

Magnétostatique

Chapitre 4

I - Révisions : Mouvement d'une particule chargée

1 Déviation d'un faisceau d'électrons dans un oscilloscope ♥ ★

Dans un oscilloscope analogique, un faisceau d'électrons émis avec une vitesse quasi nulle, est accéléré par une tension U_0 appliquée selon l'axe (Ox) . Il atteint alors une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ et se situe sur l'axe (Ox) .

Le faisceau pénètre alors dans un champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_z$ supposé uniforme entre deux plaques métalliques parallèles au plan (xOz) , de longueur L et séparées par la distance d . Le champ est créé par une tension U appliquée entre ces plaques.

Une fois que le faisceau est sortie de cette zone, il finit par toucher l'écran de l'oscilloscope, parallèle au plan (yOz) et situé à une distance D du milieu des plaques.

1. Faire un schéma de la situation dans le plan (xOy) en faisant attention à l'orientation du faisceau et des différentes plaques.
2. Calculer, en fonction de U_0 , la norme de la vitesse v_0 initiale du faisceau d'électrons. Faire l'application numérique pour $U_0 = 1 \text{ kV}$. On rappelle la masse de l'électron : $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.
3. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre les plaques. En déduire l'ordonnée y_0 du faisceau lorsqu'il sort de la région soumise au champ électrique $\vec{E}$.
4. On note y_E l'ordonnée de l'impact du faisceau sur l'écran de l'oscilloscope. Déterminer son expression en fonction de U_0, U, D et des paramètres géométriques du problème.

2 Principe d'un spectromètre de masse ★★

Dans le spectromètre de Dempster, des ions sortent de la chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable.

Ils sont accélérés par une tension U , appliquée entre les deux plaques P et P' : $V_{P'} - V_P = U < 0$. Les ions traversent ensuite une zone de l'espace (appelée zone de déviation) où règne un champ magnétique transversal uniforme : $\vec{B} = B \vec{u}_z$. On a $|U| = 10 \text{ kV}$ et $B = 0.10 \text{ T}$.

Dans tout l'exercice, on considère deux types d'ions, de même charge q et de masses respectives m_1 et m_2 , arrivant dans la zone de déviation avec les vitesses respectives $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2 \vec{u}_x$.

1. Quel est le signe de q pour que les ions soient effectivement accélérés entre P et P' ?

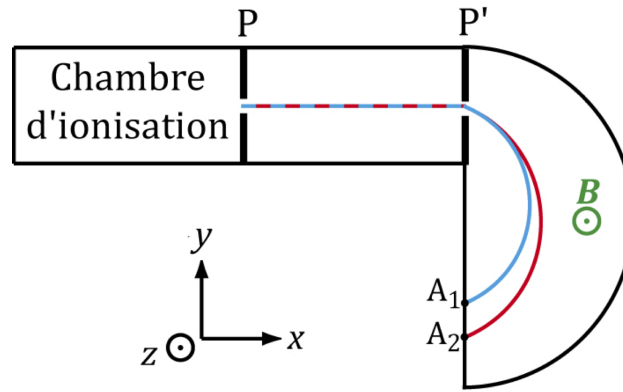


Figure 1: Principe de fonctionnement du spectromètre de masse.

2. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 .
3. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des ions dans le champ magnétique.
4. En déduire la distance $d = A_1A_2$ entre les impacts des deux types d'ions.
5. Donner la position du lithium ($Z = 3$) dans la classification périodique. À quelle famille d'éléments chimiques appartient-il ? Quel est l'ion stable formé par le lithium ?
6. Calculer numériquement d si on utilise ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ de masses molaires respectives $6.0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $7.0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

3 Le cyclotron ♥ ★★

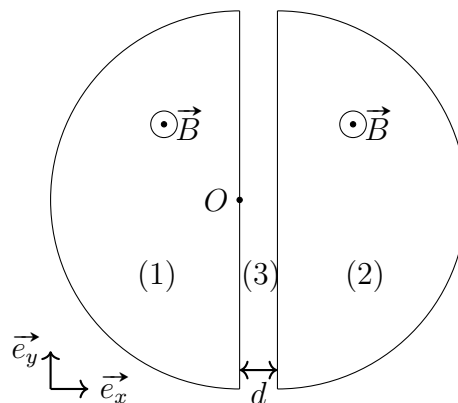


Figure 2: Schéma du cyclotron.

Un cyclotron est formé de deux enceintes semi-cylindriques D_1 (région (1)) et D_2 (région (2)), dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Entre ces deux enceintes, une bande étroite de largeur d (région (3)) est plongée dans un champ électrique alternatif de module E constant, mais qui change de sens (orienté selon $\pm\vec{e}_x$).

On introduit au point O une particule de charge $q > 0$ et de masse m , sans vitesse initiale. Le champ électrique est alors orienté selon $+\vec{e}_x$.

1. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3) avant qu'elle ne pénètre dans la région (2) ? Calculer la vitesse v_1 de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2).
2. (a) Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (2) ? Déterminer la trajectoire parcourue ainsi que ses caractéristiques.
(b) Quelle est la vitesse de la particule lorsqu'elle sort de la région (2) ?
3. Pendant que la particule était dans la région (2), le sens du champ électrique a changé. Calculer la vitesse de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (1).
4. La particule est à nouveau déviée dans la zone (1).
(a) Quelle est la nature de sa trajectoire ?
(b) Exprimer la durée de cette trajectoire. Montrer qu'elle est la même à chaque passage dans les zones (1) et (2) et dépend du rapport q/m .
(c) En déduire la fréquence de la tension alternative nécessaire pour que le champ électrique accélère la particule à chaque passage dans la région (3).
5. Après n passages dans la région (3) quelle est la vitesse de la particule ? Expliquer l'intérêt de ce dispositif par rapport à une accélération simple réalisée uniquement avec un champ électrique.
6. On considère un cyclotron dont le diamètre est de 52 cm. L'amplitude de la tension alternative appliquée entre les régions (1) et (2) est de 200 kV et sa fréquence de 12 MHz. Calculer le nombre de tours effectués par les particules pour atteindre leur énergie cinétique maximale, et la valeur de cette énergie en MeV.

II-Champ magnétique

4 Lignes de champ ♥ ★

1. On considère la carte de lignes de champ donnée ci-dessus. Indiquer la position des sources, le sens du courant, les zones de champ fort et faible, et le cas échéant s'il existe une zone de l'espace où le champ magnétique est nul.
2. Les quatre figures ci-dessous représentent quelques cartes de champ bidimensionnels de la forme :

$$\vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{e}_x + a_y(x, y)\vec{e}_y \quad (1)$$

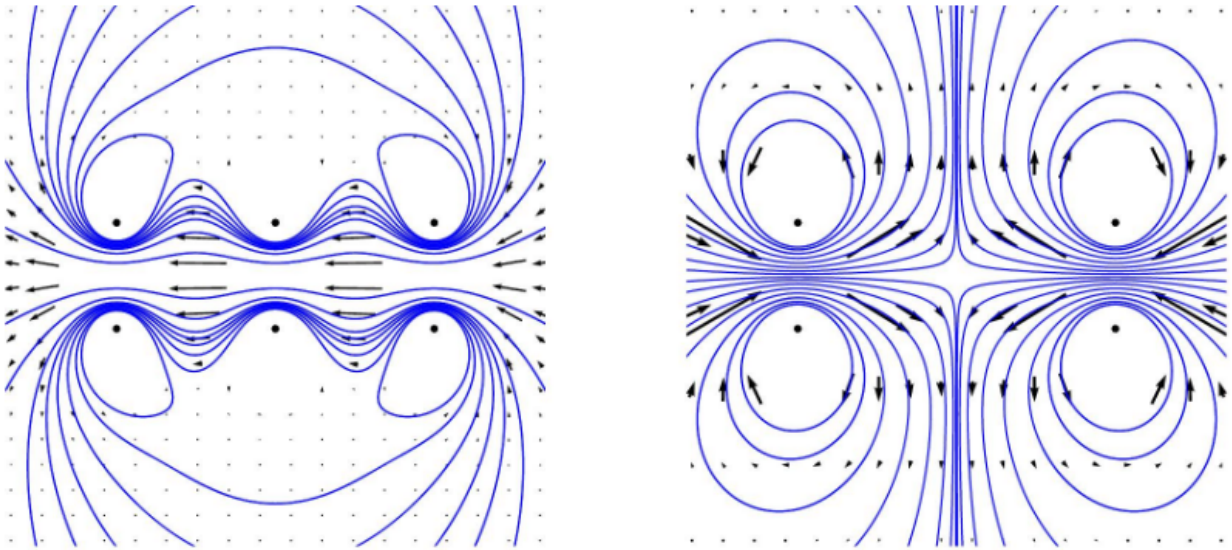


Figure 3: Cartes de lignes de champ

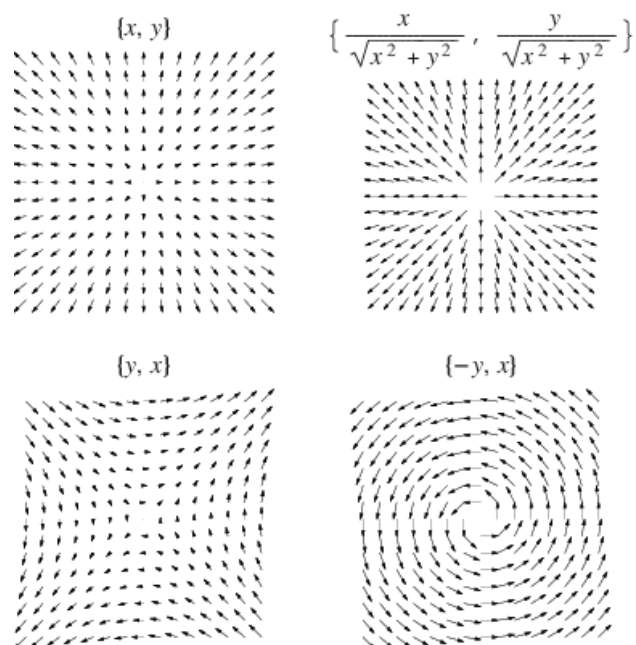


Figure 4: Quelques champs vectoriels dans l'espace $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, dont les coordonnées (a_x, a_y) sont données en titre.

On suppose que ces champs ont une composante nulle selon $\vec{e}_z$ et sont invariants par translation selon $\vec{e}_z$. Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique. Si non, expliquer pourquoi et si oui, dire si des courants sont présents dans la zone représentée.

5 Champ magnétique créé par un fil (Exercice explicitement au programme) ♥ ★

On considère un fil rectiligne de rayon r_0 parcouru par un courant i orienté selon l'axe (Oz) .

1. Calculer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(\vec{r})$ en supposant $\vec{j}$ uniforme dans le fil.
2. En exploitant les symétries du problème, déterminer la forme générale du champ magnétique en tout point de l'espace.
3. A partir du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.
4. Dans le cadre de l'expérience d'Ørsted, on a un fil parcouru par un courant d'environ 1 A. Calculer le champ magnétique créé à 1 cm du fil et le comparer au champ magnétique terrestre. Interpréter alors l'observation faite : la boussole bouge mais ne se place pas perpendiculairement au fil.

6 Champ créé par une piste conductrice ★

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par une nappe de courant volumique correspondante à la distribution de courants suivante :

- Pour $|z| < a$: $\vec{j} = j_0 \vec{e}_y$
- Pour $|z| > a$: $\vec{j} = \vec{0}$.

1. Faire un schéma de la situation.
2. A partir d'une analyse des symétries du problème, déterminer une forme générale du champ magnétique. Que peut-on dire de la parité des composantes du champ magnétique en fonction de z ?
3. Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

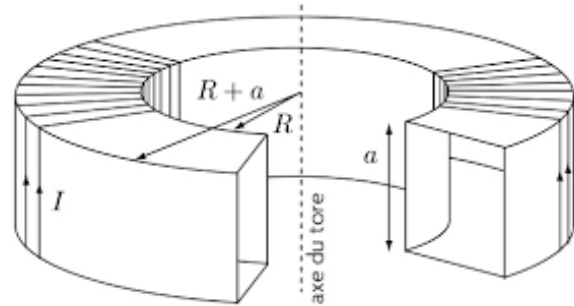
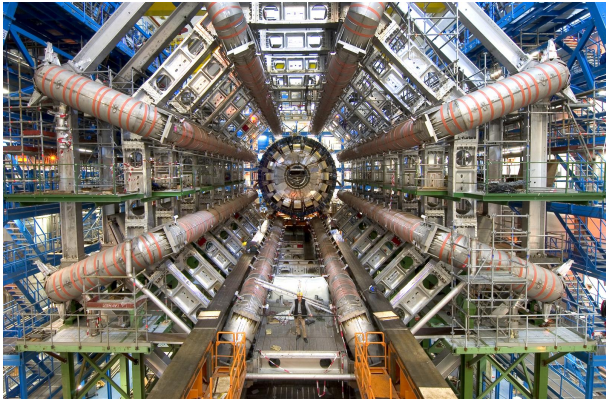


Figure 5: A gauche : accélérateur de particules ATLAS. Source : CERN. A droite : schéma s'une bobine torique. Source : Poly de TD de PC du lycée Joffre.

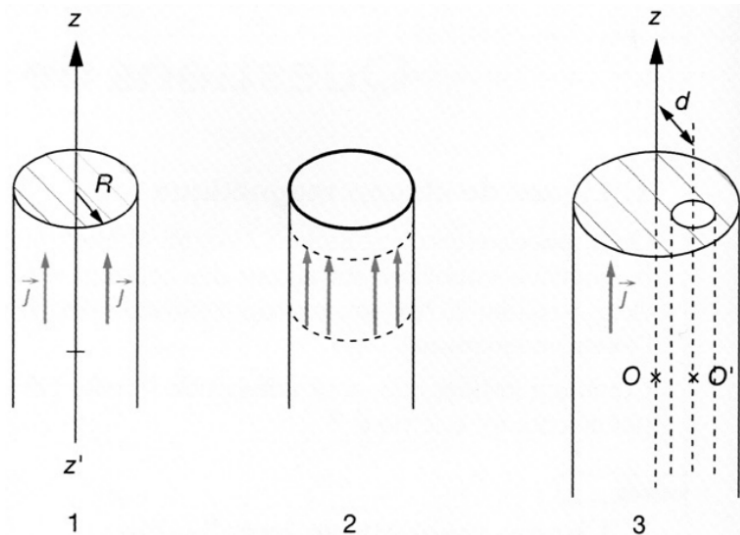
7 L'accélérateur de particules ATLAS ★★

On étudie l'accélérateur de particules ATLAS dont une photo est présentée. Des groupes de fils électriques (à l'intérieur des gros tubes disposés en anneau) font des boucles de courant. Une personne donne l'échelle.

1. Expliquer pourquoi on peut assimiler ce dispositif à un solénoïde toroïdal comme indiqué sur la figure de droite. Quelles sont les limites de cette analogie ?
2. On considère donc le solénoïde toroïdal de droite, parcouru par un courant i et contenant N spires. On note R le rayon de l'anneau central du solénoïde et a le côté de la section de ce tore.
 - (a) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.
 - (b) Que peut-on dire du résultat lorsque $R \gg a$?
3. En pratique on applique 20 000 A dans chacun des anneaux présents sur la figure. En s'appuyant sur la photographie, proposer une estimation du champ magnétique ainsi créé. Comment se compare-t-il au champ magnétique terrestre ?
4. Rappeler le type de mouvement d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique. Au vu des dimensions de l'instrument, vérifier que l'intensité de ce champ magnétique est suffisante pour que les électrons restent piégés dans l'anneau où le champ magnétique règne. (*Cette question appelle à une démarche de résolution de problème et nécessite une certaine prise d'initiative.*)

8 Modèles de fils ★★★

Un conducteur cylindrique de rayon R , de dimension infinie selon l'axe $(z'Oz)$, est parcouru par un courant d'intensité constante I .



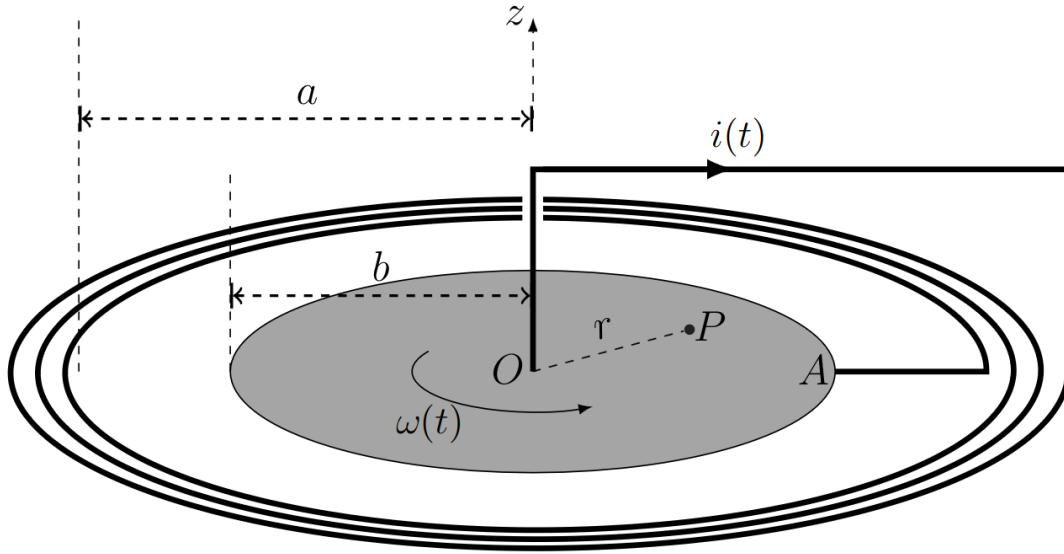
1. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme. Déterminer le champ magnétique en tout point.
2. Reprendre la question précédente, si la conduction n'est que superficielle (l'intensité circule uniformément selon Oz sur la seule surface du cylindre).
3. On reprend la modélisation mais cette fois se trouve dans le cylindre une cavité cylindrique de rayon r et d'axe $O'z$, avec O' à la distance d de Oz tel que $d+r < R$. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur de cette cavité est uniforme.

9 Modèle du champ magnétique terrestre ★★★

Le champ magnétique terrestre est produit par la convection qui se produit dans le noyau externe de la planète. Actuellement, le pôle Nord magnétique est relativement stable et dans la même direction que le pôle Nord géographique. Dans le passé, des inversions de la polarité du champ magnétique ont déjà eu lieu, et ont été enregistrées par certains sédiments sous-marins contenant des minéraux aimantés. C'est notamment l'identification de ces inversions qui a apporté un argument solide en faveur de la tectonique des plaques, puisque l'on observe des structures symétriques de part et d'autre de l'Atlantique, indiquant que les deux continents se sont progressivement éloignés l'un de l'autre.

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. figure suivante). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a , de centre O et d'axe (Oz) , qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon $b < a$, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega(t)$ et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant $i(t)$ que les spires ; il est aussi entraîné par la rotation de

la Terre avec un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R .



On note $\vec{B}(P)$ le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec $r = OP$; on supposera $N \gg 1$. Si $i(t) \neq 0$, on note :

$$M_{r_{\max}} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{r_{\max}} r \vec{e}_z \cdot \vec{B}(P) dr$$

En particulier, dans ce qui suit on pourra utiliser les intégrales M_a et M_b pour $r_{\max} = a$ ou b respectivement.

1. (a) Quelle est la direction de $\vec{B}(P)$?
 (b) Quels sont les signes de M_a et M_b ?
 (c) Comparer M_a et M_b .
 (d) Expliciter l'inductance propre L du circuit électrique en fonction notamment de l'une de ces intégrales.
2. On suppose d'abord que le courant $i(t)$ traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O .
 (a) Exprimer la force de Laplace $d\vec{F}_L$ s'exerçant sur un élément de longueur du segment AO .
 (b) Exprimer alors le moment $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{e}_z$ des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de $i(t)$ et de M_b .

Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O , on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

- On fait l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique, c'est-à-dire que la puissance électrique générée par induction est intégralement dissipée par les forces de Laplace. Relier la force électromotrice $e(t)$ induite par les mouvements de rotation du disque à $M_b, i(t)$ et $\omega(t)$.
- Etablir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t)(\alpha\omega(t) - \beta) \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives α, β, γ et δ en fonction de R, L, M_b, I et Γ_0 .

Soit i_0 un courant constant arbitraire, on considère la fonction :

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b} \omega$$

- Calculer $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut on interpréter la fonction $\mathcal{H}$? Déterminer les points du plan (i, ω) pour lesquels le gradient de $\mathcal{H}$ s'annule. Comment s'interprètent ces points ?
- Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure suivante. Expliquer alors le phénomène d'inversion magnétique.

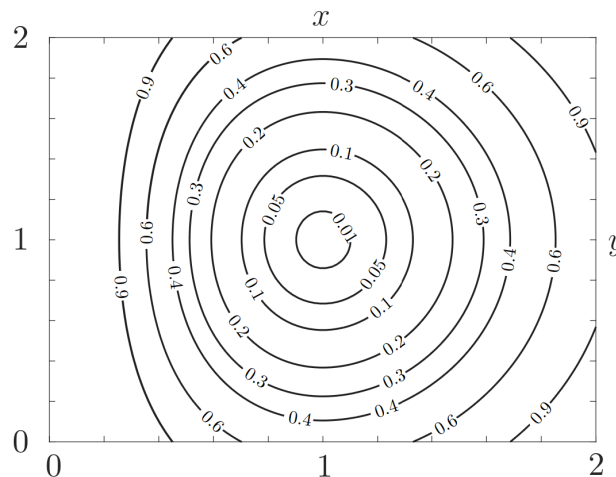


Figure 6: Courbes de valeurs constante définies par la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \ln(x)y = c$. Les valeurs de c sont indiquées sur les courbes.

III - Forces de Laplace (révisions de MPSI)

10 Balance de Cotton ★

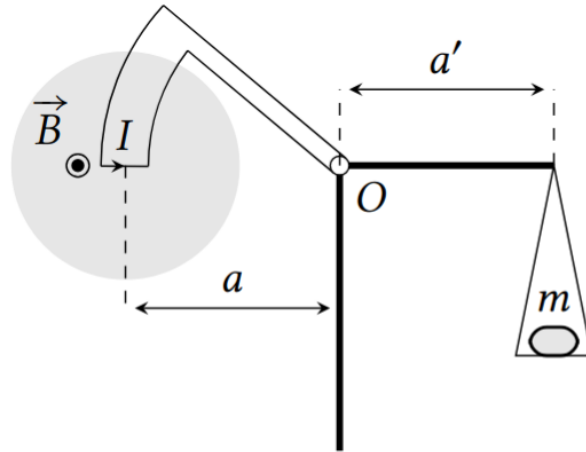


Figure 7: Schéma de la balance de Cotton. Source : poly de TD de Etienne Thibierge.

La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XX^e siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O .

La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O , reliés par une portion horizontale de longueur L . La partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O . À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m , la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1. Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
2. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.
3. En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B , à exprimer en fonction de a, a', L, I et de l'intensité de la pesanteur g .

4. La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0.05$ g, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25$ cm, $L = 5$ cm et $I = 5$ A. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

11 Force attractive entre deux fils ♥ ★★

Si l'on fait passer un courant suffisamment fort entre deux fils parallèles, on constate qu'ils vont avoir tendance à se coller l'un à l'autre. Dans cet exercice, nous allons tenter d'expliquer ce phénomène.

- On considère deux fils infinis parallèles à l'axe (Oz), placés respectivement en $(x = 0, y = 0)$ et $(x = H, y = 0)$ et parcourus par un même courant i selon $+\vec{e}_z$.
 - En exploitant les symétries du problème, déterminer la forme générale du champ magnétique.
 - Est-il possible d'appliquer le théorème d'Ampère pour déterminer directement $\vec{B}$? Expliquer pourquoi.
 - Quel principe peut-on utiliser pour calculer le champ $\vec{B}$?
- On considère un unique fil infini parallèle à l'axe (Oz) et placé en $(x = 0, y = 0)$. Déterminer le champ magnétique créé par ce fil en tout point de l'espace.
- En déduire la force par unité de longueur subie par un second fil parallèle parcouru par la même intensité, mais placé en $(x = H, y = 0)$.
 - Cette force est-elle attractive ou répulsive ?
 - Comparer sa norme à d'autres forces usuelles subies par les fils. A partir de quelle intensité i cette force devient-elle significative ?

III - Dipôle magnétique

12 Champ magnétique terrestre ★★

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle magnétique permanent de moment $\vec{M}$ situé au centre de la Terre et dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud. On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6380$ km. Au pôle Nord, on mesure une intensité du champ magnétique de $B_0 = 6 \times 10^{-5}$ T.

- Tracer l'allure des lignes de champ magnétique autour de la Terre. En se plaçant dans le repère sphérique de centre O et d'axe (Oz) orienté vers le pôle Sud, montrer

que le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta \quad (5)$$

En pratique, il est possible de montrer que le champ magnétique créé par un dipôle $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ est donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (6)$$

2. Quelle est la valeur de $\mathcal{M}$?
3. Quelle est l'intensité du champ magnétique à Pointe-à-Pitre ? (Latitude de 16 degrés Nord). Quelle est l'inclinaison du champ par rapport à l'horizontale ?
4. Vous pouvez vérifier votre résultat en installant sur votre téléphone l'application "Physics Toolbox" qui vous permet d'accéder au magnétomètre de votre smartphone.

13 Optimisation d'une boussole ♥ ★

Une boussole est constituée d'un aimant permanent de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ fixé à un axe par une liaison pivot parfaite. En supposant que l'aiguille a une longueur L et une masse m , son moment d'inertie par rapport à l'axe de la liaison est donné par $J = \frac{1}{12}mL^2$. La boussole est placée dans le champ magnétique terrestre, supposé horizontal (c'est une très bonne approximation dans les tropiques), et d'intensité 3×10^{-5} T.

1. Proposer des valeurs réalistes pour L et m .
2. Une personne sort la boussole de sa poche et la met à plat.
 - (a) Quel va être le mouvement de l'aiguille ?
 - (b) On mesure une période de 1 s. En déduire le moment magnétique de l'aiguille de la boussole.
 - (c) L'aiguille converge-t-elle vers une position d'équilibre dans ce modèle ? Va-t-il être possible de lire précisément la direction du Nord ?
3. Pour remédier à ce problème, on choisit un modèle de boussole dans lequel l'aiguille est placée dans un boîtier rempli d'un fluide visqueux. L'action du fluide peut être modélisée par un couple de la forme $\vec{\Gamma} = -\alpha \dot{\theta} \vec{e}_z$.
 - (a) Expliquer qualitativement le rôle du fluide visqueux et pourquoi il va faciliter la lecture de la direction du Nord.

- (b) Etablir l'équation différentielle du mouvement et donner la forme générale des solutions lorsqu'on lâche l'aiguille d'un angle initial θ_0 sans vitesse initiale. On prendra soin de distinguer les différents régimes à partir d'un facteur de qualité que l'on définira.
- (c) Va-t-on atteindre l'équilibre rapidement si $\alpha \rightarrow 0$? Et si $\alpha \rightarrow \infty$? Proposer une valeur optimale de α permettant d'atteindre l'équilibre le plus rapidement possible.
- (d) Des considérations de mécanique des fluides (hors programme en MP) permettent de montrer que $\alpha \sim \eta L^3$ où η est la viscosité du fluide. Proposer un fluide approprié pour remplir le boîtier de la boussole.

Données d'ordres de grandeur de viscosité :

Fluide	Vide	Air	Eau	Huile	Miel
Viscosité [Pa.s]	0	2×10^{-5}	10^{-3}	5×10^{-2}	1

14 Facteur gyromagnétique de l'électron ♥ ★★

On considère un électron autour d'un atome, et on souhaiterait caractériser son rapport gyromagnétique, c'est-à-dire le rapport entre son moment cinétique et son moment magnétique. Pour cela, on va étudier l'atome d'hydrogène.

1. On s'intéresse dans un premier temps au calcul du moment cinétique de l'électron.
 - (a) Rappeler la composition de l'atome d'hydrogène. A quelles forces est soumis l'électron ?
 - (b) Montrer que le moment cinétique de l'électron $\vec{L}_O$ est conservé et que le mouvement est plan. On notera σ sa norme.
 - (c) On suppose que l'électron décrit une orbite circulaire autour du noyau. Estimer σ en fonction de la masse de l'électron m_e , du rayon r de la trajectoire et de constantes fondamentales.
2. On s'intéresse maintenant au moment magnétique lié au mouvement de l'électron.
 - (a) Expliquer pourquoi le mouvement de l'électron autour de l'atome peut être assimilé à une boucle de courant.
 - (b) Déterminer le courant i parcourant cette boucle en fonction de σ, m_e, r et des constantes fondamentales.

- (c) En déduire le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé à cette boucle de courant, en fonction des mêmes variables.
3. On définit le rapport gyromagnétique comme le rapport entre le moment magnétique et le moment cinétique de l'électron :

$$\gamma = \frac{\mathcal{M}}{\sigma} \quad (7)$$

- (a) Déterminer sa valeur dans le cadre de notre modèle classique de l'électron.
- (b) En pratique, on mesure $\gamma = 1.7608596278 \pm 0.0000000005 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$. Cette valeur est-elle compatible avec le résultat théorique que nous avons obtenu ?

Ce résultat est dû à la mécanique quantique : l'électron possède un moment magnétique intrinsèque appelé spin qui ne peut pas être décrit dans le cadre du modèle classique de l'atome.