

DM3 - Correction

I - Modèle de Thomson

1 - On a une sphère uniformément chargée en volume de rayon a et de densité volumique de charge: $\rho = \frac{e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$.

Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques. Tout plan contenant OM est plan de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}(M)$ est dans tous ces plans et:

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

De plus le problème est invariant par rotation autour de O donc E ne dépend pas de θ et φ : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.

Soit S la sphère de centre O et de rayon $r < a$, elle contient une charge $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = e \cdot \left(\frac{r}{a}\right)^3$.

Par le théorème de Gauss:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{a}\right)^3$$

$$\text{D'où: } \vec{E}_+(N) = \frac{er\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 a^3}$$

$$\boxed{\vec{E}_+(N) = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r}$$

2. L'électron est soumis, dans R_T galiléen, à la seule force électrostatique $\vec{F}_{el} = -e\vec{E}_+(N)$. On lui applique le PFD:

$$m_e \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{r}$$

$$\text{Soit: } \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \vec{r} = \vec{0} \quad \omega_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e a^3}}$$

Le mouvement correspond à un oscillateur harmonique de

$$\text{fréquence } \boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{e}{4\pi a^{3/2} (m_e \epsilon_0)^{1/2}}}$$

Ceci correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{4c}{e} (\pi a)^{3/2} (m_e \epsilon_0)^{1/2} \approx 1 \text{ nm}$.

Ceci correspond au domaine des ultraviolets.

3. On a maintenant $\vec{F}_{el} = -e(\vec{E}_0 + \vec{E}_+(N))$

À l'équilibre $\vec{F}_{el} = \vec{0}$ donc :

$$\vec{E}_+(N) = -\vec{E}_0 \Leftrightarrow \frac{e\vec{x}}{4\pi\epsilon_0 a^3} = -\vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}_{eq} = -\frac{4\pi\epsilon_0 a^3}{e} \vec{E}_0}$$

Le moment dipolaire de l'atome est donc :

$$\vec{p} = e \cdot N\vec{P} = -e\vec{x}_{eq} \text{ soit } \boxed{\vec{p} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \vec{E}_0}$$

On en déduit $\boxed{\alpha = 4\pi a^3 = 3V}$ où V est le volume du nuage positif.

4. Le néon est plus gros donc il a une polarisabilité plus grande. De même, comme l'iode est plus gros (5^e ligne) il sera plus lumineux et aura une polarisabilité plus grande.

II - Modèle de Rutherford

5. Considérons une particule α et un électron interagissant dans un référentiel galiléen. Si $\vec{F}_{\alpha \rightarrow e}$ est la force de la particule sur l'électron :

$$\vec{a}_e = \frac{\vec{F}_{\alpha \rightarrow e}}{m_e} \text{ et } \vec{a}_\alpha = -\frac{\vec{F}_{\alpha \rightarrow e}}{m_\alpha}$$

Or $m_e \ll m_\alpha$ donc l'électron va accélérer beaucoup plus vite et être dévié de la trajectoire de la particule qui elle n'aura pas eu le temps de bouger (trop d'inertie).

6. Ici $m_{Au} = 194 \times m_{nucléon}$ $m_\alpha = 4 \times m_{nucléon}$

Donc $m_\alpha \ll m_{Au}$. On peut considérer, comme en Q5 que cette fois-ci c'est l'atome cible B qui est fixe dans R_0 galiléen et la particule α est déviée par la force électrostatique

exercée par le noyau B ($q_B = +Ze = 79e$) sur la particule α ($q_A = +2e$).

7. On a vu que $\vec{E} = \frac{q_B \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ si $r \leq a$

Et si $r \geq a$ $\|\vec{E}\|$ décroît avec r (par conservation du flux de $\vec{E}$ dans les régions vides de charges).

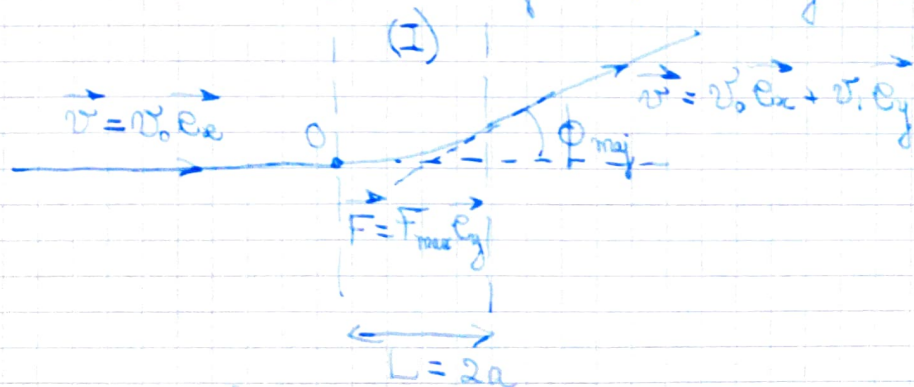
Donc $\|\vec{E}\|$ est maximal en $r = a$, alors:

$$\|\vec{F}\|_{\max} = q_A \|\vec{E}\| = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 a^2} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 a^2}$$

car $q_B = Ze$ et $q_A = 2e$.

On trouve $\boxed{\|\vec{F}_{\max}\| \simeq 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ N}}$

8. On considère un cas où la particule subit $\vec{F}_{\max}$ pendant toute la longueur de la traversée de l'atome qu'elle traverse en plein centre : $L = 2a$. On suppose par ailleurs $\|\vec{F}_{\max}\|$ normale à la trajectoire, ce n'est pas vrai en pratique mais cela va augmenter l'angle de déviation et donc nous fournis une majoration de cet angle:



On applique le PFD à la particule dans la région de largeur $2a$:

$$m\alpha \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = F_{\max} \vec{e}_y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 0 & \Rightarrow x = v_0 \cdot t \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{F_{\max}}{m\alpha} & \Rightarrow v_y = \frac{F_{\max}}{m\alpha} \cdot t \end{cases}$$

D'où $v_y = \frac{F_{\max}}{m\alpha} \cdot \frac{x}{v_0}$ et en sortie de la région (I):

$$v_1 = \frac{F_{\max}}{m\alpha} \cdot \frac{2a}{v_0}$$

On a donc $\phi_{\max} = \arctan\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = \boxed{\arctan\left(\frac{2a F_{\max}}{m\alpha v_0^2}\right)}$

On trouve, avec $M_\alpha \approx 4 M_{\text{nucleon}}$: $\Phi_{\text{maj}} \approx 0,048^\circ$.

9. Comme on a 400 plans atomiques on considère non plus $L = 2a$ mais $L = 800a$, on trouve: $\Phi_{\text{maj}} = 89,9^\circ$

Autrement dit, comme on a fait une majoration très grossière Φ est forcément nettement en dessous de Φ_{maj} , donc on ne peut pas avoir de déviation supérieure à 90° .
Le modèle de Thomson est donc infirmé.

10. On parle de modèle planétaire car les électrons orbitent autour du noyau sous l'effet d'une force centrale newtonienne comme les planètes orbitent autour du soleil. On a:

$$M_{\text{Soleil}} \gg +Ze$$

$$M_{\text{planète}} \ll -e$$

$$G \leftrightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\vec{F}_g \leftrightarrow \vec{F}_e$$

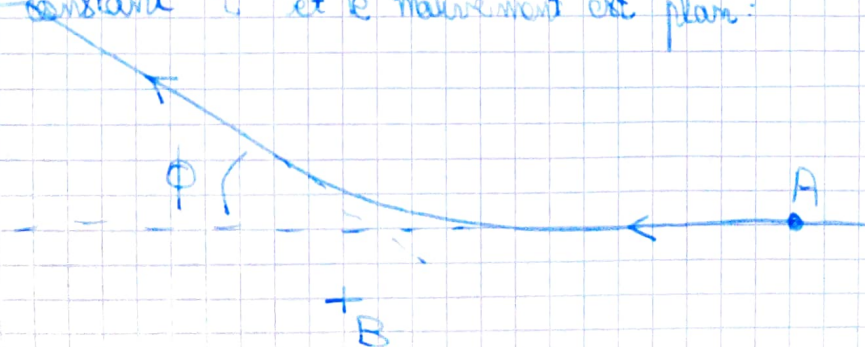
$$11. \text{ On a } E_p = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{K}{r}$$

$$\text{où } K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0}$$

12. On applique le théorème du moment cinétique à la particule α soumise à la seule force électrique, par rapport au point B fixe dans R , galiléen. Comme cette force est centrale:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \text{ donc } \vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \text{ est un vecteur constant}$$

Donc $\vec{OM}$ est dans le plan passant par O et perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}$ et le mouvement est plan.



13. On a : $\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{r} + m_a K \frac{d\vec{e}_r}{dt}$

Or $m_a \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_a = \frac{K}{r^2} \vec{e}_r$ et $\vec{L} = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Et $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

D'où :
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{K}{r^2} \vec{e}_r \wedge m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta + m_a K \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= -m \cdot \frac{K}{r^2} \cdot r^2 \dot{\theta} \vec{e}_\theta + m K \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc $\vec{L}$ est une constante du mouvement.

14. Initialement :
$$\begin{cases} \vec{v} = -v_0 \vec{e}_x \\ \vec{L} = +m v_0 b \vec{e}_z \\ r \rightarrow \infty \text{ et } \vec{e}_r = \vec{e}_x \end{cases}$$

D'où $\vec{L}(t \rightarrow -\infty) = -m v_0 \vec{e}_x \wedge m v_0 b \vec{e}_z + m K \vec{e}_x$
 $= (m v_0)^2 b \vec{e}_y + m K \vec{e}_x$

Et en $t \rightarrow +\infty$:
$$\begin{cases} \vec{v} = v_0 (-\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y) \\ \vec{L} \text{ est conservé (cf Q12)} \\ \vec{e}_r = -\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y \end{cases}$$

D'où $\vec{L}(t \rightarrow \infty) = m v_0 [-\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y] \wedge m v_0 b \vec{e}_z$
 $+ m K (-\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y)$
 $= (m v_0)^2 b [\cos \phi \vec{e}_y + \sin \phi \vec{e}_x] + m K [-\cos \phi \vec{e}_x + \sin \phi \vec{e}_y]$

Ainsi :
$$\begin{cases} (m v_0)^2 b = (m v_0)^2 b \cos \phi + m K \sin \phi \\ m K = (m v_0)^2 b \sin \phi - m K \cos \phi \end{cases}$$

On en déduit :
$$\begin{cases} b = b \cos \phi + \beta \sin \phi \\ \beta = b \sin \phi - \beta \cos \phi \end{cases} \quad \text{avec les notations de l'énoncé}$$

Posons $t = \tan \frac{\phi}{2}$, alors $\cos \phi = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin \phi = \frac{2t}{1+t^2}$

D'où :

$$\begin{cases} b(1+t^2) = b(1-t^2) + 2\beta t & (1) \\ \beta(1+t^2) = 2bt + \beta(t^2-1) & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \beta = 2bt - \beta \Leftrightarrow \beta = bt \Leftrightarrow b = \frac{\beta}{t}.$$

D'où :

$$b = \frac{\beta}{\tan \frac{\phi}{2}}$$

15. On a donc $\phi = 2 \arctan\left(\frac{\beta}{b}\right)$

Ainsi comme on peut avoir $b \rightarrow 0$, on peut aussi avoir $|\frac{\beta}{b}| \rightarrow \infty$ et donc $\frac{\phi}{2} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ soit $\phi \rightarrow \pm \pi$

Il est donc possible d'avoir de la rétrodiffusion : ce modèle est compatible avec l'expérience.