

Magnétostatique

Chapitre 4

Avec solutions

I - Révisions : Mouvement d'une particule chargée

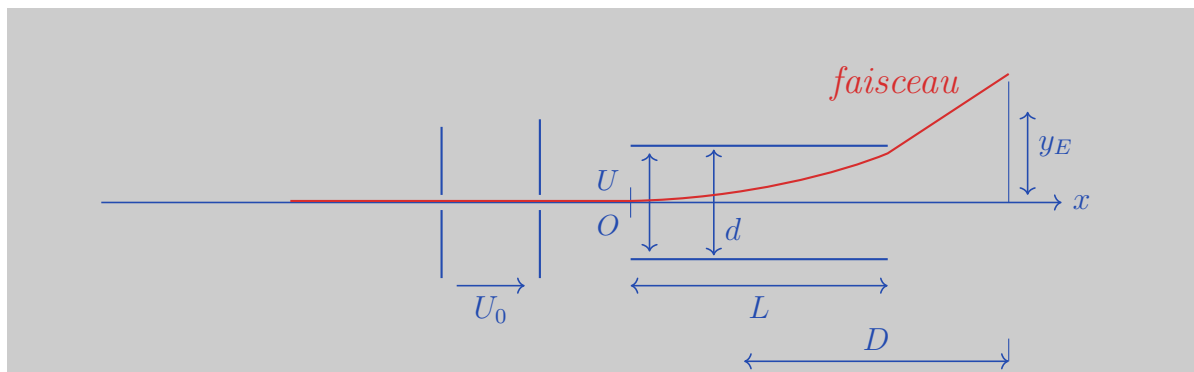
1 Déviation d'un faisceau d'électrons dans un oscilloscope ♥ ★

Dans un oscilloscope analogique, un faisceau d'électrons émis avec une vitesse quasi nulle, est accéléré par une tension U_0 appliquée selon l'axe (Ox) . Il atteint alors une vitesse $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ et se situe sur l'axe (Ox) .

Le faisceau pénètre alors dans un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_z$ supposé uniforme entre deux plaques métalliques parallèles au plan (xOz) , de longueur L et séparées par la distance d . Le champ est créé par une tension U appliquée entre ces plaques.

Une fois que le faisceau est sortie de cette zone, il finit par toucher l'écran de l'oscilloscope, parallèle au plan (yOz) et situé à une distance D du milieu des plaques.

1. Faire un schéma de la situation dans le plan (xOy) en faisant attention à l'orientation du faisceau et des différentes plaques.



2. Calculer, en fonction de U_0 , la norme de la vitesse v_0 initiale du faisceau d'électrons. Faire l'application numérique pour $U_0 = 1 \text{ kV}$. On rappelle la masse de l'électron : $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

On a une énergie potentielle électrique $E_p = qV = -eV$. On applique le théorème de l'énergie mécanique à l'électron dans le référentiel terrestre supposé galiléen, en négligeant son poids : il n'est alors soumis qu'à la force électrique conservative :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - eU_0 = 0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

Une application numérique donne $v_0 = 1.9 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. Déterminer l'équation de la trajectoire d'un électron entre les plaques. En déduire l'ordonnée y_0 du faisceau lorsqu'il sort de la région soumise au champ électrique $\vec{E}$.

Entre les plaques, l'électron est soumis à la force électrique $\vec{F} = q\vec{E} = +e\frac{U}{d}\vec{e}_y$; on néglige son poids. On lui applique le PFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et on projette le résultat selon x et y :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = \frac{eU}{d} \end{cases}$$

On en déduit que $\dot{x} = v_0 \Leftrightarrow dx = v_0 dt$. En choisissant de placer l'origine O au niveau du bord gauche des plaques, on a alors $x = v_0 t$ et donc :

$$y(t) = \frac{eUt^2}{2dm} \Rightarrow \boxed{y = \frac{eUv_0^2 x^2}{2dm}}$$

En sortie de la plaque on a alors $y_0 = y(x = L) = \frac{eUv_0^2 L^2}{2dm}$.

4. On note y_E l'ordonnée de l'impact du faisceau sur l'écran de l'oscilloscope. Déterminer son expression en fonction de U_0, U, D et des paramètres géométriques du problème.

On a $\frac{dy}{dx}(x = L) = \frac{eUv_0^2 L}{dm}$. Or, comme l'électron n'est plus soumis à aucune force, il a un mouvement rectiligne uniforme. Ainsi la trajectoire a une équation affine (c'est une droite) :

$$y_E = y_0 + \frac{dy}{dx}(x = L) \left(D - \frac{L}{2} \right)$$

En réinjectant les expressions précédentes on trouve $y_E = \frac{eUv_0^2 LD}{dm}$ puis, en réutilisant le résultat de Q1 :

$$\boxed{y_E = \frac{ULD}{U_0 d}}$$

y_E est proportionnel à U , ainsi l'oscilloscope permet de visualiser la tension U directement à l'écran.

2 Principe d'un spectromètre de masse ★★

Dans le spectromètre de Dempster, des ions sortent de la chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable.

Ils sont accélérés par une tension U , appliquée entre les deux plaques P et P' : $V_{P'} - V_P = U < 0$. Les ions traversent ensuite une zone de l'espace (appelée zone de déviation) où règne un champ magnétique transversal uniforme : $\vec{B} = B\vec{u}_z$. On a $|U| = 10 \text{ kV}$ et $B = 0.10 \text{ T}$.

Dans tout l'exercice, on considère deux types d'ions, de même charge q et de masses respectives m_1 et m_2 , arrivant dans la zone de déviation avec les vitesses respectives $\vec{v}_1 = v_1\vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = v_2\vec{u}_x$.

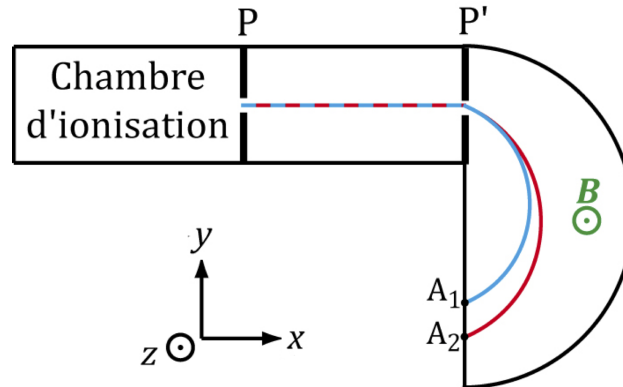


Figure 1: Principe de fonctionnement du spectromètre de masse.

1. Quel est le signe de q pour que les ions soient effectivement accélérés entre P et P' ?

Il faut que les ions soient attirés par les potentiels faibles, ainsi $q > 0$ (ce sont des cations).

2. Exprimer les vitesses v_1 et v_2 .

On applique le théorème de l'énergie mécanique à l'ion i ($i = 1$ ou 2) dans le référentiel terrestre galiléen, entre les points P et P' . L'ion est soumis à la seule force électrique conservative (son poids est négligeable). Alors :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}mv_i^2 + q(V(P') - V(P)) = \frac{1}{2}mv_i^2 - q|U|$$

On en déduit : $\boxed{v_i = \sqrt{\frac{2q|U|}{m}}}$.

3. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires des ions dans le champ magnétique.

Dans le champ magnétique, les ions sont soumis à la seule force magnétique qui est donnée par $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. On a ainsi, par le PFD appliqué à l'ion dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m_i \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

On projette :

$$\begin{cases} m_i \ddot{x} = qB\dot{y} \\ m_i \ddot{y} = -qB\dot{x} \end{cases}$$

On note $\omega_i = \frac{qB}{m_i}$ la pulsation cyclotron. Alors $\ddot{x} = \omega_i \dot{y}$ et $\ddot{y} = -\omega_i \dot{x}$. Ou encore, en notant $\underline{z} = x + jy$:

$$\ddot{\underline{z}} = -j\omega_i \dot{\underline{z}}$$

La solution s'écrit $\underline{z} = \underline{K}e^{-j\omega_i t}$, et on obtient la position :

$$\underline{z} = \underline{z}_0 + j\frac{\underline{K}}{\omega_i}e^{-j\omega_i t}$$

Or, en remarquant que $|\underline{K}| = \|\vec{v}\| = v_i$, on en déduit que le rayon du cercle de la trajectoire est donné par :

$$R = \frac{\underline{K}}{\omega_i} = \frac{v_i}{\omega_i}$$

En réinjectant les expressions de v_i et ω_i obtenues précédemment, on trouve

$$R_i = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_i|U|}{e}}$$

4. En déduire la distance $d = A_1A_2$ entre les impacts des deux types d'ions.

Les ions effectuant un demi-tour, ils arrivent à une distance $2R_i$ de leur point d'entrée dans la zone de champ magnétique. Ainsi :

$$d = 2|R_1 - R_2| = \frac{2}{B} \sqrt{2|U|} e(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

5. Donner la position du lithium ($Z = 3$) dans la classification périodique. À quelle famille d'éléments chimiques appartient-il ? Quel est l'ion stable formé par le lithium ?

Il se trouve dans la 1e colonne et la 2e période, c'est un alcalin. Il forme l'ion Li^+ car il perd son électron de valence pour satisfaire la règle du duet.

6. Calculer numériquement d si on utilise ${}^6\text{Li}^+$ et ${}^7\text{Li}^+$ de masses molaires respectives $6.0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $7.0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.

Les masses des ions sont $m_i = \frac{M_i}{\mathcal{N}_A}$ où M_i est la masse molaire. On en déduit :

$$d = \frac{2}{B_0} \sqrt{2|U|e\mathcal{N}_A} (\sqrt{M_2} - \sqrt{M_1}) = 5.6 \text{ cm}$$

3 Le cyclotron ♥ ★★

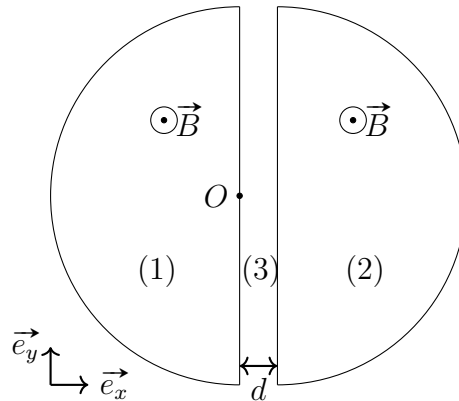


Figure 2: Schéma du cyclotron.

Un cyclotron est formé de deux enceintes semi-cylindriques D_1 (région (1)) et D_2 (région (2)), dans lesquelles règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Entre ces deux enceintes, une bande étroite de largeur d (région (3)) est plongée dans un champ électrique alternatif de module E constant, mais qui change de sens (orienté selon $\pm\vec{e}_x$).

On introduit au point O une particule de charge $q > 0$ et de masse m , sans vitesse initiale. Le champ électrique est alors orienté selon $+\vec{e}_x$.

1. Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (3) avant qu'elle ne pénètre dans la région (2) ? Calculer la vitesse v_1 de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (2).

C'est un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Par le théorème de l'énergie cinétique appliqué à la particule dans le référentiel terrestre galiléen on a :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = W(\vec{F}_{\text{elec}}) = q\vec{E} \cdot d\vec{e}_x = qEd$$

D'où $\boxed{v_1 = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}}$.

2. (a) Quelle est la nature du mouvement de la particule dans la région (2) ? Déterminer la trajectoire parcourue ainsi que ses caractéristiques.

La particule est alors soumise à la seule force magnétique $\vec{F}_{\text{mag}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ qui est perpendiculaire à $\vec{v}$ et donc ne travaille pas. Ainsi, son énergie cinétique est conservée et le mouvement est uniforme : $\|\vec{v}\| = v_1 = \text{cste}$. De plus, en projetant sur x et y le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule dans le référentiel terrestre galiléen on trouve :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron. Ou encore, en notant $\underline{z} = x + jy$:

$$\ddot{\underline{z}} = -j\omega_c \dot{\underline{z}}$$

La solution s'écrit $\dot{\underline{z}} = \underline{K}e^{-j\omega_c t}$, et on obtient la position :

$$\underline{z} = \underline{z}_0 + j\frac{\underline{K}}{\omega_c}e^{-j\omega_c t}$$

$\underline{z}$ correspond à l'abscisse du point M et décrit un cercle dans le plan complexe, ainsi on a une trajectoire circulaire uniforme.

- (b) Quelle est la vitesse de la particule lorsqu'elle sort de la région (2) ?

On a vu que le mouvement est uniforme, la particule a donc toujours une vitesse v_1 .

3. Pendant que la particule était dans la région (2), le sens du champ électrique a changé. Calculer la vitesse de la particule lorsqu'elle pénètre dans la région (1).

Le théorème de l'énergie cinétique donne désormais $\frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = qEd$. En combinant avec l'expression de v_1 , on obtient :

$$v_2 = 2\sqrt{\frac{qEd}{m}}$$

4. La particule est à nouveau déviée dans la zone (1).

- (a) Quelle est la nature de sa trajectoire ?

C'est toujours un mouvement circulaire uniforme.

- (b) Exprimer la durée de cette trajectoire. Montrer qu'elle est la même à chaque passage dans les zones (1) et (2) et dépend du rapport q/m .

La particule parcourt un demi-tour en $\tau = \frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{qB}$. Cette durée ne dépend que du champ magnétique, qui ne varie pas dans l'espace ni au cours du temps, elle est donc toujours la même.

- (c) En déduire la fréquence de la tension alternative nécessaire pour que le champ électrique accélère la particule à chaque passage dans la région (3).

Il faut que la période T vérifie $\frac{T}{2} = \tau = \frac{\pi m}{qB}$, or $T = \frac{1}{f}$ donc la fréquence à choisir est :

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

5. Après n passages dans la région (3) quelle est la vitesse de la particule ? Expliquer l'intérêt de ce dispositif par rapport à une accélération simple réalisée uniquement avec un champ électrique.

On montre facilement, toujours avec le théorème de l'énergie cinétique, que $\frac{1}{2}m(v_{n+1}^2 - v_n^2) = qEd$. On somme toutes ces équations de 0 à $n - 1$ (somme télescopique) et on obtient $\frac{1}{2}mv_n^2 = nqEd$, ou encore :

$$v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}$$

Ce dispositif avec champ magnétique permet d'augmenter le nombre de passages et donc d'accélérer fortement la particule.

6. On considère un cyclotron dont le diamètre est de 52 cm. L'amplitude de la tension alternative appliquée entre les régions (1) et (2) est de 200 kV et sa fréquence de 12 MHz. Calculer le nombre de tours effectués par les particules pour atteindre leur énergie cinétique maximale, et la valeur de cette énergie en MeV.

Le rayon ne pourra pas excéder $D/2$ avec $D = 52$ cm, ainsi on aura ici $R = \frac{v_n}{\omega_c} \leq \frac{D}{2}$. La vitesse maximale pouvant être atteinte est donc $v_n^{\max} = \frac{D\omega_c}{2} = \pi Df$. On a donc,

pour cette vitesse limite :

$$nqEd = \frac{1}{2}m(\pi Df)^2$$

Pour des protons de masse m_p on en déduit :

$$n = \frac{m_p}{2eEd}(\pi Df)^2 \approx 10 \text{ tours}$$

II-Champ magnétique

4 Lignes de champ ♥ ★

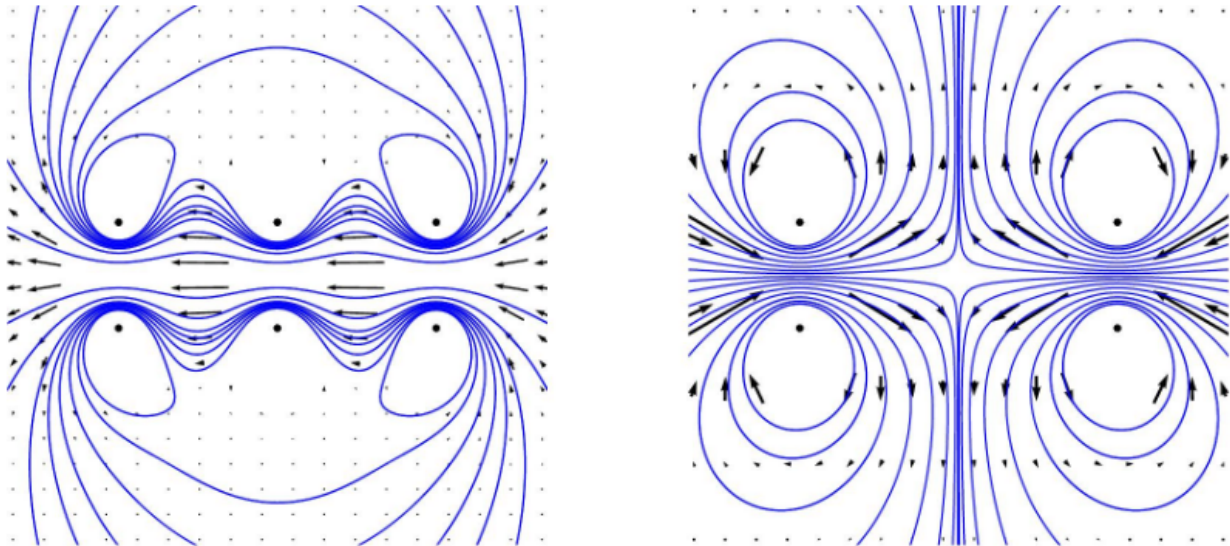


Figure 3: Cartes de lignes de champ

1. On considère la carte de lignes de champ donnée ci-dessus. Indiquer la position des sources, le sens du courant, les zones de champ fort et faible, et le cas échéant s'il existe une zone de l'espace où le champ magnétique est nul.

Le sens du courant et les informations demandées sont représentés ci-dessous :

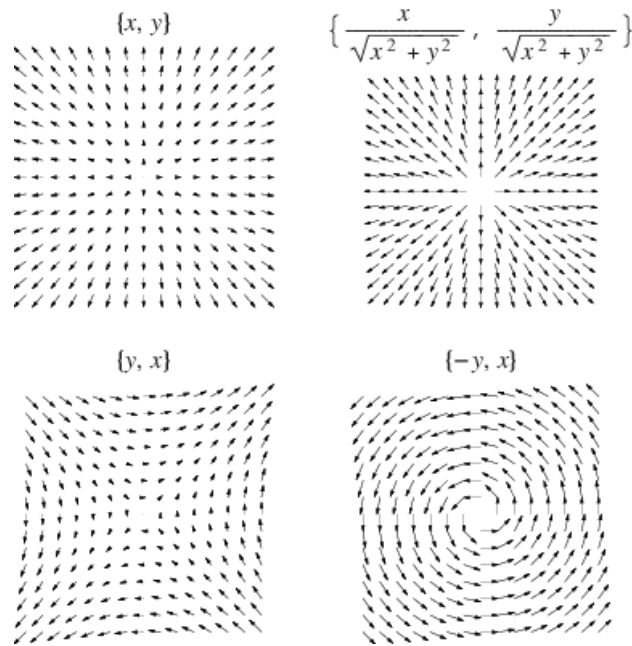
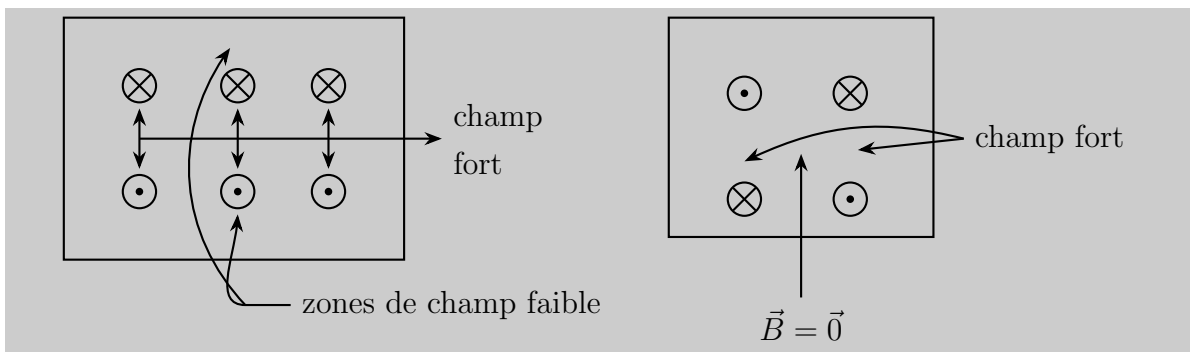


Figure 4: Quelques champs vectoriels dans l'espace $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, dont les coordonnées (a_x, a_y) sont données en titre.



2. Les quatre figures ci-dessous représentent quelques cartes de champ bidimensionnels de la forme :

$$\vec{a}(x, y) = a_x(x, y)\vec{e}_x + a_y(x, y)\vec{e}_y \quad (1)$$

On suppose que ces champs ont une composante nulle selon $\vec{e}_z$ et sont invariants par translation selon $\vec{e}_z$. Préciser dans chaque cas s'il peut s'agir d'un champ magnétostatique. Si non, expliquer pourquoi et si oui, dire si des courants sont présents dans la zone représentée.

Le champ magnétostatique vérifie la conservation du flux : son flux à travers une surface fermée est nul. En choisissant un cylindre d'axe Oz , on voit que cela ne fonctionne pas pour les deux figures du haut.

En bas à gauche : on n'a pas de contour tel que $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \neq 0$. Donc il n'existe aucune

source de champ magnétique à l'intérieur de l'image.

En bas à droite : il y a un fil parallèle à Oz au centre de l'image.

5 Champ magnétique créé par un fil (Exercice explicitement au programme) ♥ ★

On considère un fil rectiligne de rayon r_0 parcouru par un courant i orienté selon l'axe (Oz).

1. Calculer le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(\vec{r})$ en supposant $\vec{j}$ uniforme dans le fil.

On suppose la densité volumique de courant uniforme, or si on note S une section droite du fil :

$$i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \iint_S d\vec{S} = \vec{j} \cdot \pi r_0^2 \vec{e}_z$$

On en déduit que :

$$\boxed{\vec{j} = \frac{i}{\pi r_0^2} \vec{e}_z}$$

2. En exploitant les symétries du problème, déterminer la forme générale du champ magnétique en tout point de l'espace.

Soit M un point quelconque de l'espace, on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz . Le plan passant par M et contenant Oz est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}$. Ainsi, $\vec{B}$ est normal à ce plan et est donc orienté selon $\vec{e}_\theta$. De plus, la distribution de courants est invariante par translation selon $\vec{e}_z$ et par rotation d'angle θ , ainsi $\boxed{\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta}$.

3. A partir du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.

On considère Γ le cercle de rayon r , passant par M , centré sur l'axe Oz et orienté selon $+\vec{e}_\theta$. Alors :

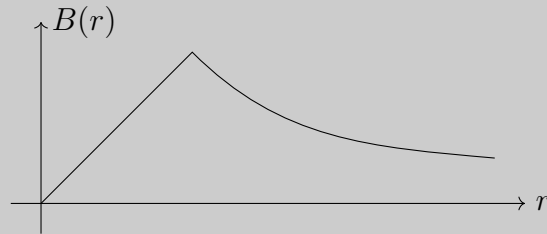
$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enlace}}$$

Or :

$$I_{\text{enlace}} = \begin{cases} i & \text{si } r > r_0 \\ \pi r^2 \|\vec{j}\| = i \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 & \text{si } r < r_0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta & \text{si } r > r_0 \\ \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2} \vec{e}_\theta & \text{si } r < r_0 \end{cases}$$



4. Dans le cadre de l'expérience d'Ørsted, on a un fil parcouru par un courant d'environ 1 A. Calculer le champ magnétique créé à 1 cm du fil et le comparer au champ magnétique terrestre. Interpréter alors l'observation faite : la boussole bouge mais ne se place pas perpendiculairement au fil.

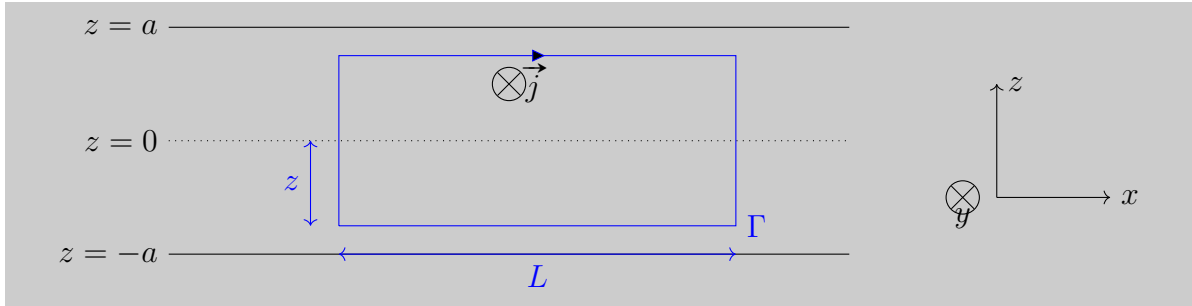
On a dans cette expérience $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Or $\|\vec{B}_{\text{Terre}}\| \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ et les deux grandeurs sont donc comparables. Ainsi, on peut créer un champ magnétique, mais le champ total est la somme du champ créé par le fil et du champ terrestre, qui n'est pas nécessairement orienté perpendiculairement au fil.

6 Champ créé par une piste conductrice ★

On modélise une piste conductrice dans un circuit intégré, où les courants circulent sur de très faibles épaisseurs, par une nappe de courant volumique correspondante à la distribution de courants suivante :

- Pour $|z| < a$: $\vec{j} = j_0 \vec{e}_y$
- Pour $|z| > a$: $\vec{j} = \vec{0}$.

1. Faire un schéma de la situation.



2. A partir d'une analyse des symétries du problème, déterminer une forme générale du champ magnétique. Que peut-on dire de la parité des composantes du champ magnétique en fonction de z ?

Soit M un point quelconque de l'espace. Le plan passant par M et normal à $\vec{e}_x$ est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}$ est normal à ce plan : $\vec{B} = B(x, y, z)\vec{e}_x$.

De plus, le problème est invariant par translation selon x et y donc $\vec{B} = B(z)\vec{e}_x$.

Enfin, (xOy) est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique et on a $B(-z) = -B(z)$.

3. Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

On prend Γ un contour rectangulaire de côté L selon $\vec{e}_x$ et de côté $2z$ selon $\vec{e}_z$, orienté comme indiqué sur la figure, avec $z > 0$. Alors, en utilisant les propriétés de symétrie du champ :

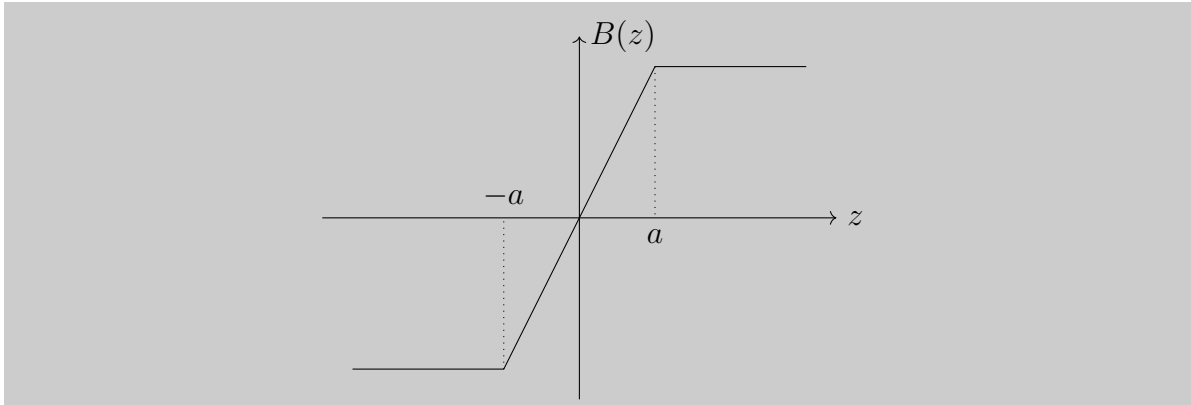
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = (B(z) - B(-z))L = 2LB(z)$$

De plus :

$$I_{\text{enlace}} = \begin{cases} 2Lzj_0 & \text{si } z < a \\ 2La j_0 & \text{si } z > a \end{cases}$$

On en déduit la valeur de $B(z)$ pour $z > 0$, puis pour $z < 0$ en utilisant l'imparité de $B(z)$. Le résultat final s'écrit :

$$B(z) = \begin{cases} j_0 z & \text{si } |z| < a \\ j_0 a & \text{si } z > a \\ -j_0 a & \text{si } z < -a \end{cases}$$



7 L'accélérateur de particules ATLAS ★★

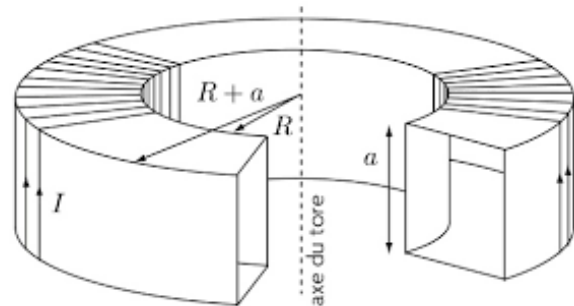
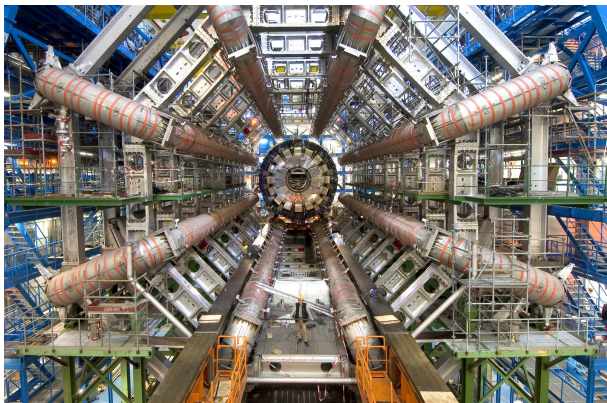


Figure 5: A gauche : accélérateur de particules ATLAS. Source : CERN. A droite : schéma s'une bobine torique. Source : Poly de TD de PC du lycée Joffre.

On étudie l'accélérateur de particules ATLAS dont une photo est présentée. Des groupes de fils électriques (à l'intérieur des gros tubes disposés en anneau) font des boucles de courant. Une personne donne l'échelle.

1. Expliquer pourquoi on peut assimiler ce dispositif à un solénoïde toroïdal comme indiqué sur la figure de droite. Quelles sont les limites de cette analogie ?

On voit sur la photo que le dispositif comporte huit tubes qui agissent comme des spires entourées autour d'une structure octogonale. On pourra assimiler cette structure octogonale à un tore, et supposer dans un premier temps que le courant est uniformément réparti autour du tore (au lieu d'être concentré dans les tubes). En réalité, ce n'est pas le cas, et on a dans la réalité des fuites de champ magnétique entre les groupes de spires.

2. On considère donc le solénoïde toroïdal de droite, parcouru par un courant i et contenant N spires. On note R le rayon de l'anneau central du solénoïde et a le côté de la section de ce tore.

- (a) Déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace.

On se place dans le système de coordonnées cylindriques d'axe Oz correspondant à l'axe du tore. Soit M un point de l'espace; alors le plan passant par M et contenant Oz est un plan de symétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan et $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$. Or, la distribution de courants est invariante par rotation autour de l'axe Oz , ainsi $\vec{B} = B(r, z)\vec{e}_\theta$.

On choisit comme contour Γ le cercle d'axe Oz passant par M et orienté selon $+\vec{e}_\theta$. Alors par le théorème d'Ampère :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r, z) = \mu_0 I_{\text{enlace}} = \begin{cases} \mu_0 N i & \text{si } M \in \text{tore} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, on a $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ à l'intérieur du solénoïde, et le champ magnétique est nul à l'extérieur.

- (b) Que peut-on dire du résultat lorsque $R \gg a$?

Si $R \gg a$, alors à l'intérieur du solénoïde on a $r \approx R$. Ainsi $||\vec{B}|| = \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} = \mu_0 n i$ où n est le nombre de spires par unité de longueur : on retrouve la formule du solénoïde infini car la courbure du tore est devenue négligeable.

3. En pratique on applique 20 000 A dans chacun des anneaux présents sur la figure. En s'appuyant sur la photographie, proposer une estimation du champ magnétique ainsi créé. Comment se compare-t-il au champ magnétique terrestre ?

On a $N = 8$, $i = 2 \cdot 10^4$ A et d'après la photo on estime qu'il y a 3 m entre chaque spire, ainsi $2\pi R = 8 \times 3 \text{ m} \Leftrightarrow R = 4 \text{ m}$. L'application numérique donne alors $||\vec{B}|| = 8 \text{ mT}$. Ce champ est très supérieur au champ terrestre, de l'ordre de 10^{-5} T .

4. Rappeler le type de mouvement d'une particule chargée autour d'une ligne de champ magnétique. Au vu des dimensions de l'instrument, vérifier que l'intensité de ce champ magnétique est suffisante pour que les électrons restent piégés dans l'anneau où le champ magnétique règne. (*Cette question appelle à une démarche de résolution de problème et nécessite une certaine prise d'initiative.*)

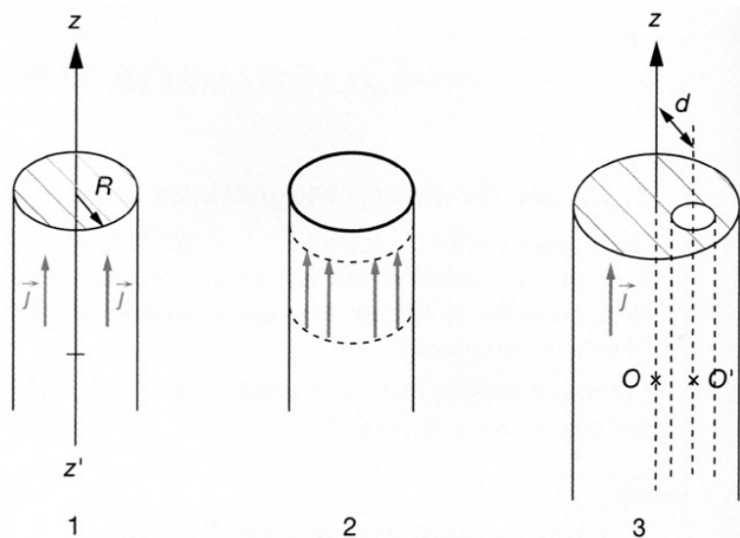
Ce mouvement est un mouvement hélicoïdal : les électrons tournent autour des lignes de champ à la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$. Le rayon de courbure de cette trajectoire est alors $R_c = \frac{||\vec{v}||}{\omega_c}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron. En supposant que les électrons vont à une vitesse proche de celle de la lumière, ce qui est généralement le cas dans un accélérateur de particules, on a :

$$R_c \approx cm_e e B \approx 0.2 \text{ m}$$

On a bien $R_c < a$ donc en tournant autour des lignes de champ, les électrons ne vont pas sortir du tore : ils restent bien piégés dans le champ magnétique.

8 Modèles de fils ★★★

Un conducteur cylindrique de rayon R , de dimension infinie selon l'axe $(z'Oz)$, est parcouru par un courant d'intensité constante I .



1. La distribution est modélisée dans un premier temps à l'aide d'une densité volumique de courant $\vec{j}$ uniforme. Déterminer le champ magnétique en tout point.

Tout plan contenant M et l'axe $z'Oz$ est plan de symétrie pour les courants, donc d'antisymétrie pour le champ magnétique. $\vec{B}(M)$ est orthogonal à ce plan : il est orthoradial. Par ailleurs, l'invariance par translation le long de l'axe $z'Oz$ et par rotation autour de cet axe assure que $\vec{B}(M)$ doit être cherché sous la forme $B(r) \vec{u}_\theta$. L'application du théorème d'Ampère pour un cercle d'axe $z'Oz$ et de rayon r donne :

- $r < R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta;$

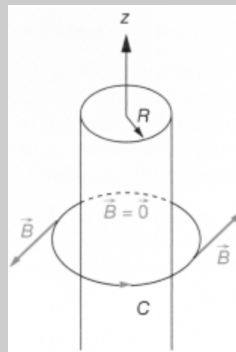
- $r > R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$

2. Reprendre la question précédente, si la conduction n'est que superficielle (l'intensité circule uniformément selon Oz sur la seule surface du cylindre).

Dans le modèle d'une conduction sur la surface cylindrique, les symétries et les invariances ne sont pas modifiées, on reprend donc la même forme pour le champ, à savoir $B(r) \vec{u}_\theta$.

Le contour d'Ampère reste le même, un cercle d'axe Oz . Lorsque le cercle est situé à l'intérieur du cylindre de rayon R , l'intensité enlacée est nulle, si bien que le champ magnétique est nul. À l'extérieur du fil en revanche, l'intensité enlacée est égale à I et le champ retrouve la valeur obtenue précédemment (Figure) :

- $r \leq R, \quad \vec{B} = \vec{0};$
- $r \geq R, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta.$



Remarque – Une discontinuité apparaît cette fois pour la valeur $r = R$; elle est due à un modèle de conduction surfacique.

3. On reprend la modélisation mais cette fois se trouve dans le cylindre une cavité cylindrique de rayon r et d'axe $O'z$, avec O' à la distance d de Oz tel que $d+r < R$. Montrer que le champ magnétique à l'intérieur de cette cavité est uniforme.

Le système étudié ici n'a plus les symétries et invariances requises pour une utilisation directe du théorème d'Ampère. On peut toutefois procéder par superposition : en effet, on peut considérer :

- le champ $\vec{B}_1$ créé par le fil sans cavité parcouru par une densité volumique uniforme $\vec{j}$;

- le champ $\vec{B}_2$ engendré par une distribution uniforme de densité $-\vec{j}$ occupant l'emplacement de la cavité.

La superposition de ces champs correspond à $\vec{B}$. Si l'on considère un point M situé dans la cavité, on définit ses projections orthogonales M_1 et M_2 respectivement sur l'axe Oz et sur l'axe de la cavité. La résolution du cours permet d'écrire : $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2} \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} M_1 \vec{M}$.

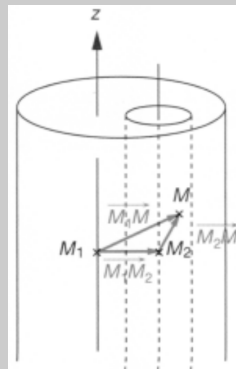
Par analogie, puisque M est dans la cavité,

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} (-\vec{j}) M_2 \vec{M}$$

En sommant ces champs, on aboutit au résultat :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} (M_1 \vec{M} - M_2 \vec{M}) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} M_1 \vec{M}_2$$

La figure suivante représente cette construction. Le résultat est indépendant du point considéré dans la cavité : le champ y est donc uniforme.

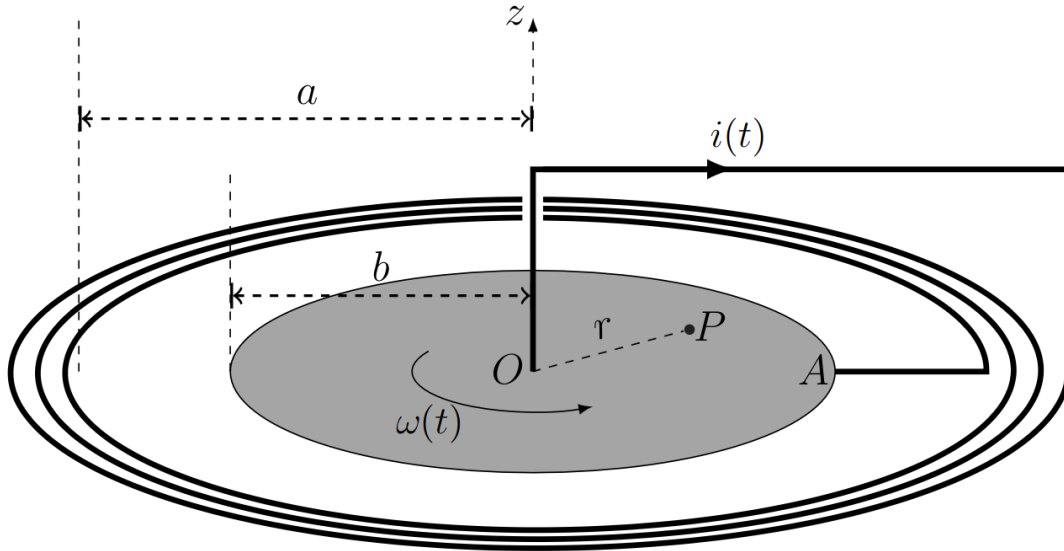


9 Modèle du champ magnétique terrestre ★★★

Le champ magnétique terrestre est produit par la convection qui se produit dans le noyau externe de la planète. Actuellement, le pôle Nord magnétique est relativement stable et dans la même direction que le pôle Nord géographique. Dans le passé, des inversions de la polarité du champ magnétique ont déjà eu lieu, et ont été enregistrées par certains sédiments sous-marins contenant des minéraux aimantés. C'est notamment l'identification de ces inversions qui a apporté un argument solide en faveur de la tectonique des plaques, puisque l'on observe des structures symétriques de part et d'autre de l'Atlantique, indiquant que les deux continents se sont progressivement éloignés l'un de l'autre.

Un modèle possible pour la circulation des courants électriques dans le noyau métallique liquide de la Terre, couplée à la rotation de la Terre, est le modèle autodynamo (cf. figure

suivante). Le système comporte N spires (circulaires de rayon a , de centre O et d'axe (Oz) , qui créent le champ géomagnétique). Il comporte aussi un disque central de rayon $b < a$, qui peut tourner autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\omega(t)$ et le moment d'inertie I (il modélise les interactions mécaniques avec la rotation de la Terre). Ce disque, conducteur, est parcouru par le même courant $i(t)$ que les spires ; il est aussi entraîné par la rotation de la Terre avec un couple moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_0 \vec{e}_z$. Enfin, la résistance électrique totale du circuit est notée R .



On note $\vec{B}(P)$ le champ magnétique créé par ce dispositif en un point P du disque tournant, avec $r = OP$; on supposera $N \gg 1$. Si $i(t) \neq 0$, on note :

$$M_{r_{\max}} = -\frac{1}{i(t)} \int_0^{r_{\max}} r \vec{e}_z \cdot \vec{B}(P) dr$$

En particulier, dans ce qui suit on pourra utiliser les intégrales M_a et M_b pour $r_{\max} = a$ ou b respectivement.

1. (a) Quelle est la direction de $\vec{B}(P)$?

Comme $N \gg 1$ on peut supposer que le champ est essentiellement produit par les spires circulaires. Le plan (xOy) est alors un plan de symétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}(P)$ est normal à ce plan, c'est-à-dire orienté selon $\vec{e}_z$: $\vec{B}(P) = B(P) \vec{e}_z$.

- (b) Quels sont les signes de M_a et M_b ?

Par la règle de la main droite, lorsque $i(t) > 0$, on doit avoir $\vec{B} \cdot \vec{e}_z < 0$. On en déduit que les deux intégrales sont positives.

- (c) Comparer
- M_a
- et
- M_b
- .

Lorsque $i(t) > 0$, l'intégrand est négatif : $\vec{B} \cdot \vec{e}_z < 0$. Or $a > b$ et on en déduit donc que :

$$M_a - M_b = -\frac{1}{i(t)} \int_b^a r \vec{B} \cdot \vec{e}_z dr > 0$$

Ainsi $M_b > M_a$. (On montre de la même manière que c'est aussi le cas pour $i(t) < 0$, ce qui est logique puisque M_a et M_b sont des constantes).

- (d) Expliciter l'inductance propre
- L
- du circuit électrique en fonction notamment de l'une de ces intégrales.

L est définie par la relation $\Phi = Li(t)$ où Φ est le flux du champ à travers les spires, orienté selon la règle de la main droite :

$$\Phi = \iint_{\text{spires}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \vec{B} \cdot r d\theta dr (-\vec{e}_z) = 2\pi N M_a i(t)$$

On en déduit $\boxed{L = 2\pi N M_a}$.

2. On suppose d'abord que le courant $i(t)$ traverse le disque uniquement en ligne droite du point A de sa périphérie à O .

- (a) Exprimer la force de Laplace
- $d\vec{F}_L$
- s'exerçant sur un élément de longueur du segment
- AO
- .

On considère un élément $d\vec{\ell} = -dr\vec{e}_r$ qui est parcouru par le courant $i(t)$ (attention à l'orientation qui doit être dans le même sens que i). La force de Laplace élémentaire subie par cet élément est :

$$d\vec{F}_L = i(t)d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -i(t)dr\vec{e}_r \wedge B(P)\vec{e}_z = i(t)B(P)dr\vec{e}_\theta$$

- (b) Exprimer alors le moment
- $\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{e}_z$
- des forces de Laplace exercées sur ce disque en fonction de
- $i(t)$
- et de
- M_b
- .

Le moment élémentaire de cette force est :

$$d\vec{\Gamma}_L = r\vec{e}_r \wedge d\vec{F}_L = i(t)B(P)rdr$$

On intègre ensuite de $r = 0$ à $r = b$, et comme on a défini $B(P) = \vec{B}(P) \cdot \vec{e}_z$ on a fait apparaître l'intégrale M_b :

$$\boxed{\Gamma_L = \vec{\Gamma}_L \cdot \vec{e}_z = -M_b i(t)^2}$$

Même si le courant se répartit de manière arbitraire sur ce disque de A à O , on peut montrer, et on admettra, que l'expression établie ici du moment des forces de Laplace reste inchangée.

- On fait l'hypothèse de la conservation de la puissance lors de la conversion électromécanique, c'est-à-dire que la puissance électrique générée par induction est intégralement dissipée par les forces de Laplace. Relier la force électromotrice $e(t)$ induite par les mouvements de rotation du disque à $M_b, i(t)$ et $\omega(t)$.

La puissance électrique fournie au circuit à partir des processus mécaniques est égale à $\mathcal{P}_{\text{elec}} = e(t)i(t)$ où $e(t)$ est la force électromotrice qui apparaît par induction dans le circuit, orientée dans le sens du courant i (convention générateur). La puissance mécanique fournie au disque par les forces de Laplace (qui convertissent l'énergie électrique en énergie mécanique) est donnée par $\mathcal{P}_{\text{meca}} = \Gamma_L \omega = -M_b \omega(t)i(t)^2$. La conservation de la puissance lors de la conversion impose alors que $\mathcal{P}_{\text{elec}} + \mathcal{P}_{\text{meca}} = 0$, autrement dit on en déduit que $e(t) = M_b \omega(t)i(t)$.

- Etablir les équations régissant les évolutions du courant dans le noyau et de sa vitesse de rotation sous la forme d'un système différentiel couplé :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = i(t)(\alpha\omega(t) - \beta) \\ \frac{d\omega}{dt} = \gamma - \delta i^2(t) \end{cases}$$

On exprimera les constantes positives α, β, γ et δ en fonction de R, L, M_b, I et Γ_0 .

Equation électrique : on applique la loi des mailles dans le circuit électrique qui s'assimile à une force électromotrice $e(t)$ en série avec une inductance L et une résistance R :

$$e(t) = L \frac{di}{dt} + Ri(t)$$

On en déduit, en réutilisant le résultat précédent :

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(M_b \omega i^2 - Ri)$$

On applique le théorème du moment cinétique au disque autour de l'axe Oz , fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le disque est soumis au couple moteur Γ_0 ainsi qu'aux forces de Laplace :

$$I \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_0 + \Gamma_L$$

On en déduit :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{I}(\Gamma_0 - M_b i^2)$$

On obtient bien les équations demandées avec :

$$\boxed{\alpha = \frac{M_b}{L} \quad \beta = \frac{R}{L} \quad \gamma = \frac{\Gamma_0}{I} \quad \delta = \frac{M_b}{I}}$$

Soit i_0 un courant constant arbitraire, on considère la fonction :

$$\mathcal{H}(\omega, i) = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Li^2 - \frac{L\Gamma_0}{M_b} \ln \left| \frac{i}{i_0} \right| - \frac{IR}{M_b}\omega$$

5. Calculer $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ et simplifier son expression. Comment peut on interpréter la fonction $\mathcal{H}$? Déterminer les points du plan (i, ω) pour lesquels le gradient de $\mathcal{H}$ s'annule. Comment s'interprètent ces points ?

On a :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} \times \left(\omega - \frac{R}{M_b} \right) + L \frac{di}{dt} \times \left(i - \frac{\Gamma_0}{M_b i} \right) \quad (2)$$

$$= (\Gamma_0 - M_b i^2) \left(\omega - \frac{R}{M_b} \right) + i(M_b \omega - R) \left(i - \frac{\Gamma_0}{M_b i} \right) \quad (3)$$

$$= 0 \quad (4)$$

On en déduit que $\mathcal{H}$ est un invariant du problème homogène à une énergie, on reconnaît notamment les termes d'énergie magnétique et cinétique mais les deux autres termes ne correspondent pas à une énergie du système. Le gradient de $\mathcal{H}$ s'annule lorsque :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega} = I \left(\omega - \frac{R}{M_b} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i} = L \left(i - \frac{\Gamma_0}{M_b i} \right) = 0 \end{cases}$$

ce qui se produit lorsque $\boxed{\omega = \frac{R}{M_b}}$ et $\boxed{i = \sqrt{\frac{\Gamma_0}{M_b}}}$. On a alors $\frac{di}{dt} = 0$ et $\frac{d\omega}{dt} = 0$ c'est-à-dire que le système est dans un état d'équilibre (ce qui est le cas actuellement puisque le pôle Nord magnétique reste proche du pôle Nord géographique).

6. Décrire la stabilité des équilibres du champ géomagnétique associés à la portion du plan de phase représenté sur la figure suivante. Expliquer alors le phénomène d'inversion magnétique.

Sur la figure, on constate un minimum de $\mathcal{H}$ en $x = 1, y = 1$. Il s'agit d'un point où le gradient de $\mathcal{H}$ s'annule et donc un point d'équilibre du champ géomagnétique. Les isolignes de $\mathcal{H}$ représentent des lignes $H = cste$ donc des trajectoires possibles du système, elles décrivent des cercles autour de ce point, il s'agit donc d'un équilibre stable. Un équilibre instable serait obtenu si les isolignes ont une allure d'hyperbole centrée sur le point d'équilibre, cde qui n'est pas le cas ici. L'allure de la fonction permet ainsi d'expliquer le fait que la dynamo terrestre présente un équilibre stable lorsque le champ magnétique est aligné avec la rotation terrestre (cas qui a été étudié ici, en supposant que les spires sont dans le plan équatorial terrestre), c'est-à-dire lorsque le pôle magnétique est au pôle Nord ou au pôle Sud.

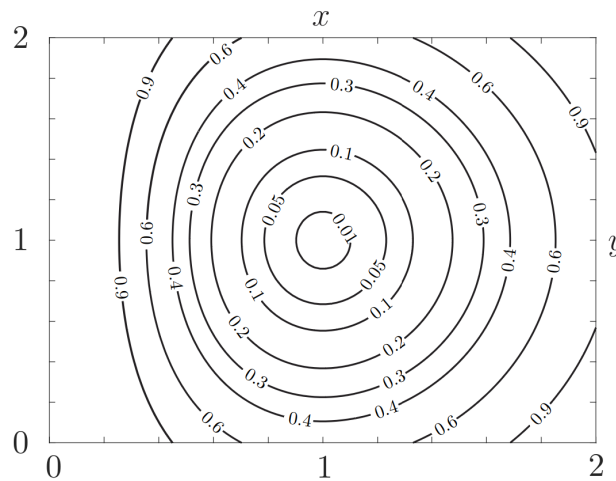


Figure 6: Courbes de valeurs constante définies par la fonction $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \ln(x)y = c$. Les valeurs de c sont indiquées sur les courbes.

III - Forces de Laplace (révisions de MPSI)

10 Balance de Cotton ★

La balance de Cotton est un dispositif ancien, développé au tout début du XX^e siècle par Aimé Cotton pour mesurer avec précision des champs magnétiques. Elle est constituée de deux bras rigidement liés l'un à l'autre en O .

La partie de gauche comprend sur sa périphérie un conducteur métallique qui est parcouru par un courant et dont une partie est placée dans le champ magnétique uniforme et permanent à mesurer, représenté par la zone grisée. Dans cette partie, les conducteurs aller et retour sont des arcs de cercle de centre O , reliés par une portion horizontale de longueur

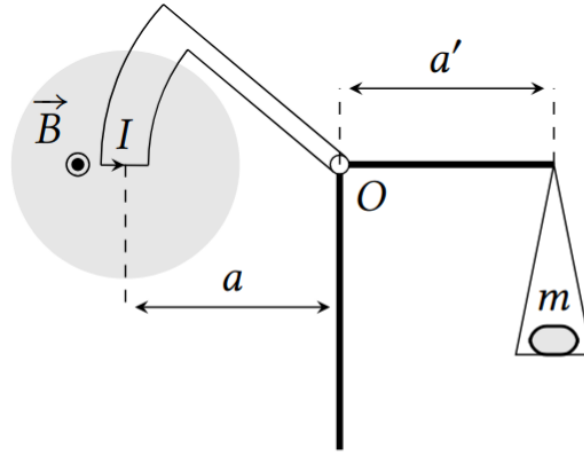


Figure 7: Schéma de la balance de Cotton. Source : poly de TD de Etienne Thibierge.

L . La partie droite comporte un plateau sur lequel est déposée une masse m afin d'équilibrer la balance.

La balance peut tourner sans frottement dans le plan de la figure autour du point O . À vide, c'est-à-dire sans champ magnétique ni masse m , la position du plateau est ajustée afin que la balance soit à l'équilibre avec le bras de droite parfaitement horizontal.

1. Montrer que le moment en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

Considérons un élément $d\vec{\ell}$ de fil sur une partie en arc de cercle, alors dans le repère (r, θ, z) centré en O et d'axe Oz orienté perpendiculairement à la figure : $d\vec{\ell} = \pm d\ell \vec{e}_\theta$. On a alors $dF_{\text{Lap}} = \pm i d\ell \vec{e}_\theta \wedge \vec{B} = \pm i B d\ell \vec{e}_r$. Cette force étant radiale, elle n'exerce aucun moment au point O . A fortiori, la somme de tous les moments élémentaires est également nulle.

2. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace.

A l'équilibre, seule la partie radiale du fil de longueur L est soumise à une force de Laplace de moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{\text{Lap}}) = a \vec{e}_r \wedge (-IL \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z) = ILaB \vec{e}_z$$

3. En déduire la relation entre la masse m à poser sur le plateau pour retrouver la configuration d'équilibre et le champ magnétique B , à exprimer en fonction de a, a', L, I et de l'intensité de la pesanteur g .

Le moment du poids de la masse par rapport à l'axe peut être mesuré à l'aide du bras de levier :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -mga'\vec{e}_z$$

Enfin, le moment des autres actions mécaniques qui s'exercent (liaison pivot, poids du plateau) est nul car, en l'absence de champ et de masse, le plateau est à l'équilibre à l'horizontale. On en déduit, en appliquant le théorème du moment cinétique au plateau par rapport au point O fixe dans le référentiel terrestre galiléen : $\overrightarrow{\mathcal{M}}_0(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$.

D'où $ILaB = mga' \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{mga'}{ILa}}$

4. La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0.05 \text{ g}$, en déduire la plus petite valeur de B mesurable pour $a = a' = 25 \text{ cm}$, $L = 5 \text{ cm}$ et $I = 5 \text{ A}$. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.

On a, par propagation des incertitudes et en utilisant $a = a'$:

$$\delta B = \delta m \times \frac{ga'}{ILa} = \delta m \times \frac{g}{IL} \approx 2 \text{ mT}$$

Cette précision est insuffisante pour mesurer le champ magnétique terrestre, mais permet de mesurer par exemple le champ magnétique créé par des bobines.

11 Force attractive entre deux fils ♥ ★★

Si l'on fait passer un courant suffisamment fort entre deux fils parallèles, on constate qu'ils vont avoir tendance à se coller l'un à l'autre. Dans cet exercice, nous allons tenter d'expliquer ce phénomène.

- On considère deux fils infinis parallèles à l'axe (Oz) , placés respectivement en $(x = 0, y = 0)$ et $(x = H, y = 0)$ et parcourus par un même courant i selon $+\vec{e}_z$.
 - En exploitant les symétries du problème, déterminer la forme générale du champ magnétique.

Soit M un point de l'espace. Le plan passant par M et normal à $\vec{e}_z$ est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants, donc $\vec{B}$ est contenu dans ce plan : $\vec{B} = B_x(x, y, z)\vec{e}_x + B_y(x, y, z)\vec{e}_y$

De plus, on a invariance par translation selon $\vec{e}_z$. Enfin, (yOz) et (XOz) sont des plans de symétrie de la distribution, donc des plans d'antisymétrie du champ. On

en déduit :

$$\begin{cases} \vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y \\ B_i(-x, y) = -B_i(x, y) \\ B_i(x, -y) = -B_i(x, y) \end{cases}$$

où $i \in x, y$.

- (b) Est-il possible d'appliquer le théorème d'Ampère pour déterminer directement $\vec{B}$? Expliquer pourquoi.

Cette forme n'est pas suffisamment simple pour pouvoir calculer $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ analytiquement sur un contour fermé, on ne peut donc pas appliquer le théorème d'Ampère directement.

- (c) Quel principe peut-on utiliser pour calculer le champ $\vec{B}$?

On peut utiliser le principe de superposition en remarquant que l'on a deux fils infinis.

2. On considère un unique fil infini parallèle à l'axe (Oz) et placé en ($x = 0, y = 0$). Déterminer le champ magnétique créé par ce fil en tout point de l'espace.

On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Soit M un point de l'espace. Le plan passant par M et contenant Oz est un plan de symétrie de la distribution, ainsi $\vec{B} = B(r, \theta, z)\vec{e}_\theta$. De plus, on a invariance par translation selon $\vec{e}_z$ et par rotation autour de Oz , ainsi $\vec{B} = B(r)\vec{e}_\theta$.

On choisit pour contour Γ le cercle centré sur l'axe Oz , passant par M et orienté selon $+\vec{e}_\theta$, alors :

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i$$

On en déduit : $\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$.

3. (a) En déduire la force par unité de longueur subie par un second fil parallèle parcouru par la même intensité, mais placé en ($x = H, y = 0$).

Pour ce second fil, un élément $d\vec{\ell} = d\ell \vec{e}_z$ est soumis à la force élémentaire :

$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i d\ell \vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi H} \vec{e}_y = -\frac{\mu_0 i^2 d\ell}{2\pi H} \vec{e}_x$$

On a ainsi une force attractive linéique :

$$\vec{f} = \frac{d\vec{F} d\ell}{-} \frac{\mu_0 i^2}{2\pi H} \vec{e}_x$$

- (b) Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

Le signe indique que la force est attractive.

- (c) Comparer sa norme à d'autres forces usuelles subies par les fils. A partir de quelle intensité i cette force devient-elle significative ?

III - Dipôle magnétique

12 Champ magnétique terrestre ★★

Le champ magnétique terrestre est modélisé par le champ d'un dipôle magnétique permanent de moment $\vec{\mathcal{M}}$ situé au centre de la Terre et dirigé du pôle Nord vers le pôle Sud. On assimile la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6380$ km. Au pôle Nord, on mesure une intensité du champ magnétique de $B_0 = 6 \times 10^{-5}$ T.

1. Tracer l'allure des lignes de champ magnétique autour de la Terre. En se plaçant dans le repère sphérique de centre O et d'axe (Oz) orienté vers le pôle Sud, montrer que le champ magnétique est de la forme :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta \quad (5)$$

La Terre correspond à un dipôle magnétique équivalent à une boucle de courant située dans le plan contenant O et normal à (Oz) . Soit M un point de l'espace : le plan passant par M et contenant (Oz) est un plan d'antisymétrie de cette boucle de courant, donc $\vec{B}$ est contenu dans ce plan. De plus, la distribution de courants est invariante par rotation d'angle φ (autour de (Oz)) donc les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent pas de φ . Ainsi :

$$\vec{B} = B_r(r, \theta)\vec{e}_r + B_\theta(r, \theta)\vec{e}_\theta$$

Pour l'allure des lignes de champ : voir le cours.

En pratique, il est possible de montrer que le champ magnétique créé par un dipôle $\vec{\mathcal{M}} = \mathcal{M}\vec{e}_z$ est donnée par :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \quad (6)$$

2. Quelle est la valeur de $\mathcal{M}$?

Au pôle Nord, on a $\theta = \pi$ et $||\vec{B}|| = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R_T^3} \times 2$. On en déduit que $\mathcal{M} = \frac{2\pi R_T^3 ||\vec{B}||}{\mu_0} = 7.8 \cdot 10^{22} \text{ A}\cdot\text{m}^{-2}$.

3. Quelle est l'intensité du champ magnétique à Pointe-à-Pitre ? (Latitude de 16 degrés Nord). Quelle est l'inclinaison du champ par rapport à l'horizontale ?

A Pointe-à-Pitre : $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda = 106^\circ$ où λ est la latitude. Ainsi $\cos \theta = -0.28$ et $\sin \theta = 0.96$. Alors :

$$||\vec{B}||_{\text{PTP}} = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi R_T^3} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Son inclinaison ψ est telle que $\tan \psi = \frac{B_r}{B_\theta}$ et on a donc ici :

$$\psi = \arctan \left(\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} \right) = -30^\circ$$

4. Vous pouvez vérifier votre résultat en installant sur votre téléphone l'application "Physics Toolbox" qui vous permet d'accéder au magnétomètre de votre smartphone.

Avec mon magnétomètre, je trouve $||\vec{B}|| = 3.4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Et pour aligner le téléphone avec le champ, il faut effectivement l'incliner d'environ 30° vers le bas : pour cela, d'abord sélectionner la fonction boussole, et pointer le téléphone vers le Nord. Puis passer en mode magnétomètre et mesurer les trois composantes du champ magnétique, incliner le téléphone vers le bas de sorte à annuler deux de ces composantes. Le téléphone est alors orienté parallèlement au champ $\vec{B}$.

13 Optimisation d'une boussole ♥ ★

Une boussole est constituée d'un aimant permanent de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ fixé à un axe par une liaison pivot parfaite. En supposant que l'aiguille a une longueur L et une masse m , son moment d'inertie par rapport à l'axe de la liaison est donné par $J = \frac{1}{12} m L^2$. La boussole est placée dans le champ magnétique terrestre, supposé horizontal (c'est une très bonne approximation dans les tropiques), et d'intensité $3 \times 10^{-5} \text{ T}$.

1. Proposer des valeurs réalistes pour L et m .

On propose $L = 2 \text{ cm}$ et $m = 2 \text{ g}$.

2. Une personne sort la boussole de sa poche et la met à plat.

- (a) Quel va être le mouvement de l'aiguille ?

L'aiguille est soumise au champ magnétique qui exerce un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin \Theta \vec{e}_z$$

où on a défini Θ l'angle entre la boussole et le champ magnétique (orienté vers le Nord).

L'aiguille est également soumise à son poids, de moment nul selon $\vec{e}_z$ en tout point (car le poids est vertical) et à la réaction du support dont le moment en O selon $\vec{e}_z$ est également nul (liaison pivot parfaite). On a ainsi, par le théorème du moment cinétique appliqué à l'aiguille au point O fixe dans le référentiel terrestre galiléen. Le résultat projeté selon $\vec{e}_z$ donne :

$$J\ddot{\Theta} + \mathcal{M}B \sin \Theta = 0$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles, on obtient une équation d'oscillateur harmonique $\ddot{\Theta} + \omega_0^2 \Theta = 0$ avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}} = \sqrt{\frac{12\mathcal{M}B}{mL^2}}$$

- (b) On mesure une période de 1 s. En déduire le moment magnétique de l'aiguille de la boussole.

On a $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{12\mathcal{M}B}}$. On en déduit que :

$$\mathcal{M} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{mL^2}{12B} = 8.8 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

- (c) L'aiguille converge-t-elle vers une position d'équilibre dans ce modèle ? Va-t-il être possible de lire précisément la direction du Nord ?

Comme l'équation est une équation d'oscillateur harmonique, l'aiguille oscille autour de sa position d'équilibre mais n'y converge pas, ce qui n'est pas très pratique pour lire la direction du Nord.

3. Pour remédier à ce problème, on choisit un modèle de boussole dans lequel l'aiguille est placée dans un boîtier rempli d'un fluide visqueux. L'action du fluide peut être modélisée par un couple de la forme $\vec{\Gamma} = -\alpha\dot{\theta}\vec{e}_z$.

- (a) Expliquer qualitativement le rôle du fluide visqueux et pourquoi il va faciliter la lecture de la direction du Nord.

Avec cette nouvelle force, on va avoir une perte d'énergie et un amortissement des oscillations, l'aiguille va atteindre sa position d'équilibre et y rester.

- (b) Etablir l'équation différentielle du mouvement et donner la forme générale des solutions lorsqu'on lâche l'aiguille d'un angle initial θ_0 sans vitesse initiale. On prendra soin de distinguer les différents régimes à partir d'un facteur de qualité que l'on définira.

La résolution précédente est inchangée mise à part l'introduction du couple visqueux, l'équation différentielle devient :

$$J\ddot{\Theta} + \alpha\dot{\Theta} + MB\sin\Theta = 0$$

Ou encore, après approximation des petits angles et en posant $Q = \frac{\sqrt{MBJ}}{\alpha}$:

$$\ddot{\Theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\Theta} + \omega_0^2\Theta = 0$$

Si $Q > \frac{1}{2}$ on aura des oscillations amorties :

$$\Theta(t) = \Theta_0 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Si $Q < \frac{1}{2}$ on a des exponentielles décroissantes :

$$\Theta(t) = \Theta_0 (Ae^{-r_1 t} + Be^{-r_2 t}) \quad \text{avec} \quad r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2})$$

La décroissance la plus lente, qui donne le temps caractéristique du système, correspond à $\omega_- = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - \sqrt{1 - 4Q^2})$.

- (c) Va-t-on atteindre l'équilibre rapidement si $\alpha \rightarrow 0$? Et si $\alpha \rightarrow \infty$? Proposer une valeur optimale de α permettant d'atteindre l'équilibre le plus rapidement possible.

Si $\alpha \rightarrow 0$ alors on a des oscillations avec une enveloppe décroissant de moins en moins rapidement, et on n'atteint pas l'équilibre rapidement.

Si $\alpha \rightarrow \infty$ alors $Q \rightarrow 0$ et $\omega_- \rightarrow 0$, donc l'exponentielle décroissante a un temps caractéristique infiniment long et on mettra aussi très longtemps à atteindre l'équilibre.

On a la décroissance la plus rapide pour $Q = \frac{1}{2}$. Or $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{J}$, on propose donc :

$$\alpha = 2J\omega_0 = \boxed{\frac{4\pi J}{T}}$$

- (d) Des considérations de mécanique des fluides (hors programme en MP) permettent de montrer que $\alpha \sim \eta L^3$ où η est la viscosité du fluide. Proposer un fluide approprié pour remplir le boîtier de la boussole.

On doit donc choisir $\eta = \frac{4\pi J}{TL^3} = \frac{\pi m}{3TL}$ (en réutilisant $J = \frac{1}{12}mL^2$). Une application numérique donne $\eta \sim 10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. On prendra ainsi plutôt de l'huile comme de la silicone, que l'on retrouve effectivement dans la plupart des boussoles.

Données d'ordres de grandeur de viscosité :

Fluide	Vide	Air	Eau	Huile	Miel
Viscosité [Pa·s]	0	2×10^{-5}	10^{-3}	5×10^{-2}	1

14 Facteur gyromagnétique de l'électron ♥ ★★

On considère un électron autour d'un atome, et on souhaiterait caractériser son rapport gyromagnétique, c'est-à-dire le rapport entre son moment cinétique et son moment magnétique. Pour cela, on va étudier l'atome d'hydrogène.

- On s'intéresse dans un premier temps au calcul du moment cinétique de l'électron.
 - Rappeler la composition de l'atome d'hydrogène. A quelles forces est soumis l'électron ?

On a un proton autour duquel orbite un électron soumis à la seule force électrique.

- Montrer que le moment cinétique de l'électron $\vec{L}_O$ est conservé et que le mouvement est plan. On notera σ sa norme.

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen en supposant le noyau de l'atome fixe dans ce référentiel. alors par le théorème du

moment cinétique appliqué à l'électron au point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{0}$$

car la force électrique est centrale.

Or $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \perp \vec{OM}$ donc le point M reste dans le plan passant par O et normal au vecteur constant $\vec{L}_O$, ainsi le mouvement est plan.

- (c) On suppose que l'électron décrit une orbite circulaire autour du noyau. Estimer σ en fonction de la masse de l'électron m_e , du rayon r de la trajectoire et de constantes fondamentales.

On se place dans les coordonnées polaires de ce plan, on a alors $\vec{L}_O = mr\dot{\theta}\vec{e}_z$ d'où $\sigma = mr^2\dot{\theta}$ où r est le rayon constant de la trajectoire.

Or l'électron n'est soumis qu'à la force électrique $\vec{F}_{\text{elec}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{e}_r$, en lui appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et en projetant selon $\vec{e}_r$, on trouve :

$$-mr\dot{\theta}^2 = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

D'où, en remplaçant $\dot{\theta}$ par $\frac{\sigma}{mr^2}$ dans l'équation précédente :

$$\boxed{\sigma = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{mr}{\pi\epsilon_0}}}$$

2. On s'intéresse maintenant au moment magnétique lié au mouvement de l'électron.
- (a) Expliquer pourquoi le mouvement de l'électron autour de l'atome peut être assimilé à une boucle de courant.

L'électron peut être considéré comme une charge parcourant un fil fictif correspondant à sa trajectoire.

- (b) Déterminer le courant i parcourant cette boucle en fonction de σ, m_e, r et des constantes fondamentales.

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = -\frac{e\dot{\theta}}{2\pi} = -\frac{e\sigma}{2\pi r^2 m}$$

- (c) En déduire le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ associé à cette boucle de courant, en fonction des mêmes variables.

$$\text{On a } \vec{\mathcal{M}} = i\pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{e\sigma}{2m} \vec{e}_z.$$

3. On définit le rapport gyromagnétique comme le rapport entre le moment magnétique et le moment cinétique de l'électron :

$$\gamma = \frac{\mathcal{M}}{\sigma} \quad (7)$$

- (a) Déterminer sa valeur dans le cadre de notre modèle classique de l'électron.

$$\text{Ici on a } \gamma = -\frac{e}{2m} \approx 8.8 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}.$$

- (b) En pratique, on mesure $\gamma = 1.7608596278 \pm 0.0000000005 \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$. Cette valeur est-elle compatible avec le résultat théorique que nous avons obtenu ?

On voit clairement que les valeurs théorique et mesurée diffèrent très largement, l'écart normalisé est extrêmement important, de l'ordre de 10^{10} . Cela est dû à des phénomènes quantiques (qui sont essentiels dans la description de la structure de l'atome), et, dans une moindre mesure, relativistes, car l'électron se déplace à une vitesse non négligeable devant celle de la lumière.

Ce résultat est dû à la mécanique quantique : l'électron possède un moment magnétique intrinsèque appelé spin qui ne peut pas être décrit dans le cadre du modèle classique de l'atome.