

# Electrostatique

## Chapitre 3

### I - Lignes de champ et équipotentielles

#### 1 Lecture de cartes de lignes de champ

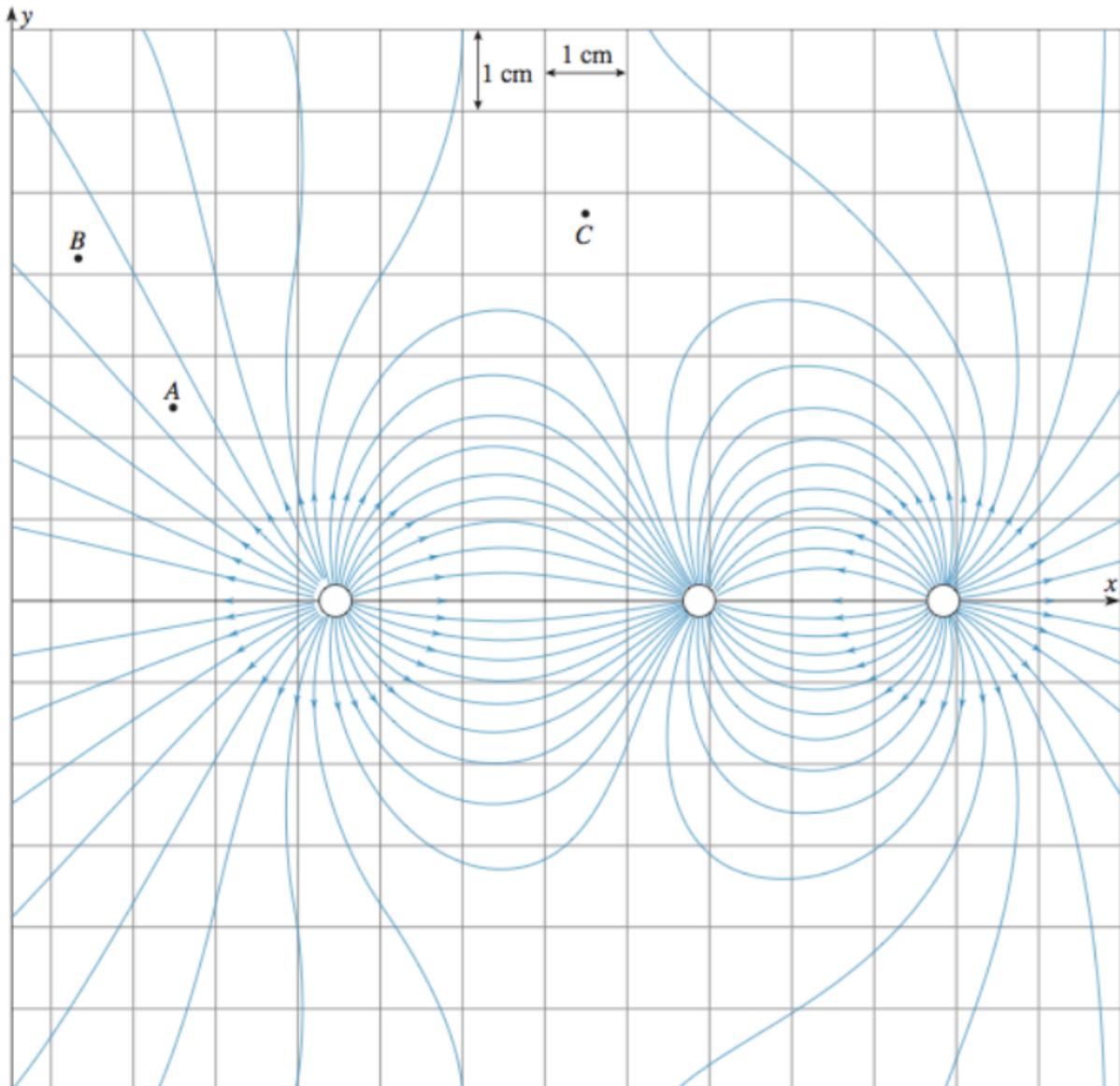


Figure 1: Lignes de champ créées par trois fils uniformément chargés perpendiculaires au plan de la figure.

1. On considère la carte de lignes de champ donnée en figure 1, produite par trois fils uniformément chargés.
  - (a) Où sont les plans de symétrie de la distribution ?
  - (b) Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?
  - (c) Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?
  - (d) La norme du champ électrique en A est de  $100 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . Calculer une valeur approchée du champ en B.
  - (e) Que peut-on dire du champ électrique au voisinage du point C ?
  
2. On considère maintenant la carte de lignes de champ donnée en figure 2, produite par cinq charges **ponctuelles**. Toutes les charges sont situées dans le plan du dessin. Les lignes en noir sont aussi des lignes de champ. On numérote  $q_1$  à  $q_5$  les charges de gauche à droite.

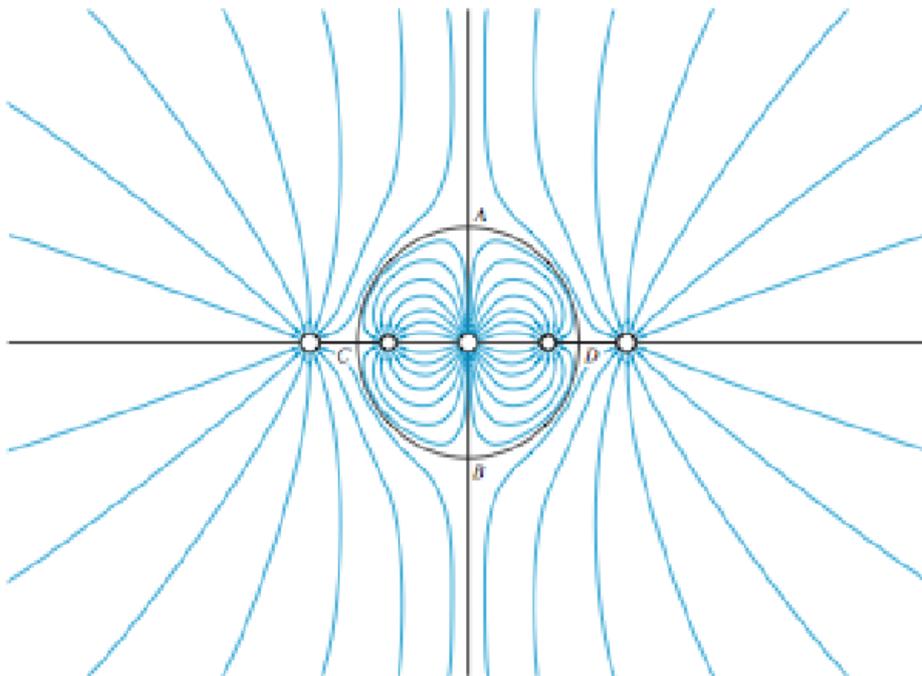


Figure 2: Lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles dans le plan de la figure.

- (a) En supposant que  $\sum_i q_i < 0$ , déterminer les signes des cinq charges et orienter les lignes de champ.
- (b) Indiquer et justifier la position des points de champ nul.
- (c) A l'aide des symétries du problème, trouver deux relations entre  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_4$  et  $q_5$ .
- (d) En utilisant le théorème de Gauss, trouver une relation entre  $q_2$  et  $q_3$ .

## II - Applications du théorème de Gauss

### 2 Cylindre uniformément chargé (explicitement au programme)

On considère un fil chargé se situant le long de l'axe ( $Oz$ ). Le fil porte une charge  $q$ , a un rayon  $r_0$  et une longueur  $L$ .

1. Proposer un modèle de distribution de charges dans le fil. Donner les propriétés de symétrie et d'invariance de cette distribution.
2. On s'intéresse au champ proche du fil (la distance au fil est petite devant la longueur du fil). Quelle approximation peut-on faire pour simplifier le problème ? Quelle invariance cela ajoute-t-il au problème ?
3. Dans le cadre de cette approximation, calculer le champ électrique dans le fil et autour du fil dans un repère approprié.
4. Que peut-on dire de particulier concernant le champ électrique à l'extérieur du fil ?
5. Dans le cas d'un fil infiniment fin ( $r_0 \rightarrow 0$ ), on définit la densité linéique de charge :

$$\lambda = \frac{dq}{dL} \quad (1)$$

Ici, elle est uniforme et vaut donc  $\lambda = q/L$ . Donner l'expression du champ à l'extérieur du fil en fonction de  $\lambda$ .

### 3 Condensateur cylindrique

La plupart des condensateurs que vous observez en TP ne sont pas plans mais cylindriques : cela permet de minimiser les effets de bord. Nous étudions donc ici un condensateur cylindrique. On considère deux cylindres métalliques  $C_1$  et  $C_2$  de même axe ( $Oz$ ), de même hauteur  $h$  et de rayon  $r_1$  et  $r_2$  avec  $r_1 < r_2 \ll h$ . Les cylindres portent des charges réparties uniformément en surface. La charge total sur  $C_1$  est  $+Q$  et celle sur  $C_2$  est  $-Q$ . Déterminer la capacité  $C$  de ce condensateur cylindrique.

*Cet exercice nécessite une certaine prise d'initiative en procédant étape par étape. On pourra s'inspirer des étapes utilisées dans le cours pour déterminer la capacité d'un condensateur plan. On rappelle que la capacité est définie par  $Q = CU$  où  $U$  est la différence de potentiel entre les deux armatures.*

## 4 Effet Faraday

Dans le cours, nous avons étudié le cas d'une sphère uniformément chargée en volume, de rayon  $r_0$  et de charge  $Q$ . Nous supposons que la sphère est conductrice.

1. Rappeler l'expression du champ électrique dans la sphère obtenue en cours. Sous l'action du champ électrique, les charges restent-elles immobiles ? Expliquer alors pourquoi il est plus réaliste de considérer une sphère chargée en surface.
2. On suppose maintenant que la densité volumique de charges est nulle dans la sphère, et que les charges sont accumulées à la surface avec une densité surfacique uniforme  $\sigma$  que l'on exprimera.
3. (a) Calculer le champ électrique produit par cette sphère.  
 (b) Que peut-on dire du champ en dehors de la sphère ?  
 (c) Que peut-on dire du champ à l'intérieur de la sphère ? On dit que la sphère est une cage de Faraday.

*L'effet Faraday fonctionne pour n'importe quel surface fermée conductrice. Il est utile pour se protéger des impacts du champ électrostatique. Par exemple, sous un orage violent, on peut se placer à l'intérieur d'un véhicule métallique pour se protéger du risque de foudre. Les appareils d'IRM sont également entourés d'une cage de Faraday pour isoler la pièce du champ électrique extérieur pouvant interférer avec les ondes de radiofréquence émises par le générateur d'ondes radio.*

## 5 Modèle d'un atome

Dans le cours nous avons vu que la sphère uniformément chargée en volume était un bon modèle pour un noyau atomique. Maintenant nous allons nous intéresser au modèle d'un atome entier (et pas seulement de son noyau). On serait tenté d'utiliser une somme de potentiels créés par des charges ponctuelles. Cependant, le grand nombre de charges, et le mouvement des charges autour de l'atome dans les couches électroniques, rend ce modèle complexe. Nous adoptons donc plutôt adopter une description continue d'un nuage électronique.

On utilise pour cela le potentiel électrostatique de Yukawa :

$$V(r) = \frac{A}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad (2)$$

où  $A$  et  $a$  sont deux constantes, et  $r$  est la distance au noyau. Dans cet exercice, nous allons chercher à mieux comprendre pourquoi ce modèle de potentiel est approprié.

1. (a) En étudiant les cas  $r \ll a$  et  $r \gg a$ , proposer une interprétation physique de  $a$ .  
 (b) En utilisant l'un de ces cas limites, donner l'expression de  $A$  en fonction du numéro atomique de l'atome  $Z$  et d'autres constantes fondamentales.  
 (c) Pour l'atome d'hydrogène, on donne  $E(r = a) = 10^{11} \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}$ . En déduire la valeur de  $a$ . Commenter.
2. Nous allons maintenant analyser le champ électrique créé par ce potentiel.

- (a) Calculer le champ  $\vec{E}$  qui dérive du potentiel  $V(r)$ . On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}}(F(r)) = \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \vec{e}_\phi \quad (3)$$

- (b) En déduire le flux  $\Phi(r)$  du champ électrique à travers une sphère de rayon  $r$ . Commenter les cas  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow \infty$ .
  - (c) Dans le cas où  $r \sim a$ , on parle d'écrantage partiel de la charge du noyau par le nuage électronique. Justifier cette terminologie.
3. On cherche maintenant à exprimer la densité volumique  $\rho(r)$  dans ce modèle de l'atome pour caractériser le nuage électronique. On note pour commencer  $Q(r)$  la charge comprise à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ .  
 (a) Déterminer  $Q(r)$ .  
 (b) Exprimer la quantité de charge  $dQ = Q(r + dr) - Q(r)$  comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ . Tracer son allure et l'interpréter. Où se trouvent la majorité des électrons du nuage électronique ? Cela est-il compatible avec l'interprétation physique de  $a$  qui a été proposée ?

## 6 Profil de masse volumique dans la Terre

On assimile la Terre à une sphère parfaite de centre O, de rayon  $R_T = 6380 \text{ km}$  et de masse totale  $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ .

1. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel. Donner les analogues électrostatiques des variables apparaissant dans la formule.
2. On considère dans un premier temps la masse uniformément répartie. Montrer que le champ gravitationnel est de la forme  $\vec{\mathcal{G}}(r) = -g(r)\vec{e}_r$ . Calculer et représenter  $g(r)$  en fonction de  $r$ . Que peut-on dire du cas  $r > R_T$  ?
3. Retrouver la valeur  $g_0$  du champ de pesanteur à la surface de la Terre.

4. En réalité la répartition de masse n'est pas uniforme : le champ de pesanteur évolue selon l'allure de la figure ci-dessus, où  $R_N$  est le rayon du noyau de la Terre. On suppose maintenant que la densité volumique de charges  $\rho(r)$  dépend de  $r$ .

- Appliquer le théorème de Gauss à une sphère de rayon  $r$ .
- En dérivant le résultat par rapport à  $r$ , déterminer la répartition de masse volumique  $\rho(r)$  au sein de la Terre et tracer son allure. Commenter.

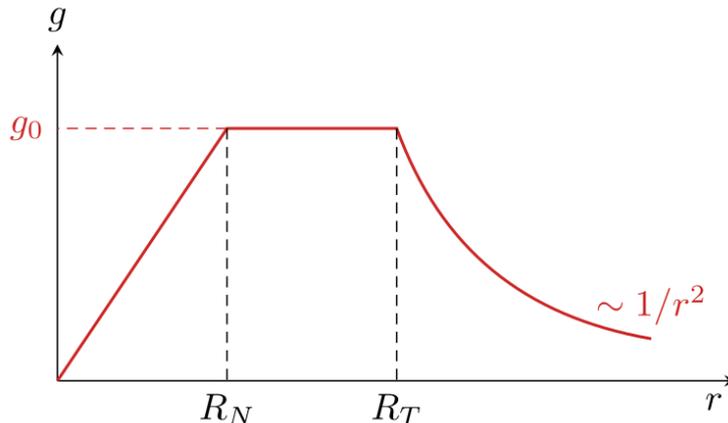


Figure 3: Accélération de la pesanteur terrestre en fonction de la distance au centre de la Terre. Source : ploy de TD de Etienne Thibierge.

### III - Dipôle électrostatique

#### 7 Interaction entre deux dipôles (d'après E3A 2016)

On souhaite modéliser les interactions de Van der Waals entre un dipôle permanent (comme une molécule d'eau) et un dipôle induit (par exemple, une grosse molécule organique). On place un dipôle permanent de moment dipolaire  $\vec{p}$  au centre  $O$  d'un repère.

- On se place dans l'approximation dipolaire. Rappeler l'hypothèse correspondante.
- Faire un schéma du dipôle placé orienté selon l'axe  $(Oz)$  et représenter le repère de coordonnées sphériques.
- Établir l'expression du potentiel électrique  $V(r, \theta)$  créé par un dipôle.
- Comment se simplifie l'expression obtenue précédemment dans l'approximation dipolaire ?

5. En déduire l'expression du champ électrique créé par le dipôle en un point  $M(r, \theta, z)$ .
6. Lorsqu'un morceau de matière est soumis à un champ électrique  $\vec{E}$ , il se polarise et acquiert un moment dipolaire  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ , où  $\alpha$  est la polarisabilité. Ce morceau de matière est soumis au champ  $\vec{E}$  du dipôle permanent décrit précédemment. Justifier que l'énergie d'interaction de Van der Waals dite dipôle-dipôle induit entre ces deux dipôles (l'un placé en  $O$ , l'autre en  $M$ ) puisse se mettre sous la forme :

$$U = -\frac{C}{r^6} \quad (4)$$

7.  $C$  dépend-elle de l'orientation relative des deux dipôles ?

## 8 Dissolution du cuivre dans l'eau

Nous étudions la dissolution d'ions cuivre (II) dans l'eau. Dans un modèle simplifié, l'ion cuivre  $\text{Cu}^{2+}$  est hydraté par quatre molécules d'eau placées aux sommets d'un carré de côté  $a$ , et centré sur le cation.

1. Dessiner la molécule d'eau, les charges partielles portées par chaque atome, et son moment dipolaire  $\vec{p}$ .
2. Donner l'expression du champ électrique généré par l'ion  $\text{Cu}^{2+}$  dans le repère sphérique centré sur l'ion. Représenter les lignes de champ associées sur un schéma.
3. Comment vont s'orienter les dipôles électrostatiques associés aux quatre molécules d'eau ? Les représenter sur le schéma.

4. On souhaite maintenant calculer l'énergie potentielle électrostatique de cette configuration. On rappelle l'expression du champ créé par un dipôle électrostatique  $\vec{p}$  dans le repère de coordonnées sphériques centré sur le dipôle et dont l'axe ( $Oz$ ) est orienté selon le dipôle :

$$\vec{E}(r, \theta) = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta \quad (5)$$

- Calculer l'énergie potentielle électrostatique  $E_1$  associée à l'interaction entre l'ion  $\text{Cu}^{2+}$  et une molécule d'eau.
  - Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique  $E_2$  entre deux dipôles à la diagonale l'un de l'autre. *Indice : cette énergie correspond à l'énergie électrostatique de l'un des dipôles placé dans le champ électrique produit par l'autre dipôle*
  - Calculer l'énergie potentielle d'interaction électrostatique  $E_3$  entre deux dipôles voisins.
  - Exprimer l'énergie potentielle électrostatique de l'ion hydraté  $E$  comme une combinaison linéaire de  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .
  - Application numérique : calculer  $E$  et séparer la contribution des interactions  $\text{Cu-H}_2\text{O}$  et  $\text{H}_2\text{O-H}_2\text{O}$ . Commenter l'importance de l'effet des interactions entre molécules d'eau.
5. Lors de la dissolution du cuivre, cette énergie électrostatique est libérée (on parle d'enthalpie de dissolution, un terme que l'on définira dans le prochain chapitre de chimie). Calculer l'énergie libérée lors de la solvatation d'une mole d'ions cuivre (II).

Données :

- $p = 1,8 D = 6,0 \cdot 10^{-30} \text{C} \cdot \text{m}^{-1}$
- $a = 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

## 9 Pince optique

Arthur Ashkin, prix Nobel 2018, est l'inventeur des pinces optiques à l'aide de faisceau laser focalisé. Ces pinces optiques permettent de piéger une seule molécule, ou même un seul atome isolé, dans un espace restreint. En immobilisant quasiment complètement un atome, on peut alors descendre à des températures très faibles de l'ordre de quelques nanoKelvins, ce qui a permis de tester des hypothèses en mécanique quantique notamment.

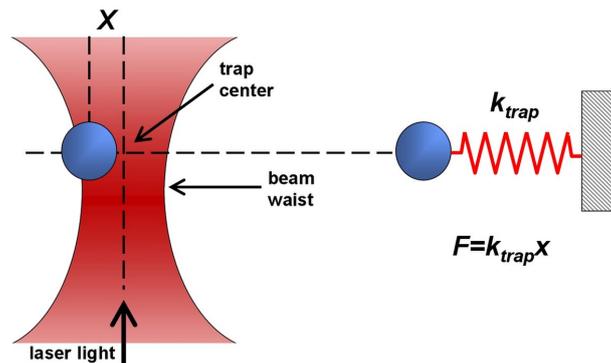


Figure 4: Principe d'une pince optique (à gauche) et équivalence à une force de rappel d'un ressort (à droite). Sur la figure,  $x < 0$ . Source : Wikimedia Commons.

Considérons un faisceau laser dont l'amplitude du champ dans le plan de focalisation prend la forme gaussienne suivante :

$$\vec{E}(x) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2w^2}\right) \vec{e}_x \quad (6)$$

1. Représenter l'allure de la norme du champ électrique  $E(x)$ .
2. On introduit dans ce champ une particule de polarisabilité  $\alpha$ , c'est-à-dire que lorsqu'elle est exposée à un champ électrique, elle acquiert un moment dipolaire  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ . Montrer qu'il apparaît, au voisinage de  $x = 0$ , une force de rappel de la forme  $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$ , qui peut être utilisée pour piéger la particule au centre du faisceau laser. On écrira  $k$  en fonction des données du problème.

## 10 Ligne haute tension

On considère une ligne à haute tension constituée de deux fils séparés d'une distance  $h$ .

On modélise cette ligne à haute tension par deux fils rectilignes, infinis, parallèles à l'axe  $(Oz)$ , et d'équations  $y = -a$  et  $y = +a$ , de charges linéiques uniformes  $\lambda_1 = +\lambda$  et  $\lambda_2 = -\lambda$ , avec  $\lambda > 0$ . On note  $A_1$  et  $A_2$  leur intersection respective avec le plan  $(xOy)$ . Un point  $M$  est repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On note  $r_1$  et  $r_2$  les distances entre  $M$  et chacun des fils. On choisit l'origine des potentiels au point  $O$  ( $V(O) = 0$ ).

1. Déterminer l'expression du champ électrostatique créé par un unique fil infini chargé avec une densité linéique  $\lambda$  uniforme, en tout point de l'espace. On notera  $r$  la distance entre le point  $M$  et le fil. En déduire le potentiel électrostatique  $V$  associé à une constante  $C$  près.
2. Calculer l'expression du potentiel électrostatique  $V(M)$  créé en  $M$  par l'ensemble des deux fils en fonction de  $\lambda$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .
3. Établir la relation liant  $r_1$  et  $r_2$  en un point  $M$  d'une surface équipotentielle telle que  $V(M) = V_0$ .
4. Montrer que la surface équipotentielle  $V_0 = 0$  est un plan dont on donnera l'équation. Justifier par une autre méthode (sans calculs) que ce plan est une équipotentielle.
5. Dans toute la suite, on note par soucis de simplification :

$$k = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V_0}{\lambda}\right) \quad (7)$$

Montrer que les surfaces équipotentielles sont des cylindres dont l'intersection avec le plan  $(xOy)$  sont des cercles de centre :

$$C = \left(0; a \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}\right) \quad (8)$$

On rappelle que l'équation d'un cercle de centre  $C = (\alpha; \beta)$  et de rayon  $\gamma$  s'écrit en coordonnées cartésiennes  $(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = \gamma^2$

6. En indiquant les propriétés utilisées, dessiner l'allure des équipotentielles et des lignes de champ électrostatique dans le plan  $z = 0$ . Commenter les similarités et différences avec le dipôle électrostatique.