1. Gravitation

La mécanique s'intéresse essentiellement à la description des mouvements d'objets solides.

La cause principale de ces mouvements, d'après la mécanique newtonienne, est la présence d'actions mécaniques. Nous avons vu en première année qu'il existe plusieurs types d'actions mécaniques :

Les forces qui s'exercent à distance. Par exemple :
- La gravitation
- Les forces électrostatiques
- Les forces magnétiques

Les forces de contact, par exemple :
- Une force de frottement fluide ou solide
- La réaction d'un support solide
- La tension d'un fil
- Le couple de torsion d'un fil

Après quelques rappels de dynamique du point, nous allons nous intéresser aux forces à distance. Dans ce chapitre, nous étudierons la force gravitationnelle, et dans un chapitre à venir nous nous intéresserons à la force électrique de Coulomb, qui présente des caractéristiques très similaires.

1.1 Rappels de dynamique newtonienne du point

Dans cette partie, nous allons revoir les principes de la mécanique classique qui ont été vus en première année. Ces principes sont tous équivalents puisqu'ils sont dérivés du principe fondamental de la dynamique :

Théorème Soit M un point matériel soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_{ext}$. Soit $\vec{v}$ son vecteur vitesse dans un référentiel galiléen. Alors, l'accélération $\vec{a}$ du point M dans ce référentiel est égale à la somme des forces extérieures qui lui sont appliquées :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \tag{1.1}$$

Nous allons faire quelques rappels de ces principes de la mécanique à partir d'un problème très simple que nous allons résoudre par diverses méthodes : le pendule. Le pendule est un système physique simple, que l'on peut reproduire en laboratoire, et qui a des applications techniques variées (par exemple, il a longtems servi à la construction des horloges).

Nous cherchons dans la suite à établir l'équation du mouvement d'un pendule simple. Nous nous plaçons dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Le pendule est soumis à :

— La force de tension du fil $\vec{T}$, orientée selon $-\vec{e_r}$ et qui le contraint à rester à l'intérieur d'un cercle de rayon R ;
— Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, dirigé vers le bas selon $+\vec{e_z}$.

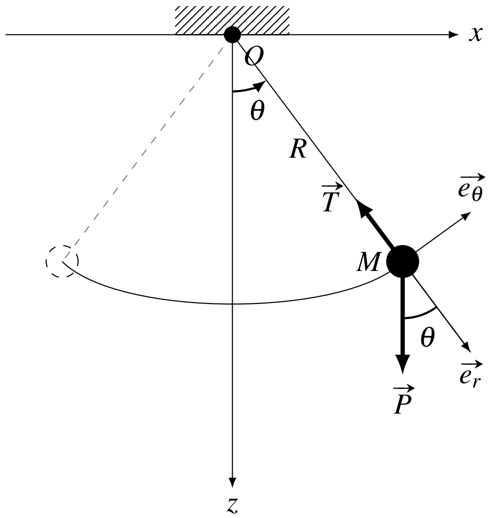

FIGURE 1.1 – Le problème du pendule simple. Schéma adapté à partir d'un schéma de Gabriel Pereira Coelho.

1.1.1 Principe fondamental de la dynamique

Nous proposons dans un premier temps d'établir l'équation du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique. La vitesse du point M dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \tag{1.2}$$

Par ailleurs :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\vec{e_r} \tag{1.3}$$

Si bien que l'accélération s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r} \tag{1.4}$$

On projette le principe fondamental de la dynamique selon $\vec{e}_\theta$ pour obtenir :

$$mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \tag{1.5}$$

En notant $\omega_0 = \sqrt{g/R}$ la pulsation propre du pendule, et en utilisant l'approximation des petits angles on obtient l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{1.6}$$

dont la solution est un mouvement sinusoïdal :

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \tag{1.7}$$

où θ_0 et ϕ dépendent des conditions initiales de vitesse et de position.

1.1.2 Théorème du moment cinétique

Il est également possible de résoudre ce problème à partir du théorème du moment cinétique :

Théorème — Théorème du moment cinétique. Soit O un point fixe dans un référentiel $\mathscr{R}$ supposé galiléen. Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}$, soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_{ext}$ dont le moment par rapport à un point O est noté $\mathscr{M}_0(\vec{F}_{ext})$.

Alors la variation du moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ du point M par rapport au point O vaut :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}}{\mathrm{d}t} = \sum \mathscr{M}_0(\vec{F}_{ext}) \tag{1.8}$$

(On rappelle la définition du moment cinétique

Nous l'appliquons ici au pendule simple. Le moment cinétique du pendule par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = R\vec{e_r} \wedge mR\dot{\theta}\vec{e_\theta} = mR\dot{\theta}\vec{e_y} \tag{1.9}$$

Par ailleurs, le moment de la force de tension est nul (elle est orientée selon l'axe (OM)) et le moment du poids est donné par :

$$\mathscr{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge mg\vec{e_z} = -mRg\sin\theta\vec{e_y} \tag{1.10}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique, on obtient :

$$mR\ddot{\theta} = -mRg\sin\theta \tag{1.11}$$

Et l'on retrouve l'équation du mouvement :

$$R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{1.12}$$

La suite du raisonnement est identique au cas où l'on a appliqué le PFD.

1.1.3 Energétique

On peut enfin utiliser la conservation de l'énergie pour trouver l'équation du mouvement.

Théorème — Conservation de l'énergie. Soit M un point matériel de masse m, soumis uniquement à des forces conservatives qui dérivent d'une énergie potentielle E_p, et des forces qui ne travaillent pas. Alors son énergie mécanique est constante :

$$E_m = E_c + E_p = \text{constante} \tag{1.13}$$

En effet, l'énergie cinétique du pendule s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{v} = \frac{1}{2}mR\dot{\theta} \tag{1.14}$$

Son énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = mgz = -mgR\cos\theta \tag{1.15}$$

Par ailleurs, la force de tension est perpendiculaire au mouvement, elle ne travaille donc pas. La conservation de l'énergie implique que :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta = \text{constante} \tag{1.16}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient alors :

$$mR\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgR\dot{\theta}\sin\theta = 0 \tag{1.17}$$

ou encore, après simplification :

$$R\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \tag{1.18}$$

Encart — Pendule et sismomètre. Le pendule simple est un système qui a été largement discuté en physique classique et permet d'appliquer de manière simple de nombreuses théories. Mais il a aussi un certain nombre d'applications techniques.

En particulier, les sismomètres fonctionnent à l'aide d'un mécanisme de pendule simple pour mesurer les mouvements horizontaux du sol. La mesure de la position du pendule se faisait auparavant à l'aide d'un stylo qui écrivait sur une feuille de papier. Depuis récemment, elle a été remplacée par les sismomètres optiques, dans lesquels la position du pendule est mesurée par interférométrie laser. En 2020, un sismomètre optique a été installé notamment au sommet de la Soufrière pour surveiller l'activité volcanique.

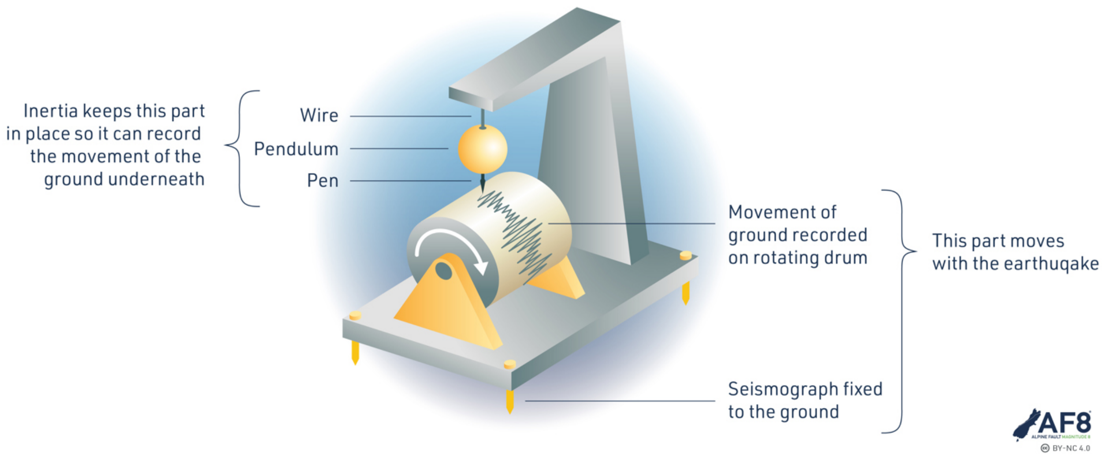

FIGURE 1.2 – Principe de fonctionnement d'un sismomètre à pendule. Source : Alpine Fault M8.

1.2 Rappels sur la gravitation

Après ces quelques rappels de mécanique, nous allons nous intéresser plus en détail à la force de gravitation. Cette force est une interaction à distance, attractive, qui concerne deux objets massifs. Elle est donnée par la loi de la gravitation universelle :

Théorème — Loi de la gravitation universelle. Soient deux corps massifs M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2. Ces deux corps s'attirent mutuellement par une force d'interaction donnée par :

$$\vec{F}_{1\to 2} = -G\frac{m_1 m_2}{||\overrightarrow{M_1M_2}||^2}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{||\overrightarrow{M_1M_2}||} \quad (1.19)$$

où $G = 6.67\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ est la constante de gravitation universelle.

Deux propriétés fondamentales de la force de gravitation ont été vues en 1e année :

— La force de gravitation est une force conservative. Dans le cas où la force de gravitation est exercée par une masse ponctuelle, elle dérive d'un potentiel, appelé potentiel gravitationnel :

$$V = -G\frac{m_1 m_2}{r} \quad (1.20)$$

— Il s'agit d'une force centrale. En particulier, le moment de cette force par rapport au point où se trouve l'objet massif qui exerce la force est nul.

1.2.1 Forces centrales conservatives

Plusieurs propriétés importantes des forces centrales et/ou conservatives ont été vues en première année. Ces propriétés sont évidemment au programme du concours, et il est essentiel d'y passer plus de temps pendant vos révisions des écrits. Dans cette partie, un petit résumé est présent qui vous aidera à réviser avant le concours et vous permet de faire le lien entre les programmes de 1e et 2e année. Ce résumé ne se substitue pas à votre cours de première année, beaucoup plus développé et qu'il faut savoir en entier.

Force centrale

Définition Une force centrale est une force dont le support passe par un point fixe O dans le référentiel d'étude.

Propriété — Mouvement plan. Si un point matériel M est soumis à une force centrale dans un référentiel galiléen, alors le mouvement de M est plan et orthogonal au moment cinétique de M par rapport à O.

■ **Démonstration** Soit M un point matériel de masse m et de vistesse $\vec{v}$ soumis à une force centrale dans un référentiel galiléen. Le moment de la force centrale par rapport au point O étant nul (par définition de la force centrale), on en déduit, par le théorème du moment cinétique, que le moment cinétique de M par rapport à O est constant :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}\wedge m\vec{v} = \overrightarrow{\text{constante}} \quad (1.21)$$

En tout instant, nous avons $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{L}_O = \vec{0}$, et donc M est contenu dans le plan passant par O et normal à $\vec{L}_O$. Comme $\vec{L}_O$ est un vecteur constant, ce plan est toujours le même et le mouvement du point M est contenu dans ce plan. ■

Propriété — Loi des aires. Soit M un point matériel soumis à une force centrale. Le mouvement étant plan, nous pouvons nous placer dans un repère de coordonnées polaires (r,θ) dans le plan du mouvement, tel que la force centrale soit orientée selon $\pm\vec{e}_r$. Alors :

— La quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est constante et est appelée constante des aires ;

— L'aire $\mathrm{d}\mathscr{A}$ balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant $\mathrm{d}t$ est donnée par :

$$\mathrm{d}\mathscr{A} = \frac{C}{2}\mathrm{d}t \tag{1.22}$$

■ **Démonstration** Soit M un point matériel soumis à une force centrale. Nous nous plaçons dans le système de coordonnées polaires d'origine O et de coordonnées (r,θ) situé dans le plan du mouvement. Dans ce système, le moment cinétique s'écrit :

$$\overrightarrow{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} \tag{1.23}$$

Comme il s'agit d'un vecteur constant, alors $C = r^2\dot{\theta}$ est constant.

Par ailleurs, l'aire balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant $\mathrm{d}t$ est donnée par :

$$\mathrm{d}\mathscr{A} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{OM}|| = \frac{1}{2}||r\overrightarrow{e_r} \wedge r\dot{\theta}\mathrm{d}t\overrightarrow{e_\theta}|| = \frac{r^2\dot{\theta}}{2}\mathrm{d}t = \frac{C}{2}\mathrm{d}t \tag{1.24}$$

■

Force centrale conservative

Propriété Soit $\overrightarrow{F}$ une force centrale conservative qui dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$. On se place dans le repère de coordonnées polaires (r,θ) d'origine O dans le plan du mouvement.

Alors l'énergie mécanique de M peut s'écrire comme la somme d'une énergie cinétique radiale et d'une énergie potentielle efficace :

$$E_m = E_{p,eff} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \tag{1.25}$$

où

$$E_{p,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + E_p(r) \tag{1.26}$$

où C est la constante des aires. L'étude du mouvement selon $\overrightarrow{e_r}$ peut donc se résumer à l'étude classique du mouvement unidimensionnel d'un point selon la coordonnée r avec une énergie potentielle efficace $E_{p,eff}$.

■ **Démonstration** L'énergie cinétique du système est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} \tag{1.27}$$

On constate que le second terme ne dépend que de la position r et pas de la vitesse de la particule M, si bien que l'on peut simplement étudier le mouvement comme un mouvement unidimensionnel selon r avec une énergie potentielle efficace $E_{p,eff}(r)$ donnée par le second terme de l'énergie cinétique. ■

1.3 Champ gravitationnel

Nous allons maintenant nous intéresser au programme de 2e année à proprement parler, en nous intéressant à la force gravitationnelle. Une propriété très importante de la force gravitationnelle est qu'il s'agit d'une interaction à distance. Une manière utile en physique de décrire ce type d'interaction est de supposer qu'il existe un "champ" dans tout l'espace, qui est influencé par la présence des objets massifs, et agit en retour sur les objets massifs.

Définition Un champ est une grandeur vectorielle ou scalaire qui est définie en tout point de l'espace. Un champ peut dépendre du temps, mais il existe aussi des champ stationnaires (indépendants du temps).

Ce concept de champ peut-être vu comme un artifice de calcul, ou comme un objet physique réel. Qui qu'il en soit, on constate de manière empirique qu'il est très utile pour décrire et prédire des situations physiques.

Supposons qu'un corps massif de masse m_0 se trouve à l'origine O d'un repère en coordonnées sphériques. Soit un autre corps de masse m localisé au point $M(\vec{r})$. Ce corps est soumis à une force :

$$\vec{F} = -G\frac{m_0 m}{r^2}\vec{e_r} \tag{1.28}$$

On constate que cette force est proportionnelle à la masse du corps qui subit la force, et que le facteur de proportionnalité ne dépend que de l'emplacement. Ceci nous permet de définir plus précisément le concept de champ gravitationnel :

Définition — Champ gravitationnel. Le champ gravitationnel, noté $\vec{\mathscr{G}}(\vec{r})$, est la force gravitationnelle que subirait une particule ponctuelle de masse unité placée au point $\vec{r}$. Une particule de masse m se trouvant dans un champ gravitationnel $\vec{\mathscr{G}}$ subit alors une force gravitationnelle $\vec{F} = m\vec{\mathscr{G}}$.

Le champ gravitationnel se mesure en m·s^{-2}.

Propriété Le champ gravitationnel produit par une masse ponctuelle m située à l'origine O d'un repère sphérique de coordonnées (r, θ, φ) est donné par la relation :

$$\vec{\mathscr{G}} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{e_r} \tag{1.29}$$

A la différence de la force de gravitation, qui n'existe que si un objet est présent pour la subir, le champ gravitationnel est toujours défini en tout point de l'espace, même dans le vide. Ceci nous permet de définir des outils permettant de le visualiser, en particulier les lignes de champ.

Définition — Lignes de champ. Une ligne de champ gravitationnel est une ligne parallèle en tout point au vecteur champ gravitationnel $\vec{\mathscr{G}}$. Les lignes de champ sont orientées dans le sens du champ gravitationnel, c'est à dire vers les objets massifs.

■ **Exemple — Lignes de champ produites par une masse ponctuelle.** Nous avons vu que le champ gravitationnel produit par une masse ponctuelle m est donné, dans le repère sphérique approprié, par la relation :

$$\vec{\mathscr{G}} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{e_r} \tag{1.30}$$

En tout point de l'espace, $\vec{\mathscr{G}}$ est colinéaire au vecteur unitaire $\vec{e_r}$ et orienté vers l'intérieur, ainsi les lignes de champ sont des demi-droites partant de l'origine et orientées vers l'intérieur. ■

1.3.1 Principe de superposition

La force gravitationnelle est proportionnelle à la masse de l'objet qui subit la force, ce qui nous a permis de définir le champ gravitationnel. Mais elle est également proportionnelle à la masse de l'objet qui produit la force. Ceci nous permet d'exploiter la propriété d'additivité du champ :

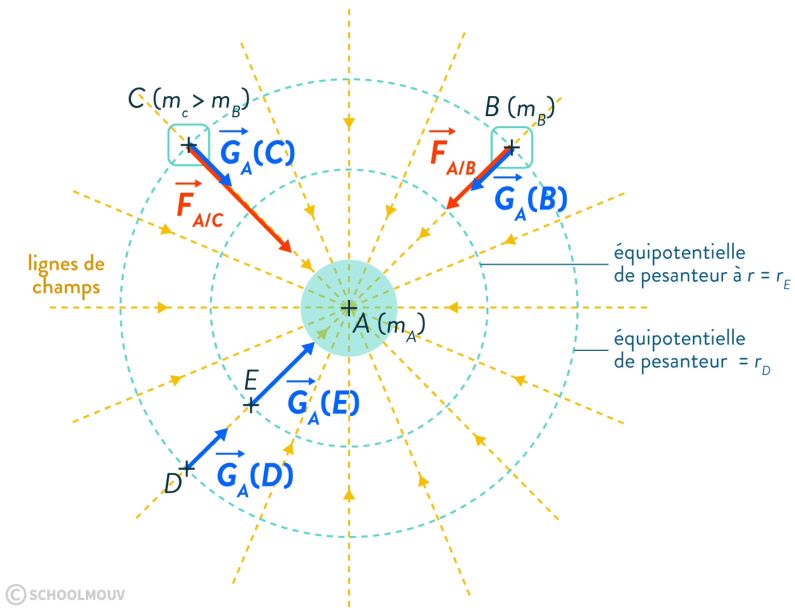

FIGURE 1.3 – Lignes de champ produites par une masse ponctuelle. Le vecteur champ gravitationnel est indiqué en plusieurs points. Il est colinéaire aux lignes de champ et plus intense au voisinage de la masse. Deux équipotentielles sont également représentées, ce concept est défini plus tard.

Propriété — Principe de superposition. Le champ gravitationnel produit par deux objets massifs est la somme des champs produits individuellement par chacun de ces objets.

1.4 Potentiel gravitationnel

1.4.1 Circulation du champ gravitationnel

Calculons le travail de la force gravitationnelle le long de la trajectoire d'une masse ponctuelle m parcourant un chemin Γ. Nous pouvons découper ce chemin en éléments infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{l}$. Le travail élémentaire exercé par la force gravitationnelle sur la particule le long de ce déplacement est donné par :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = m\vec{\mathscr{G}}\cdot\vec{\mathrm{d}l} \tag{1.31}$$

si bien que le travail de la force le long d'un chemin macroscopique Γ s'écrit :

$$W = \int_\Gamma m\vec{\mathscr{G}}\cdot\vec{\mathrm{d}l} \tag{1.32}$$

Cette intégrale correspond à ce que l'on nomme la circulation du champ gravitationnel :

Définition La circulation d'un champ vectoriel $\vec{a}$ le long d'un chemin Γ correspond à l'intégrale du champ le long de ce chemin :

$$\mathscr{C} = \int_\Gamma \vec{a}\cdot\mathrm{d}\vec{l} \tag{1.33}$$

■ **Exemple** Calculons le travail issu du déplacement d'une particule M de masse m au voisinage d'une particule chargée m_0 située sur l'origine. La particule M suit un chemin Γ reliant deux points

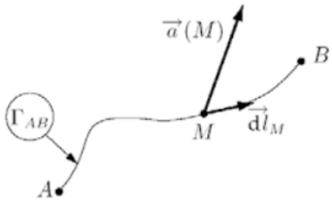

FIGURE 1.4 – Schéma explicitant le calcul de la circulation d'un champ $\vec{a}$ le long d'un contour Γ reliant deux points A et B.

A et B, comme sur la figure 1.4 et est soumise à la force gravitationnelle. On a :

$$W = \int_\Gamma m\vec{\mathscr{G}} \cdot \vec{\mathrm{d}l} \tag{1.34}$$

$$= \int_\Gamma G\frac{mm_0}{r^2}\vec{e_r} \cdot \vec{\mathrm{d}l} \tag{1.35}$$

$$= Gmm_0 \int_\Gamma \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{1.36}$$

$$= Gmm_0 \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \tag{1.37}$$

■

On constate que le travail de la force électrostatique ne dépend que de la position initiale A et de la position finale de la particule B, et en particulier du rayon r_A et r_B de ces positions : il est indépendant du chemin suivi pour relier A et B. On en déduit que la force gravitationnelle est une force conservative, conformément à ce qu'on a déjà vu en première année.

Propriété — Conservativité de la force électrique. La force gravitationnelle est une force **conservative**.

La force gravitationnelle dérive donc d'un potentiel, en effet il est possible d'écrire son travail comme une différence d'énergie potentielle gravitationnelle :

$$W = -\Delta E_p = E_{pot,A} - E_{pot,B} \tag{1.38}$$

avec

$$E_{pot} = -\frac{Gmq_0}{r} + C \tag{1.39}$$

C est une constante que l'on prend généralement égale à zéro afin d'avoir une énergie potentielle nulle loin de tout corps massif ($V \to 0$ lorsque $r \to \infty$).

Définition — Potentiel gravitationnel. On définit le potentiel gravitationnel $\Phi(\vec{r})$ comme l'énergie potentielle gravitationnelle qu'aurait une particule ponctuelle de masse unité placée au point $\vec{r}$. L'énergie potentielle gravitationnelle d'une masse ponctuelle de masse m s'écrit alors :

$$E_{pot} = m\Phi \tag{1.40}$$

Il se mesure en Joules par kilogramme (J/kg).

Pour visualiser le potentiel gravitationnel, on dessine souvent des surfaces équipotentielles (ou lignes équipotentielles si le problème est à deux dimensions) :

Définition Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel gravitationnel a une valeur constante.

1.4.2 Opérateur gradient et lien entre potentiel et champ

Nous cherchons maintenant à relier le potentiel gravitationnel et le champ gravitationnel par une relation directe, sans faire intervenir d'intégrale. Pour cela, nous pouvons remarquer que le travail élémentaire de la force électrique le long d'un chemin $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ peut s'écrire d'une part :

$$\delta W = -\mathrm{d}E_{pot} = -m\mathrm{d}\phi \tag{1.41}$$

et d'autre part :

$$\delta W = \overrightarrow{F_{grav}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = m\overrightarrow{\mathscr{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \tag{1.42}$$

Cas à une dimension

Pour simplifier ce problème, nous commençons à analyser le cas fictif d'un problème à une dimension, où x est la seule coordonnée d'espace. Dans cette configuration, $\overrightarrow{\mathscr{G}} = \mathscr{G}\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x}$ et nous pouvons donc écrire $\overrightarrow{\mathscr{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mathscr{G}\mathrm{d}x$. On obtient alors une relation reliant le champ de gravitation et le potentiel gravitationnel :

$$\mathscr{G} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} \tag{1.43}$$

Cas réel (à plusieurs dimensions)

En réalité, l'espace a plusieurs dimensions. Nous voudrions procéder de la même manière qu'à une dimension et remplacer l'expression :

$$\mathrm{d}\phi = -\overrightarrow{\mathscr{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \tag{1.44}$$

par une relation du type "$\overrightarrow{\mathscr{G}} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}$". Mais cette relation est évidemment fausse puisqu'on ne peut pas diviser un scalaire par un vecteur !

Pour obtenir cette relation, nous décomposons comme suit l'équation 1.44 :

$$\mathrm{d}\phi = -(\mathscr{G}_x\mathrm{d}x + \mathscr{G}_y\mathrm{d}y + \mathscr{G}_z\mathrm{d}z) \tag{1.45}$$

ce qui se traduit immédiatement par :

$$\mathscr{G}_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad ; \quad \mathscr{G}_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad ; \quad \mathscr{G}_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.46}$$

Nous allons simplifier cette équation en introduisant l'opérateur gradient.

Définition — Opérateur gradient. L'opérateur gradient, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$, est un opérateur **vectoriel** défini par son action sur un champ **scalaire** A :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial A}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.47}$$

R Il existe une autre notation pour la gradient, utilisant le vecteur nabla :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.48}$$

On note alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A) = \vec{\nabla}A$. Cette notation est la notation officielle internationale. La notation $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ est la notation française, qui figure au programme et est utilisée dans la plupart des concours.

L'une des propriétés fondamentales de l'opérateur gradient est le théorème du gradient :

Théorème — Théorème du gradient. Soit Γ un contour reliant deux points M_1 et M_2, et soit A un champ scalaire défini le long de ce contour. Alors :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = A(M_2) - A(M_1) \tag{1.49}$$

■ **Démonstration** Nous pouvons écrire la différentielle du champ A :

$$\mathrm{d}A = \frac{\partial A}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial A}{\partial z}\mathrm{d}z \tag{1.50}$$

On reconnaît ici le produit scalaire entre le gradient de A et le vecteur élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$. On obtient alors :

$$\mathrm{d}A = \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \tag{1.51}$$

On intègre le long du contour et on obtient :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \int_\Gamma \mathrm{d}A = A(M_2) - A(M_1) \tag{1.52}$$

■

Notons que la version infinitésimale du théorème du gradient est également à connaître et découle directement du théorème du gradient appliqué à un contour infinitésimal :

Propriété — Théorème du gradient – Version infinitésimale. Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ un segment élémentaire, et soit A un champ scalaire défini le long de ce segment. Alors la variation de A entre les deux extrémités du segment est donnée par :

$$\mathrm{d}A = \overrightarrow{\text{grad}}(A) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \tag{1.53}$$

Retour au lien entre potentiel gravitationnel et champ gravitationnel

Maintenant que nous avons introduit l'opérateur gradient, nous obtenons un lien direct entre champ gravitationnel et potentiel gravitationnel :

Propriété Le champ gravitationnel est opposé au gradient du potentiel gravitationnel :

$$\vec{\mathscr{G}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \tag{1.54}$$

■ **Démonstration** Le travail élémentaire de la force gravitationnelle le long d'un chemin $\mathrm{d}\vec{\ell}$ peut s'écrire d'une part :

$$\delta W = \vec{\mathscr{G}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{1.55}$$

et d'autre part :

$$\delta W = -\mathrm{d}E_{pot} = -m\mathrm{d}\phi = -m\,\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{1.56}$$

par propriété de l'opérateur gradient. Par identification, on en déduit :

$$\vec{\mathscr{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \tag{1.57}$$

Ceci étant vrai pour tout élément $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$ on en déduit que :

$$\vec{\mathscr{G}} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\phi) \tag{1.58}$$

■

Une conséquence de cette relation est la propriété géométrique suivante :

Propriété Les surfaces équipotentielles et les lignes de champ sont orthogonales.

■ **Démonstration** Soit $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ un segment situé le long d'une équipotentielle. Par définition de l'équipotentielle la variation de potentiel le long de cet élément est nulle :

$$\mathrm{d}\phi = 0 \tag{1.59}$$

Or par propriété de l'opérateur gradient :

$$\mathrm{d}\phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \tag{1.60}$$

En combinant ces deux équations et en réinjectant $\overrightarrow{\mathscr{G}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\phi$ on trouve finalement que :

$$\overrightarrow{\mathscr{G}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \overrightarrow{0} \tag{1.61}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ est perpendiculaire au champ gravitationnel. ■

Par ailleurs, il est aussi possible de relier l'intensité du champ gravitationnel à la distance entre les surfaces équipotentielles :

Propriété L'intensité du champ gravitationnel est inversement proportionnelle à la distance entre les équipotentielles.

■ **Démonstration** Considérons deux équipotentielles séparées par une distance d. L'écart de potentiel entre les deux équipotentielles satisfait alors la relation $\Delta\phi \approx ||\overrightarrow{\mathscr{G}}|| \times d$. Autrement dit :

$$||\overrightarrow{\mathscr{G}}|| = \frac{\Delta V}{d} \propto \frac{1}{d} \tag{1.62}$$

■

Pour une masse ponctuelle, le potentiel électrique V ne dépend que du rayon r, les équipotentielles sont donc des sphères centrées sur la masse concernée.

Pour un système plus complexe, on utilise en général le principe de superposition afin d'en déduire le champ gravitationnel et les équipotentielles, comme c'est le cas ici pour le système Terre-Lune :

Encart — Application : le niveau des océans. La surface des océans, si on néglige l'existence des courant océaniques, correspond à une surface liquide au repos, c'est-à-dire en tout point perpendiculaire au champ de gravitation terrestre. Il s'agit donc d'une équipotentielle du champ de gravité terrestre. Cette surface a été cartographiée par satellite et il se trouve qu'elle ne correspond pas à une sphère comme on pourrait s'y attendre (cf figure 1.6) : elle fait des creux et des bosses de plusieurs dizaines de mètres. Ceci est dû au fait que le champ de gravité terrestre n'est pas uniforme, il est plus intense à certains endroits et moins à d'autres.

En particulier, au voisinage des Antilles, la topographie est complexe en raison du contexte géologique. Une fosse se situe à l'Est de l'arc à cause d'une subduction (la plaque Atlantique passe sous la plaque Caraïbe) et un arc volcanique se trouve au niveau des îles. Les montagnes correspondent à une masse supplémentaire, et cette gravité attire l'eau de l'océan vers les Antilles. Au contraire, la fosse correspond à un déficit de masse et la gravité y est moins forte. Conséquence : le niveau de la mer est localement plus élevé au voisinage des îles des petites Antilles, et plus bas à l'Est.

Ceci ne se voit pas dans les altitudes des cartes topographiques puisque ces altitudes sont calculées à partir de l'équipotentielle 0, c'st-à-dire à partir du niveau de la mer.

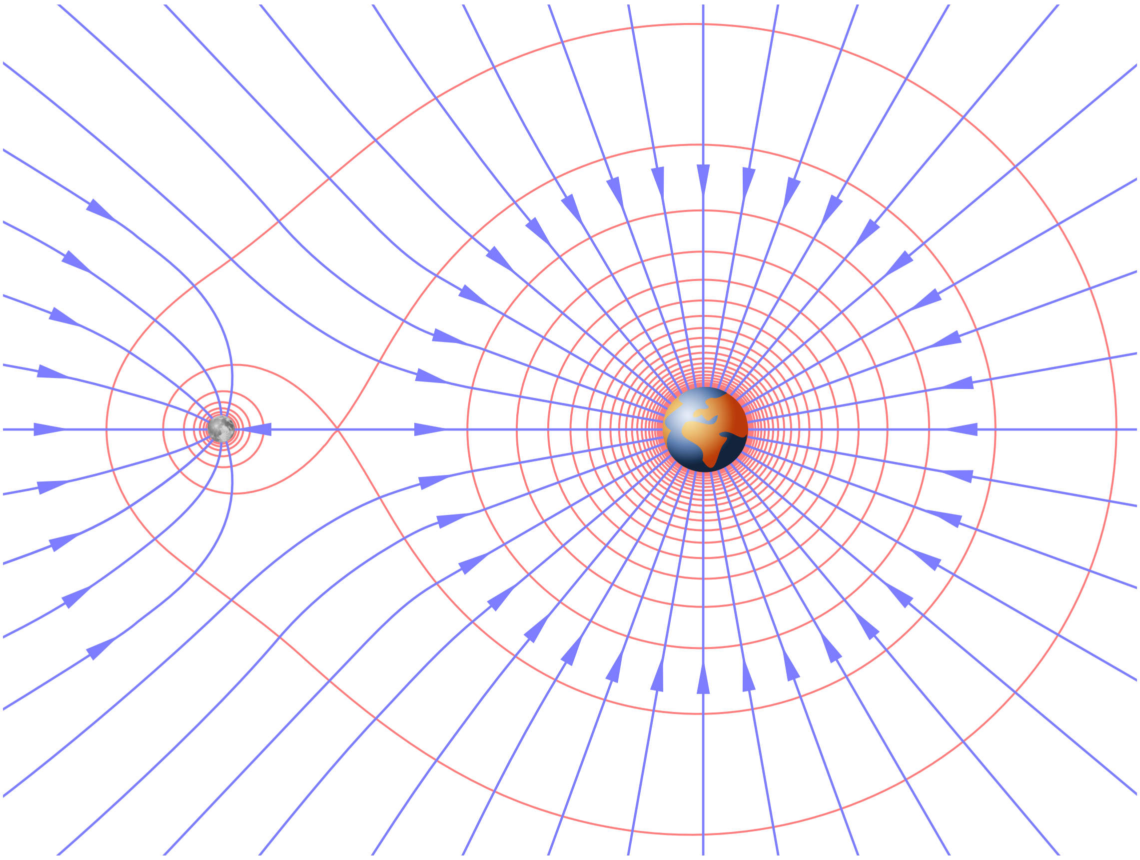

FIGURE 1.5 – Lignes de champ et équipotentielles du système Terre-Lune, qui peuvent être calculées via le principe de superposition. Le champ de gravité est plus fort là où les équipotentielles et les lignes de champ sont les plus resserrées. Le champ est le gradient du potentiel, ainsi les lignes de champ et les équipotentielles sont en tout point perpendiculaires. Source : Wikimedia Commons.

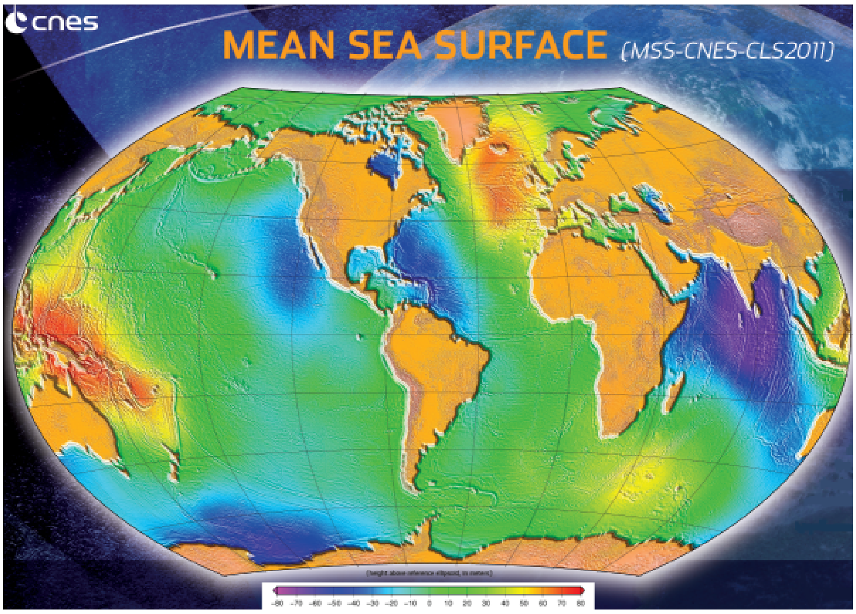

FIGURE 1.6 – Carte de la hauteur de la surface des océans, établie par altimétrie satellite. L'échelle de couleur se mesure en mètres. Source : Centre National d'Études Spatiales (CNES).

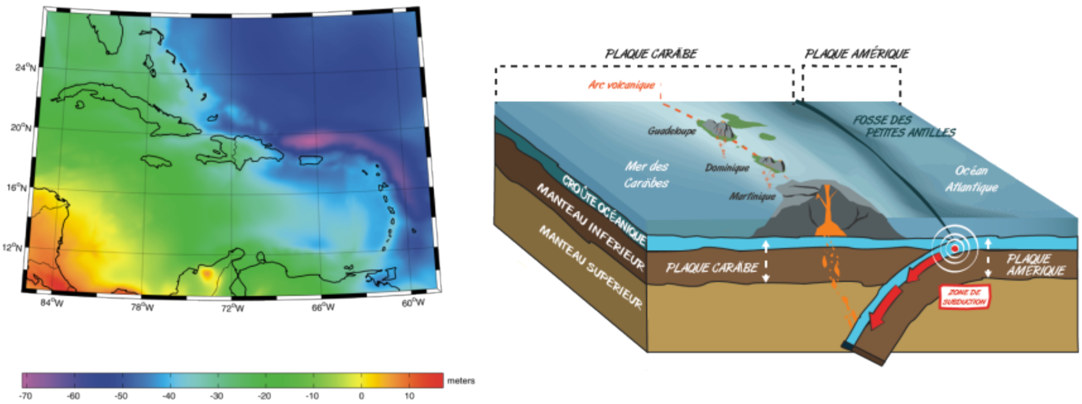

FIGURE 1.7 – Hauteur de la surface des océans dans la région des Antilles. Une coupe géologique et topographique est montrée à droite pour aider l'interprétation de la situation. Sources : International Service for the Geoid et Risques Naturels 972.