutie ou si la réponse obtenue à la fin de la question est incorrecte.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur de sujet, merci de l'indiquer clairement sur votre copie, et de poursuivre votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené·e à prendre.

Comme au concours, le sujet est long. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.

Données :

Constantes fondamentales :

- Permittivité diélectrique du vide $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$
- Nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- Constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$

Opérateur gradient :

- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \quad (1)$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z \quad (2)$$

- En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(U) = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi \quad (3)$$

Chimie :

- Masses molaires : $M(\text{S}) = 32.1 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; $M(\text{Zn}) = 65.4 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Rayons ioniques : $R(\text{S}^{2-}) = 184 \text{ pm}$; $R(\text{Zn}^{2+}) = 74.0 \text{ pm}$
- Électronégativités : $\chi(\text{H}) = 2.2$; $\chi(\text{O}) = 4.0$; $\chi(\text{Cl}) = 3.2$; $\chi(\text{S}) = 2.6$

Intégrales :

$$\int_0^\infty u e^{-\alpha u} du = \frac{1}{\alpha^2} \quad \int_0^\infty u^{3/2} e^{-\alpha u} du = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\alpha^{5/2}} \quad (4)$$

1 Le gecko (CCINP)

Source : Autumn K., *L'inusable adhésif des pattes du gecko*, *Pour la Science*, n° 343, 2006, p. 82-88.

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals.

L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

1.1 Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$. Le dipôle, centré en un point O , est constitué de deux charges ponctuelles opposées, $+q$ et $-q$ (avec $q > 0$), situées sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ aux points respectifs P et N distants de $a = PN$. On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) dans le repère $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ (figure 1).

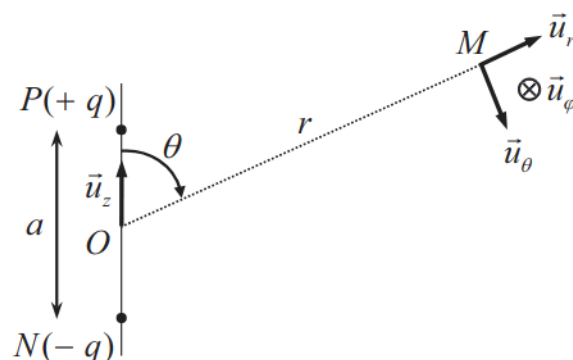


Figure 1: Dipôle électrique centré en un point O .

□ 1 — Expliquer, en prenant l'exemple de la molécule de chlorure d'hydrogène (HCl), l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de a et q du moment dipolaire électrique $\vec{p}_1$ de la molécule polaire.

□ 2 – Établir l'expression du potentiel électrostatique $V_1(M)$ créé en M par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de p_1 , ϵ_0 et des coordonnées sphériques du point M .

□ 3 – En déduire que le champ électrostatique $\vec{E}_1(M)$ créé en M par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}_1(M) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (5)$$

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent $\vec{p}_2$, est située au point M sur l'axe $(O, \vec{u}_z)$ tel que $\theta = 0$, à la distance r fixe du point O . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle α avec cet axe (figure 2). Dans ces conditions, la molécule plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point O subit un couple de forces de moment : $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$. On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules : $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$.

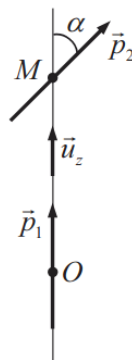


Figure 2: Interaction entre deux molécules polaires

□ 4 – Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point M ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D} = 3 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$.

□ 5 – Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de 0.5 nm , en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés.

1.2 Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (figure 3), on montre en prenant en

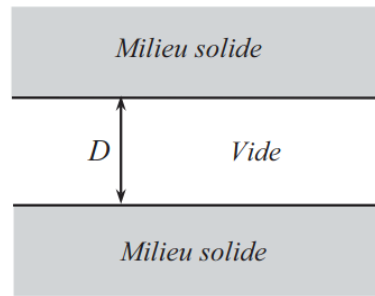


Figure 3: Deux milieux plans infinis en interaction

compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force par unité de surface entre les deux milieux s'écrit $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$. La constante A , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

- 6 – Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
- 7 – Un gecko de masse $m = 50$ g est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de $0.2 \mu\text{m}$ de côté située à une distance $D = 1$ nm du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $A = 10^{-19}$ J et on négligera tout effet de bord. Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
- 8 – À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50 % de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue

2 Autour de la chimie du soufre (adapté de CCINP et Mines)

2.1 Atomistique

Dans la classification périodique des éléments, le soufre se situe dans la 4ème colonne du bloc p et dans la 3ème période.

- 9 – Quel est le numéro atomique de l'atome de soufre ?
- 10 – Donner le nombre d'électrons de valence du soufre.
- 11 – Chacune des molécules suivantes comporte un atome de soufre central. Donner une structure de Lewis :
- Le sulfure d'hydrogène H_2S
 - Le dioxyde de soufre SO_2
 - Les ions sulfite SO_3^{2-}
 - Les ions sulfate SO_4^{2-}
 - Les ions thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$. Ces ions comprennent une liaison soufre-soufre et trois liaisons soufre-oxygène.
- 12 – Représenter géométriquement les molécules d'eau et de sulfure d'hydrogène (elles ont une géométrie similaire). En exploitant les données relatives à l'électronégativité des atomes, justifier les températures de changement d'état observées à $p = 1$ bar.
- 13 – Sous les conditions normales de température et de pression, la solubilité du sulfure d'hydrogène est de 2.5 litres de gaz sulfhydrique par litre d'eau. Comparer cette solubilité à celle des autres composés et proposer une explication.

Molécules	$T_f(^{\circ}\text{C})$	$T_{eb}(^{\circ}\text{C})$	Solubilité (mol.L^{-1})
H_2O	0	100	--
H_2S	- 86	- 61	S
I_2			$1,3 \cdot 10^{-3}$
HCl			20
NH_3			50

Figure 4: Température de fusion, d'ébullition, et solubilité dans l'eau de divers composés chimiques.

2.2 Cristallographie

Le minéral nommé blende cristallise dans une structure cubique de paramètre de maille $a = 543 \text{ pm}$. Les ions S^{2-} définissent un réseau cubique à faces centrées dans lequel les ions Zn^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques.

- 14 – Représenter en perspective la maille de la blende.
- 15 – Quel est le nombre d'anions S^{2-} et de cations Zn^{2+} par maille ? En déduire la formule de la blende.

□ 16 – Calculer la masse volumique de la blende en $\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$.

□ 17 – Où se trouve la plus courte distance d existant dans la structure blende entre un anion S^{2-} et un cation Zn^{2+} ? En déduire la coordinence des anions S^{2-} et des cations Zn^{2+} dans cette structure.

□ 18 – Exprimer d en fonction de a . En comparant d aux rayons ioniques donnés, que peut-on en déduire sur le type de liaison mise en jeu entre un atome de zinc et un atome de soufre dans la blende ?

□ 19 – Quelle est la plus courte distance d' entre deux anions S^{2-} ? En déduire que, en cas de contact entre ions de signe opposé, le rapport entre les rayons ioniques des deux espèces vérifie :

$$\frac{R(\text{Zn}^{2+})}{R(\text{S}^{2-})} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 \quad (6)$$

Vérifier que cela est bien le cas.

□ 20 – Calculer la compacité de la blende.

3 Récupération d'énergie vibratoire (CCINP)

Le présent problème traite de la récupération de l'énergie générée par les vibrations ambiantes, telles les vibrations induites par l'utilisation d'appareils domestiques ou industriels. On peut également citer le cœur de l'être humain comme étant source de vibrations. Chaque source de vibrations a son propre spectre (figure 5). Les caractéristiques du récupérateur d'énergie en dépendront ainsi que l'application envisagée.

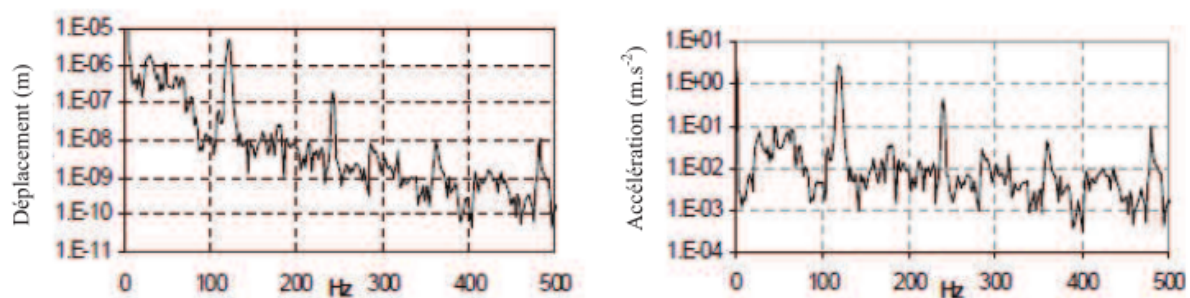


Figure 5: Spectre des vibrations générées par un four à micro-ondes.

Dans ce cadre, l'utilisation d'un système mécanique résonant comme récupérateur d'énergie va se révéler pertinente. En effet, supposons que nous souhaitions récupérer de l'énergie d'une source de vibrations à 200 Hz pour une accélération maximale de $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Dans ces conditions, la structure appelée boîtier, qui vibre, va se déplacer d'environ $3 \mu\text{m}$. Puisqu'il est difficile d'imaginer récupérer de l'énergie sur une structure mécanique qui

se déplace aussi faiblement, nous allons utiliser une structure mécanique résonante qui permet d'amplifier le déplacement.

Son modèle, représenté en figure 6, permet de donner une estimation de l'énergie théoriquement récupérable à une fréquence et à une accélération données. Il est composé essentiellement d'un système masse ressort à un degré de liberté.

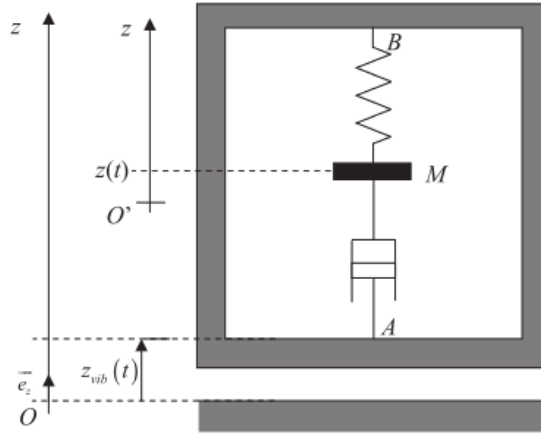


Figure 6: Structure mécanique résonante.

La masse dite sismique m est supposée ponctuelle et est repérée par la position du point M . Il s'agit en fait d'une poutre. Cette dernière est reliée au boîtier vibrant via un ressort et via un amortisseur modélisant un amortissement visqueux λ . Le ressort de constante de raideur k , de longueur à vide l_0 , a son autre extrémité fixée au boîtier en B .

Le support est soumis aux vibrations $z_{vib}(t)$ du milieu ambiant. On suppose que l'excitation est sinusoïdale et unidirectionnelle. Les points du boîtier oscillent donc verticalement à la pulsation ω avec une amplitude Z_{vib} dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Ainsi, la position du point A est repérée par sa cote : $z_{vib}(t) = Z_{vib} \sin(\omega t)$. Ce déplacement induit un déplacement relatif de la masse sismique.

La position de la masse sismique est repérée dans le référentiel de la structure $\mathcal{R}_S$ par sa cote $z(t)$ sur l'axe $(O'z)$ fixe par rapport au boîtier. L'origine O' de cet axe correspond à la position d'équilibre de M en l'absence de vibration. Suite à une vibration sinusoïdale, la position de M dans $\mathcal{R}_S$, par rapport à sa position d'équilibre, est de la forme : $z(t) = Z \sin(\omega t + \varphi)$. Nous pouvons alors associer à $z_{vib}(t)$ et $z(t)$ les notations complexes $\underline{Z}_{vib}(j\omega)$ et $\underline{Z}(j\omega)$ reliées par la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}(j\omega)}{\underline{Z}_{vib}(j\omega)} = \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \cdot \frac{1}{Q} \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \quad (7)$$

ω_0 représente la pulsation de résonance et Q le facteur de qualité.

Ainsi, si on ajuste la fréquence de résonance à celle des vibrations, avec un facteur de qualité de 100, l'amplitude de vibration de la masse sismique est de 300 μm . C'est sur ce principe que fonctionnent les microgénérateurs résonants.

Il existe trois méthodes différentes de transduction utilisables pour transformer l'énergie mécanique en énergie électrique : électrostatique, électromagnétique ou piézoélectrique. Seules les deux premières seront étudiées dans ce problème.

3.1 Généralités

□ **21** – Quels sont l'avantage et le risque d'appliquer des vibrations avec des accélérations importantes à un dispositif récupérateur d'énergie ?

□ **22** – Vérifier qu'une structure qui vibre à 200 Hz avec une accélération de $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ a une amplitude de déplacement de $3 \mu\text{m}$. Quel est l'ordre de grandeur de la puissance maximale théorique récupérable pour une masse de 1 gramme ? Est-ce suffisant pour charger un smartphone ?

3.2 Fonction de transfert

Le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}_S$ est noté $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}_S}}$. Les amortissements visqueux sont modélisés par la force $\vec{F} = -\lambda \overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}_S}}$.

□ **23** – En l'absence de vibration, déterminer l'expression de la longueur à l'équilibre l_{eq} du ressort en fonction de m, g, k et l_0 .

□ **24** – En présence de vibrations $z_{vib}(t) = Z_{vib} \sin(\omega t)$, donner l'expression de la vitesse du point M $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}}}$ dans le référentiel terrestre en fonction de $\overrightarrow{V_{M/\mathcal{R}_S}}$ et de $z_{vib}(t)$. En déduire l'équation différentielle du mouvement de la masse sismique dans le référentiel du boîtier.

□ **25** – Retrouver l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$. Qualifier très précisément le type de filtre dont il s'agit. Justifier votre réponse.

□ **26** – Justifier l'intérêt que la fréquence de résonance corresponde à la fréquence des vibrations.

3.3 Transduction électrostatique

Les microgénérateurs électrostatiques produisent de l'énergie électrique grâce à la variation d'une capacité constituée d'un conducteur mobile (la poutre vibrante) et d'un conducteur fixe associé à la structure. Si cette capacité est initialement chargée par une source de tension continue U , alors la variation de cette capacité permet de multiplier l'énergie de la source d'alimentation.

Considérons un plan infini uniformément chargé en surface, perpendiculaire à l'axe (Oz) de vecteur unitaire associé $\vec{e}_z$ et centré en O (figure 7). La densité superficielle des charges est positive et vaut $+\sigma$.

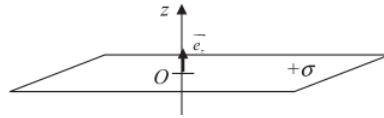


Figure 7: Plan infini uniformément chargé en surface.

□ **27** – Rappeler le théorème de Gauss.

□ **28** – Préciser les caractéristiques des vecteurs champs électriques $\vec{E}_+$ et $\vec{E}_-$ créés respectivement dans chacun des demi-espaces $z > 0$ et $z < 0$ et séparés par ce plan. Ce plan est placé dans l'air, de permittivité ϵ_0 .

Considérons deux plans infinis parallèles P_1 et P_2 , uniformément chargés en surface et perpendiculaires à l'axe (Oz) (figure 8). Le plan P_1 possède une densité superficielle de charges positives $+\sigma$ et le plan P_2 une densité superficielle de charges négatives $-\sigma$. Ces plans sont séparés d'une distance e .

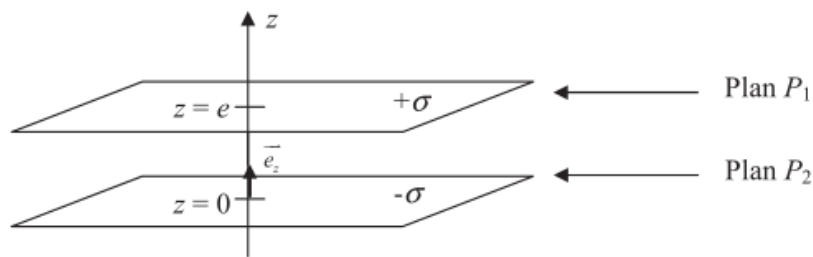


Figure 8: plans infinis parallèles uniformément chargés en surface

□ **29** – Préciser les caractéristiques des vecteurs champs électriques $\vec{E}$ existant entre les plans ainsi que $\vec{E}_{z>e}$ et $\vec{E}_{z<0}$ créés respectivement dans chacun des demi-espaces $z > e$ et $z < 0$. Ces plans sont placés dans l'air, de permittivité ϵ_0 .

Un condensateur plan n'est pas constitué de plans infinis mais d'armatures de grandes dimensions par rapport à la distance les séparant, ce qui permet de négliger les effets de bord. Aussi, l'expression littérale de l'intensité du champ électrique E régnant entre les armatures sera considérée identique à celle trouvée, entre les plans, à la question précédente. Les densités superficielles de charges, $+\sigma$ pour l'armature 1 et $-\sigma$ pour l'armature 2, sont dues à une source de tension continue U qui les relie (figure 9).

□ **30** – Déterminer l'expression de la capacité C du condensateur plan constitué de ces deux armatures métalliques très fines, de surface S , distantes de $e = d$ et séparées par de l'air, de permittivité ϵ_0 .

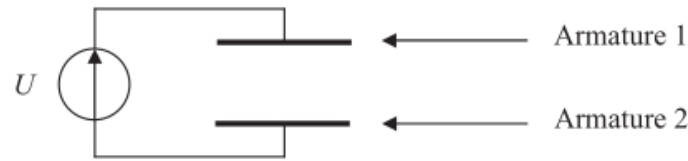


Figure 9: Champ électrique entre les armatures d'un condensateur plan.

La distance entre les deux armatures n'est plus constante mais vaut $e(t) = d + z(t)$ avec $z(t) = Z \sin(\omega t + \varphi)$; l'armature 1 correspond à la poutre vibrante et l'armature 2 reste fixe par rapport au boîtier. Le condensateur ainsi constitué possède une capacité variable $C(z)$ comprise entre C_{max} et C_{min} .

□ **31** – Donner les expressions de C_{max} et C_{min} en fonction de ϵ_0, S, d et Z .

Le condensateur variable va fonctionner à charge constante. Le principe de fonctionnement sur une période T (un cycle) est le suivant. Il fait référence à la figure 10. Lorsque la poutre (armature 1) est en $z(t) = -Z$, la capacité est initialement chargée à $q = C_{max}U$ (interrupteurs K_1 fermé et K_2 ouvert). On ouvre K_1 et l'armature mobile s'éloigne pour effectuer son parcours. Lorsqu'elle est parvenue en $z(t) = +Z$, l'énergie W emmagasinée dans le condensateur variable a changé. Cette énergie est alors transférée à un circuit récupérateur d'énergie CRE (interrupteurs K_1 ouvert et K_2 fermé). Puis, l'armature mobile revient en $z(t) = -Z$ où la capacité va être rechargée.

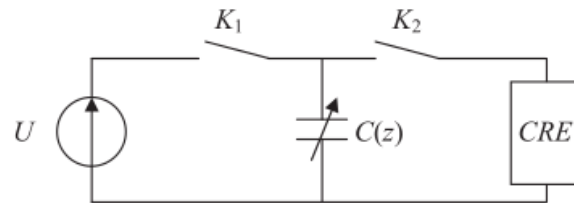


Figure 10: Principe du transducteur électrostatique.

On rappelle que l'énergie électrostatique W_e emmagasinée dans un condensateur de capacité C et soumis à une tension U est donnée par :

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 \quad (8)$$

□ **32** – Montrer que l'énergie W emmagasinée par le condensateur variable sur une période T vaut :

$$W = \frac{1}{2}(C_{max} - C_{min})\frac{C_{max}}{C_{min}}U^2 \quad (9)$$

3.4 Transduction électromagnétique

□ **33** – A partir du schéma de principe indiqué en figure 11, expliquer le principe de la transduction électromagnétique en indiquant notamment la loi physique sur lequel il repose.

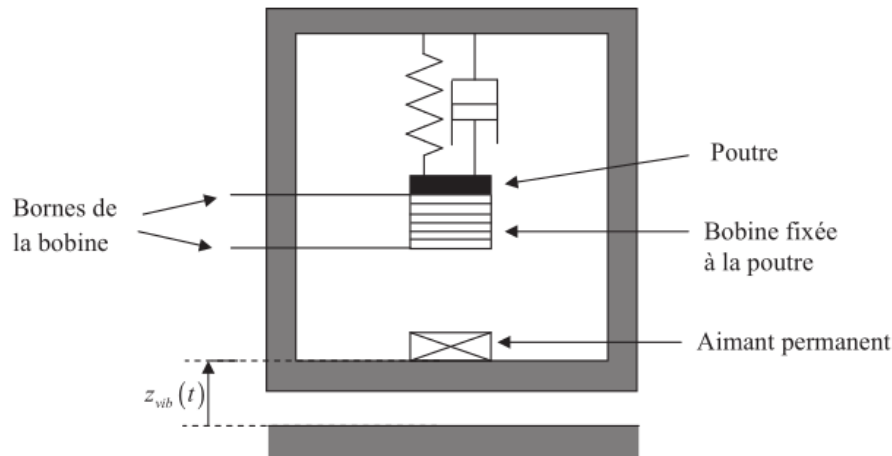


Figure 11: Principe du transducteur électromagnétique.

4 Mesure d'un coefficient de frottement et interprétation microscopique

Dans cet exercice, une fois que le préliminaire est traité, les parties 4.2 (type CCINP) et 4.3 (type Centrale) sont indépendantes.

4.1 Préliminaire (CCINP)

On rappelle ci-dessous les lois de Coulomb, en notant f_s et f_g les coefficients statiques et dynamiques du frottement et $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la réaction :

- En mode statique (absence de glissement donc adhérence), la norme de la composante tangentielle $\vec{T}$ est inférieure à la quantité $f_s \|\vec{N}\|$
- En mode dynamique (présence de glissement), on a alors l'égalité $\|\vec{T}\| = f_g \|\vec{N}\|$ avec une composante tangentielle toujours opposée à la vitesse de glissement : $\vec{T} \cdot \vec{v}_g = 0$ et $\vec{T} \wedge \vec{v}_g = \vec{0}$.

□ **34** – Définir ce qu'on appelle la vitesse de glissement $\vec{v}_g$ d'un solide par rapport à un autre en un point de contact. Doit-on préciser dans quel référentiel elle est exprimée ?

□ **35** – Expliquer à quelle condition on passe de l'adhérence au glissement.

- 36 – Expliquer à quelle condition on passe du glissement à l'adhérence.

4.2 Mesure du coefficient de frottement dynamique (CCINP)

On utilise le dispositif représenté sur la figure 12. Un solide 1 de masse M est lié, par un fil inextensible et supposé sans masse, à un solide 2 de masse αM ($\alpha > 1 > f_s$). Le fil sans masse de longueur L passe sur la gorge d'une poulie idéale. Le solide 1 se déplace sur un support fixe S horizontal. On appelle H l'altitude du centre de masse du solide 2 au-dessus d'un support horizontal S' .

À l'état initial, les solides sont tous immobiles, le solide 1 est à l'abscisse $X(t = 0) = X_0$ et le solide 2 est à l'altitude $H(t = 0) = H_0$.

On veut dans cette expérience déterminer la valeur du coefficient f_g de frottement relatif au glissement entre le matériau constitutif de S et celui du solide 1. On mesure la distance D parcourue par le solide 1 sur le support S , sachant que le solide 2 touche S' avant que le solide 1 ne s'arrête.

Consignes : on note g l'accélération de la pesanteur. On notera systématiquement T et N les normes des composantes tangentielle et normale de la réaction du support S sur le solide 1 (figure 12), avec f_g le coefficient de frottement dynamique. On supposera l'appui du solide 1 uniformément réparti avec une même valeur du coefficient de frottement en tout point de la surface de contact.

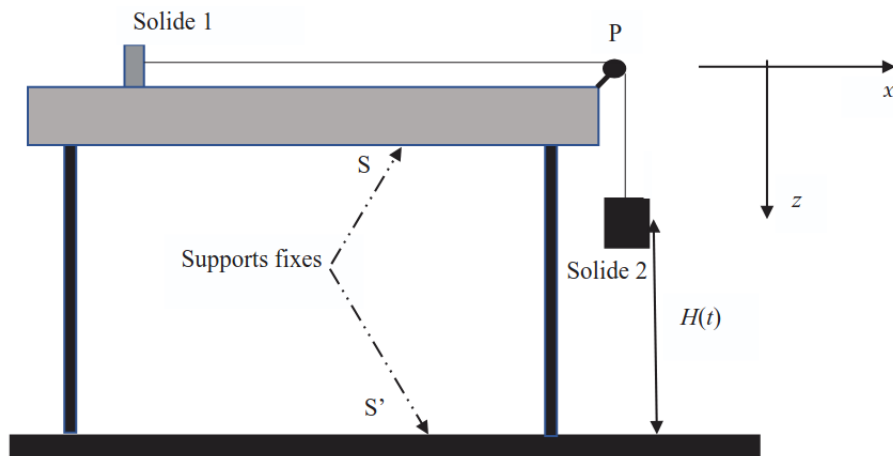


Figure 12: Dispositif de mesure du coefficient de frottement dynamique.

- 37 – Décrire qualitativement les deux phases successives du mouvement de l'ensemble en précisant pour chacune d'elles si le fil est tendu ou non tendu.

- 38 – La nature idéale de la poulie et du fil permet de considérer que la norme F de la tension du fil est conservée tout le long du fil. En appliquant le principe fondamental de la dynamique au solide 1 et au solide 2, écrire les 3 relations qui lient N, T, F, g, α, M , l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du solide 1 et l'accélération verticale $\ddot{Z}$ du solide 2.

□ 39 – Traduire la loi de Coulomb pour exprimer $\vec{T}$.

□ 40 – On s'intéresse à la première phase du mouvement. Exprimer le lien entre $\ddot{X}$ et $\ddot{Z}$ en le justifiant dans cette première phase. Établir dans cette phase la vitesse $\dot{X}(t)$ en fonction de α, f_g et g . Quelle est la durée t_1 de cette première phase ? Quelle est la vitesse correspondante atteinte V_1 ?

□ 41 – On s'intéresse à la deuxième phase du mouvement. Exprimer $X(t)$ dans cette phase en fonction de t, t_1, V_1, X_0, H_0, g et f_g .

□ 42 – En déduire une expression de f_g en fonction de α, H_0 et D .

□ 43 – Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de l'énergie cinétique à chacune des deux phases du mouvement.

□ 44 – On réalise l'expérience plusieurs fois de suite, en partant toujours de la valeur de $H_0 = 40.0 \text{ cm}$. La masse du solide 1 vaut $M = 50 \text{ g}$ et celle du solide 2 vaut $\alpha M = 60 \text{ g}$. Calculer la valeur du coefficient de frottement f_g sachant qu'on a trouvé une valeur moyenne de la distance D égale à 1.50 m .

4.3 Interprétation microscopique des lois de Coulomb (Centrale)

Nous avons vu les lois du frottement qui s'appliquent au contact entre deux solides Σ_2 et Σ_1 en glissement relatif le long de leur interface, et nous voulons leur apporter une interprétation microscopique. Dans ce contexte, il est fondamental de distinguer l'aire apparente S de cette interface, telle que l'on peut la percevoir à l'échelle macroscopique, de l'aire réelle de contact A . En effet, la surface d'un solide, rugueuse à l'échelle micrométrique, présente des aspérités de hauteurs diverses. Seules les plus proéminentes de chacun des solides se rencontrent et se déforment, faisant apparaître de petites zones plates appelées jonctions où l'interaction entre les solides se concentre.

On note A_1 l'aire d'une jonction et $\vec{R}_1 = R_{1x}\vec{e}_x + R_{1z}\vec{e}_z$ la résultante des forces exercée par Σ_2 sur Σ_1 au niveau de cette jonction. Le vecteur unitaire $\vec{e}_z$ est perpendiculaire à l'interface apparente des deux solides ; $\vec{e}_x$ lui est parallèle dans la direction du glissement. La réunion de toutes les jonctions donne l'aire réelle de contact A sur laquelle Σ_1 est soumis à des efforts de résultante $\vec{R} = R_x\vec{e}_x + R_z\vec{e}_z$

Nous nous intéressons aux deux propriétés suivantes émergeant des lois de Coulomb :

- $|R_x|$ est proportionnelle à R_z , le facteur de proportionnalité dépendant de la nature des matériaux en contact ;
- R_x est indépendante de la surface apparente de contact S .

L'interprétation de ces observations date de 1950 environ et repose sur l'analyse des phénomènes ayant lieu au niveau des jonctions. En effet, ces jonctions se déforment sous l'effet des efforts perpendiculaires à l'interface et un contact intime s'y crée entre les deux

solides. Pour déplacer les uns contre les autres les atomes de Σ_1 et Σ_2 en contact dans une jonction d'aire A_1 , il faut exercer une force tangentielle minimale $R_{x1} = \tau_c A_1$. La force surfacique τ_c , aussi appelée contrainte de cisaillement, est liée à la nature des matériaux.

Deux types de déformation des jonctions sont envisagés tour à tour dans la suite : les déformations plastiques d'une part et les déformations élastiques d'autre part.

Cas des déformations plastiques

Dans ce premier cas, on admet que $R_{z1} = \sigma_c A_1$ dès lors qu'il y a contact entre deux jonctions, quelle que soit l'amplitude de la déformation. La grandeur σ_c caractérise la dureté des matériaux.

- 45 – Quelle relation existe-t-il entre A (aire de contact réelle), R_z et σ_c ?
- 46 – Calculer numériquement la valeur de A pour un bloc d'acier parallélépipédique de 300 g reposant sur une table d'acier horizontale. Pour $S = 24 \text{ cm}^2$, quelle fraction de l'aire apparente S représente l'aire de contact réelle A ? On donne $\sigma_c = 1 \times 10^9 \text{ Pa}$.
- 47 – En supposant qu'il y a glissement d'un solide sur l'autre et que toutes les jonctions glissent en même temps, établir le lien entre $|R_x|$, R_z , σ_c et τ_c .
- 48 – Cette modélisation permet-elle d'expliquer les deux propriétés issues des lois de Coulomb et introduites précédemment ? Pourquoi ?

Cas des déformations élastiques

Dans ce second cas nous supposons pour simplifier que la surface de Σ_1 est parfaitement lisse et indéformable alors que celle de Σ_2 présente N aspérités identiques modélisées par des sphères de rayon R (partie gauche de la figure 13). Par rapport à un plan de référence, les sommets de ces sphères se trouvent initialement à la hauteur z_0 . Elles se déforment lorsque la surface plane de Σ_1 se trouve à la hauteur $d < z_0$ (partie droite de la figure 13).

Chacune forme alors une jonction circulaire de rayon r_0 et voit sa hauteur réduite de h . Un calcul dû à H. Hertz montre que pour des déformations élastiques :

$$r_0 = R^{1/3}(\kappa R_{z1})^{1/3} \quad \text{et} \quad h = R^{-1/3}(\kappa R_{z1})^{2/3} \quad (10)$$

où κ est une constante caractéristique du matériau constituant Σ_2 .

- 49 – Relier l'aire de contact A à R_z , R , κ et N .
- 50 – Cette modélisation permet-elle d'expliquer les deux propriétés introduites précédemment et issues des lois de Coulomb ? Pourquoi ?

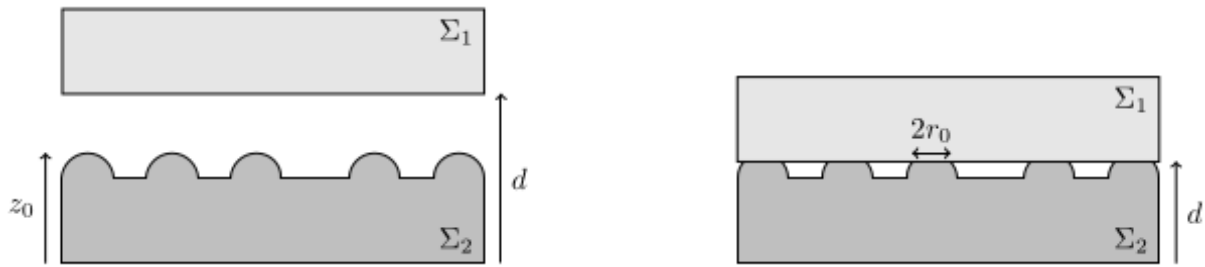


Figure 13: Contact sur une surface modélisée par une série de bosses sphériques.

En réalité, les sommets des aspérités de surface, ici représentés par les protubérances sphériques, ne se trouvent pas tous à la même hauteur avant le contact avec Σ_1 . La diminution de d associée à l'augmentation de R_z ne provoque pas seulement l'élargissement de chacun des contacts circulaires mais permet aussi la formation de nouvelles jonctions. Dans le modèle de Greenwood, on note $dN = \Psi(z)dz$ le nombre de bosses sphériques dont le sommet se trouve initialement à une cote comprise entre z et $z + dz$.

- **51** – Avec un nombre d'aspérités N identique à celui du modèle précédent, que vaut $\int_0^\infty \Psi(z)dz$?
- **52** – Lorsque Σ_1 se trouve à la cote d , donner une expression intégrale du nombre de jonctions formées N_J .
- **53** – Donner dans les mêmes conditions une expression intégrale de l'aire de contact A .
- **54** – Faire de même pour R_z .
- **55** – Fréquemment, la fonction $\Psi(z)$ peut être approximée par $\Psi(z) = \Psi_0 e^{-\alpha z}$. Calculer explicitement A et R_z en fonction de Ψ_0, α, d, R et κ .
- **56** – Le modèle de Greenwood permet-il d'expliquer les deux propriétés introduites précédemment et issues des lois de Coulomb ? Pourquoi ?