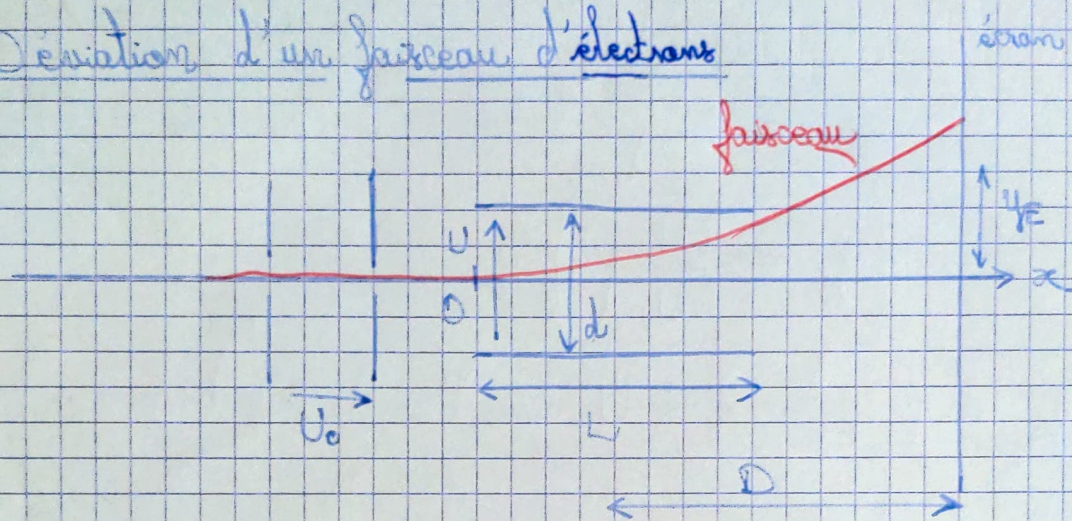


TD4 - Correction

I - Mouvement d'une particule chargée

1 - Déviation d'un faisceau d'électrons

1.



2. On a: $E_p^2 = qV = -eV$.

On applique le théorème de l'énergie mécanique à l'électron dans R_f galiléen, en négligeant son poids, il est uniquement soumis à la force électrique conservative:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = eU_0 \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

A.N. $v_0 = 1,9 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

3. Entre les plaques l'électron est soumis à la force électrique.

$$\vec{F} = q\vec{E} = +e \cdot \frac{U}{d} \vec{e}_y, \text{ on néglige son poids.}$$

On applique le PFD à l'électron dans R_f galiléen qui donne

projeté sur $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_x$: $m \ddot{y} = \frac{eU}{d}$ et $\ddot{x} = 0$

D'où $\dot{x} = v_0 \Rightarrow dx = v_0 dt$. En choisissant de placer l'origine

0 au bord gauche des plaques: $x = v_0 t$ et donc:

$$y(t) = \frac{eU}{2dm} t^2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{eU v_0^2 x^2}{2dm}} \text{ équation de la trajectoire}$$

En sortie de plaque $y_0 = y(x=L) = \frac{eU v_0^2 L^2}{2dm}$

4. On a $\frac{dy}{dx}(x=L) = \frac{eU v_0^2 L}{dm}$. Or comme l'électron n'est

plus soumis à aucune force, il a un mouvement rectiligne uniforme.

Ainsi :

$$y_E = y_0 + \frac{dy}{dx}(x=L) \times \left(D - \frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{eU_0 \omega_0^2 L^2}{2} + \frac{eU_0 \omega_0^2 L}{dm} \left(D - \frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{eU_0 \omega_0^2 L D}{dm} \quad \text{Or } \omega_0^2 = \frac{2eU_0}{m} \quad (2)$$

$$\boxed{y_E = \frac{U L D}{U_0 \cdot d}}$$

y_E est proportionnel à U ainsi l'oscillo permet de visualiser la tension U à l'écran.

2- Principe d'un spectromètre de masse

1. Il faut que les ions soient attirés par les potentiels faibles, ainsi $[q > 0]$ (ce sont des cations).
2. On applique le théorème de l'énergie mécanique à l'ion i , dans R_f galiléen entre P et P' , il est soumis à la seule force électrique conservative (son poids est négligeable). Alors :

$$\Delta E_m = \frac{1}{2} m \omega_i^2 + q(V_{P'} - V_P) = \frac{1}{2} m \omega_i^2 - q|U|$$

D'où :

$$\boxed{\omega_i = \sqrt{\frac{2q|U|}{m_i}} \quad (i \in \{1, 2\})}$$

3. Dans le champ magnétique les ions sont soumis à la seule force magnétique qui est donnée par $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$.

On a ainsi, par le PFD appliqué à l'ion dans R_f galiléen :

$$m_i \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \frac{dv}{dt} = \omega_i r$$

Soit :

$$\begin{cases} m_i \ddot{x} = q B y \\ m_i \ddot{y} = -q B x \end{cases}$$

On note $\omega_c = \frac{qB}{m_i}$ la pulsation cyclotron. Alors

$$\ddot{x} = \omega_c \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\omega_c \dot{x}$$

On encore en notant $z = x + jy : \dot{z} = -j\omega_c z$

La solution s'écrit $z = K e^{-j\omega_c t}$
 $\rightarrow \dot{z} = -j\omega_c K e^{-j\omega_c t} = -j\omega_c z$ (*)

Or $|K| = \|\vec{v}\| = v_0$ et (*) correspond à un cercle de rayon : $R_0 = \frac{|K|}{\omega_c} = \frac{v_0}{\omega_c}$

En reinjectant les expressions de $v_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m_i}}$ et $\omega_c = \frac{eB}{m_i}$
 on trouve $R_0 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_i U}{e}}$

4. Les ions faisant un demi-tour, ils arrivent à une distance $2R_0$ de leur point d'entrée dans la zone avec champ magnétique.

Ainsi $d = 2|R_1 - R_2| = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{e}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$

5. Il se trouve dans la 1^{re} colonne et 2^e période, c'est un alcalin.
 Il forme l'ion Li^+ car il a un électron de valence.

6. Les masses des ions sont $m_i = \frac{M_i}{N_A}$ ← masse molaire

D'où : $d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{eN_A}} (\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2})$

A.N : $d = 5,6 \text{ cm}$

3 - Le cyclotron

1. C'est un mouvement rectiligne uniformément accéléré. Par conservation de l'énergie mécanique (TEM appliqué à la particule dans R. galiléen)
 on a : $\frac{1}{2} m v_i^2 = W(\vec{F}_i) = q \vec{E} \cdot d \vec{e}_z = q E d$

D'où $v_i = \sqrt{\frac{2qEd}{m}}$

2. On a alors par le PFD (similaire à Q3 de l'ex 2) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Ainsi $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$ donc $\|\vec{v}\| = c^{te} = v_1$.

De plus:
$$\begin{cases} m\ddot{x} = qB \dot{y} \\ m\ddot{y} = -qB \dot{x} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{m}$ la pulsation cyclotron.

On pose $z = x + jy$, alors $\ddot{z} = -j\omega_c \dot{z} \Rightarrow \dot{z} = \frac{K}{\omega_c} e^{-j\omega_c t}$

Or $|\dot{z}| = \|\vec{v}\|$ donc $|K| = v_1$. On note $K = v_1 e^{-j\varphi}$
 Et $z = \frac{K}{\omega_c} e^{-j\omega_c t} \Rightarrow \begin{cases} x = \text{Re}(z) = \frac{v_1}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \varphi) \\ y = \text{Im}(z) = -\frac{v_1}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \varphi) \end{cases}$

$\Rightarrow$ le mouvement est circulaire uniforme.

b. On a vu $\|\vec{v}\| = c^{te}$ donc la particule sort avec une vitesse v_1 .

2. Le TEC donne maintenant $\frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = qEd$

D'où $\frac{1}{2} m v_2^2 = qEd + \frac{1}{2} m v_1^2 = 2qEd$ et:

$$v_2 = \sqrt{\frac{4qEd}{m}}$$

4: a. C'est toujours un mouvement circulaire uniforme.

b. La particule parcourt un demi-tour en $\frac{\pi}{\omega_c} = \frac{\pi m}{qB}$

Elle ne dépend que du champ $\vec{B}$ qui est uniforme donc reste toujours la même.

c. Il faut que $\frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB}$, or $T = \frac{1}{f}$ fréquence

Donc: $f = \frac{qB}{2\pi m}$ est la fréquence qui doit être choisie.

5. On montre facilement que $\frac{1}{2} m v_{n+1}^2 - \frac{1}{2} m v_n^2 = qEd$

On somme de 0 à $n-1$: $\frac{1}{2} m v_n^2 = nqEd$.

D'où: $v_n = \sqrt{\frac{2nqEd}{m}}$

Le dispositif avec champ magnétique permet d'augmenter le nombre de passages et donc d'accélérer plus la particule.

6. Le rayon ne pourra pas excéder $\frac{D}{2}$ ($D = 52 \text{ cm}$) ainsi on aura : $R = \frac{mv}{qB} \leq \frac{D}{2} \Rightarrow v_{\text{max}} = \frac{DqB}{2} = D\omega_f$.

D'où : $ngEd = \frac{1}{2} m (D\omega_f)^2$

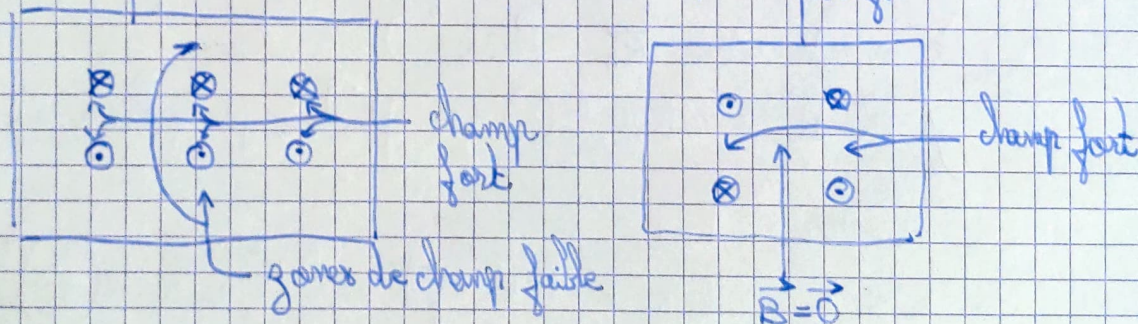
Soit $n = \frac{m_0}{2qEd} \cdot (D\omega_f)^2 \approx 10$ tours pour des protons

$= e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $= 200 \text{ kV}$
 12 MHz
 52 cm

II - Champ magnétique

4 - Lignes de champ

1. J'indique le sens du courant dans chaque fil :

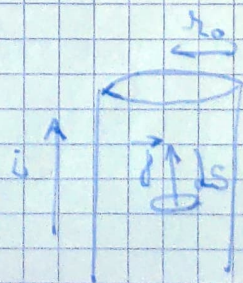


2. Le champ magnétostatique vérifie la conservation du flux : son flux à travers une surface fermée est nul. En choisissant un cylindre d'axe (Oz) on voit que cela ne fonctionne pas pour les deux figures du haut.

En bas à gauche : on n'a pas de contour tel que $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0$ donc pas de sources sur l'image. En bas à droite : il y a un fil dans (Oz) au centre de l'image.

5 - Champ créé par un fil

1. On suppose j uniforme, or :

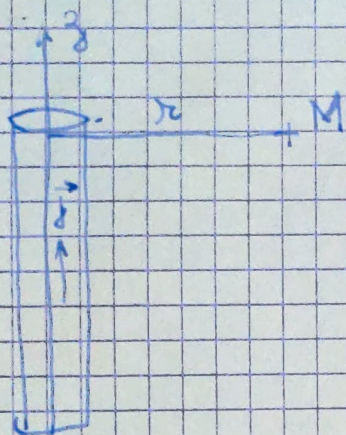


$$i = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot \int d\vec{S} = \vec{j} \cdot \pi r_0^2 \vec{e}_z.$$

On a ainsi :

$$\vec{j} \text{ uniforme} \Rightarrow \vec{j} = \frac{i}{\pi r_0^2} \vec{e}_z$$

2.



Soit M un point de l'espace, on se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution de courant donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}$ ainsi $\vec{B}$ est normal à ce plan : $\vec{B} \parallel \vec{e}_\theta$.

De plus le problème est invariant par translation selon $\vec{e}_z$ et rotation selon $\theta \Rightarrow$

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

3. On considère Γ le cercle de rayon r passant par M , centré sur (Oz) et orienté selon $\vec{e}_\theta$. Alors :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enc}} \text{ par le théorème d'Ampère.}$$

$$\text{Si } r > r_0 : I_{\text{enc}} = i$$

$$\text{Si } r < r_0 : I_{\text{enc}} = \pi r^2 \cdot \|\vec{j}\| = \frac{\pi r^2}{\pi r_0^2} i = i \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

$$\text{Donc : } \vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 i}{2\pi r_0} \vec{e}_\theta & \text{si } r > r_0 \\ \frac{\mu_0 i r}{2\pi r_0^2} \vec{e}_\theta & \text{si } r < r_0 \end{cases}$$

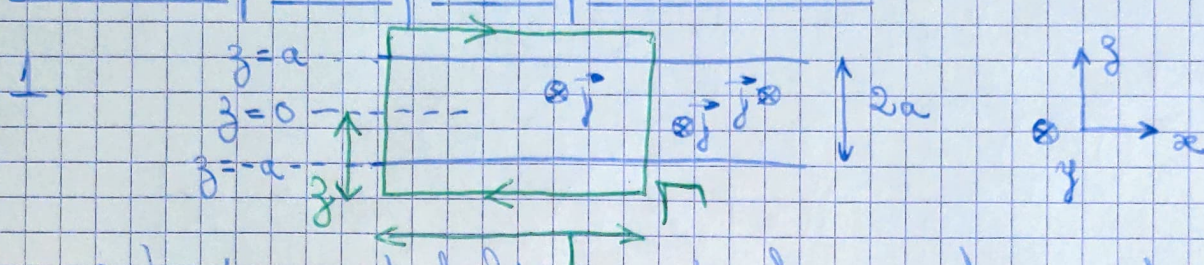


$$4. \text{ On a } \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1}{2\pi \times 10^{-2}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Or $\|\vec{B}_{\text{câble}}\| = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ donc on a un dispositif comparable.

On peut créer un champ mais il s'ajoute à $\vec{B}_{\text{câble}}$ qui n'est pas forcément perpendiculaire au fil.

6 - Champ créé par une pince conductrice



2. Soit M un point de l'espace. Le plan passant par M et normal à $\vec{e}_x$ est plan de symétrie de la distribution donc $\vec{B}$ est normal à ce plan: $\vec{B} = B(x, y, z) \vec{e}_x$
 Or le problème est invariant par translation selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ donc:

$$\boxed{\vec{B} = B(z) \vec{e}_x}$$

Enfin (xOz) est plan de symétrie de $\vec{j}$ donc plan d'antisymétrie de $\vec{B}$ et $\boxed{B(-z) = -B(z)}$

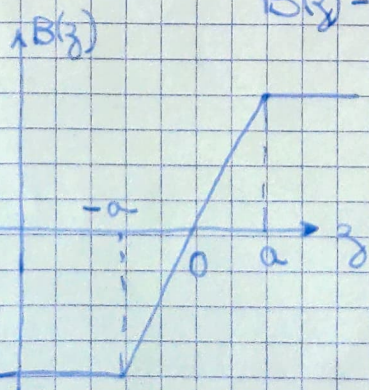
3. On prend Γ un contour de côté L selon $\vec{e}_x$ et $2z$ selon $\vec{e}_y$ orienté comme indiqué sur la figure, avec $z > 0$.

Alors: $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(z) - B(-z)) \cdot L = 2L B(z)$

De plus: $I_{enc} = \begin{cases} 2Lz \times j_0 & \text{si } |z| < a \\ 2La \times j_0 & \text{si } |z| > a \end{cases}$

D'où:

$$B(z) = \begin{cases} j_0 z & \text{si } |z| < a \\ j_0 a & \text{si } z > a \\ -j_0 a & \text{si } z < -a \end{cases} \quad \text{et } \vec{B} = B(z) \vec{e}_x$$



Le champ est linéaire dans la nappe et uniforme à l'extérieur de part et d'autre.

III - Forces de Laplace

1 - Balance de Cotton

1. Considérons un élément dl de fil sur une partie en arc de

cercle, donc dans le repère (r, θ, z) centré en O et d'axe perpendiculaire à la figure: $d\vec{l} = \pm dl \vec{e}_\theta$.

On a alors $d\vec{F}_{\text{lap}} = \pm i dl \vec{e}_\theta \wedge \vec{B}$

$$\begin{aligned} \text{Et } \vec{M}_O(d\vec{F}_{\text{lap}}) &= \pm i dl r \vec{e}_r \wedge (\vec{e}_\theta \wedge \vec{B}) \\ &= \pm i dl r [(\vec{e}_\theta \cdot \vec{B}) \vec{e}_r - (\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r) \vec{B}] \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc a fortiori la somme de tous les moments est également nulle.

2. A l'équilibre, seule la partie radiale du fil de longueur L est soumise à une force de Laplace de moment:

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{lap}}) &= a \vec{e}_r \wedge (-IL \vec{e}_r \wedge B \vec{e}_z) \\ &= IL a B \vec{e}_z \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le bras de levier:

$$\vec{M}_O(\vec{P}_{\text{masse}}) = -mg a' \vec{e}_z$$

masse du plateau
liaison pivot

3. Le moment des autres actions mécaniques qui s'exercent est nul car en l'absence de champ et de masse le plateau est à l'équilibre à l'horizontale. On en déduit, en appliquant le théorème du moment cinétique au plateau par rapport au point O fixe dans R_T galiléen: $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_i) = \vec{0}$

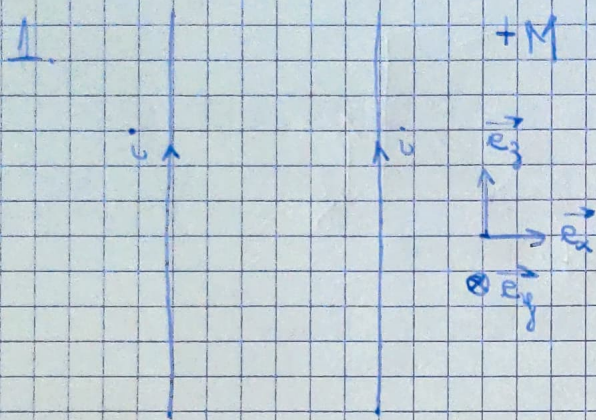
$$\text{D'où } IL a B = mg a' \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{m g a'}{IL a}}$$

$$4. \text{ On a } SB = 8m \times \frac{g a'}{IL a} = 8m \times \frac{g}{IL} \text{ car } a = a'$$

$$\text{A.N.: } \boxed{SB = 2 \text{ mT}}$$

Cette précision est insuffisante pour mesurer le champ magnétique terrestre mais permet de mesurer le champ créé par des bobines de taille suffisante.

8 - Force attractive entre 2 fils



a. Soit M un point de l'espace. Le plan passant par M et normal à $\vec{e}_z$ est plan d'antymétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}$ est dans ce plan :

$$\vec{B} = B_x(x, y, z) \vec{e}_x + B_y(x, y, z) \vec{e}_y$$

De plus on a invariance par translation selon $\vec{e}_z$.

Enfin (yOz) est plan de symétrie de la distribution et (xOz) aussi donc :

$$\begin{cases} \vec{B} = B_x(x, y) \vec{e}_x + B_y(x, y) \vec{e}_y \\ B_x(-x, y) = -B_x(x, y) \\ B_y(x, -y) = -B_y(x, y) \end{cases} \quad i \in \{x, y\}$$

b. Cette forme n'est pas suffisamment simple pour pouvoir calculer $\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$ analytiquement sur un contour fermé $\rightarrow$ on ne peut pas appliquer le théorème d'Ampère.

c. On va utiliser le principe de superposition.

2. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Soit M un point de l'espace. Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan de symétrie de la distribution $\rightarrow \vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$. De plus on a invariance par translation selon $\vec{e}_z$ et rotation autour de (Oz) : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

On choisit Γ le cercle centré sur (Oz) , passant par M et orienté selon $\vec{e}_\theta$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I_{\text{enc}} = \mu_0 i$$

D'où :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

3. Pour ce second fil, un élément $d\vec{l}$ est soumis à :

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i d\vec{e}_z \wedge \frac{\mu_0 i}{2\pi r H} \vec{e}_y = - \frac{\mu_0 i^2 dl}{2\pi H} \vec{e}_x$$

On a ainsi une force attractive linéique: $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dl} = \boxed{-\frac{\mu_0 i^2}{2\pi H} \vec{e}_x}$

b. La force est attractive.

c. On a, pour $H = 1 \text{ cm}$ et pour un fil de $10 \text{ cm} = L$:

$$\|\vec{F}\| = \frac{\mu_0 i^2 L}{2\pi H} \sim \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 0.1}{2\pi \cdot 0.01} \sim (2 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}) \times i^2$$

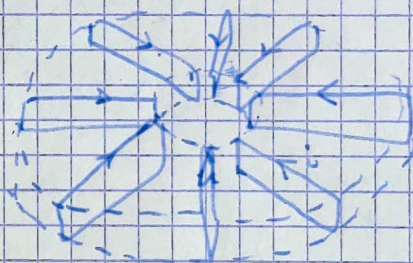
La masse d'un tel fil est de l'ordre de 5 g d'au:

$$mg \sim 5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Pour que la force soit comparable il faut que $i \geq \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-6}}} \sim 100 \text{ A}$
ce qui n'est pas réalisable en TP en pratique.

9 - Accélérateur de particules ATLAS

1. On a huit spires:



En première approximation,
on peut effectivement approximer
ces spires par un solénoïde

toroïdal même si ici on va clairement avoir des fuites de champ
magnétique entre les spires.

2. a. On se place dans le système de coordonnées cylindriques d'axe
(Oz) correspondant à l'axe du tore. Soit M un point de
l'espace. Le plan passant par M et contenant (Oz) est plan
de symétrie de la distribution de courants donc $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\phi$
Or on se conserve par rotation autour de (Oz):

$$\boxed{\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\phi}$$

On choisit pour Γ le cercle d'axe (Oz) passant par M et
orienté selon $\vec{e}_\phi$. Alors par le théorème d'Ampère:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r, z) = \mu_0 I_{\text{enclos}} = \begin{cases} \mu_0 N i & \text{si M est dans le tore} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc:
$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \vec{e}_\theta & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

b. Si $R \gg a$ alors à l'intérieur du solénoïde on a $r = R$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \vec{e}_\theta = \mu_0 n i \vec{e}_\theta$ où n est le nombre de spires par unité de longueur. On retrouve le cas du solénoïde infini car la courbure est devenue négligeable.

3. On a $N = 8$, $i = 2 \cdot 10^4$ A et on estime qu'il y a 3 m entre chaque spire d'où $2\pi R = 8 \times 3 \text{ m} \Leftrightarrow R \approx 1 \text{ m}$
Ainsi: $\|\vec{B}\| \sim \frac{\mu_0 N i}{2\pi R} \sim \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8 \cdot 2 \cdot 10^4}{2\pi \cdot 1} \sim 8 \text{ mT}$
Ce champ est très supérieur au champ terrestre ($\sim 10^{-5} \text{ T}$).

4. Ce mouvement est un mouvement hélicoïdal: les électrons tournent autour des lignes de champ à la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{qB}{m}$. Le rayon de courbure de cette trajectoire est $R_c = \frac{m\vec{v}}{qB}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de l'électron.

En supposant que les électrons vont à une vitesse proche de celle de la lumière $\|\vec{v}\| \sim c$ (en général c'est l'objectif dans un accélérateur de particules) on a $R_c \sim \frac{cm}{eB} \sim 0,2 \text{ m}$

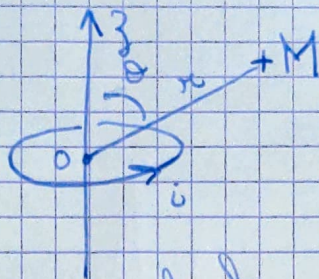
On a bien $R_c < a$ donc en tournant autour des lignes de champ les électrons ne vont pas sortir du tore: ils restent bien piégés le long du champ magnétique.

II - Dipôle magnétique

10 - Champ magnétique terrestre

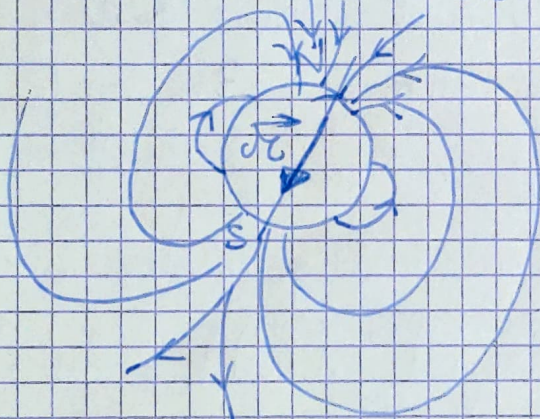
1. La Terre correspond à un dipôle magnétique équivalent à

une boucle de courant :



Soit M un point de l'espace, le plan passant par M et contenant (Oz) est plan d'antisymétrie de la distribution de courant donc $\vec{B}$ est dans ce plan. De plus la distribution est invariante par rotation autour de (Oz) donc les composantes de $\vec{B}$ ne dépendent pas de φ . Ainsi : $\vec{B} = B_r(r, \theta) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$

On a :



2. Au pôle Nord, $\theta = \pi$ et $\|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \times 2$

D'où $M = \frac{2\pi R^3 \|\vec{B}\|}{\mu_0} = 7,8 \cdot 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$

3. À Pointe-à-Pierre : $\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda = 90 + 16 = 106^\circ$

$\Rightarrow \cos \theta = -0,28$ et $\sin \theta = 0,96$

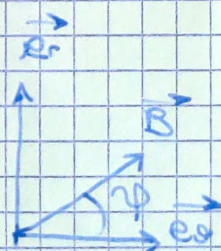
Alors $\|\vec{B}\|_{PP} = \frac{\mu_0 M}{4\pi R^3} \sqrt{1 + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$

$= \|\vec{B}_{\text{pôle Nord}}\| \times \sqrt{\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta}$

$\boxed{\|\vec{B}\|_{PP} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ T}}$

Son inclinaison ψ est telle que : $\tan \psi = \frac{B_\theta}{B_r}$

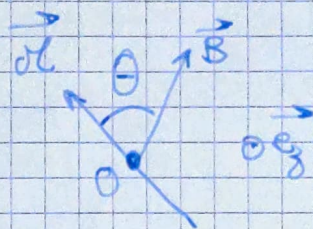
D'où $\psi = \arctan\left(\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}\right) = \boxed{-30^\circ}$



4. Avec mon magnétomètre je trouve $\|\vec{B}\| = 3,4 \cdot 10^{-5} \text{ T}$
Et pour aligner mon téléphone avec $\vec{B}$ je dois effectivement

l'inclinaison de 30° environ vers le bas.

11- Optimisation d'une boussole



1. On propose $L = 2 \text{ cm}$ et $m = 2 \text{ g}$.

2. a. L'aiguille est soumise au champ magnétique qui exerce un couple $\vec{T} = \vec{M} \wedge \vec{B} = -MB \sin(\theta) \vec{e}_z$

Elle est également soumise à son poids de moment nul selon $\vec{e}_z$ en tout point ($\vec{P} \parallel \vec{e}_z$) et à la réaction du support dont le moment selon $\vec{e}_z$ en O est nul (faisceau pivot parfaite). On a ainsi, par le théorème du moment cinétique appliqué à l'aiguille dans R_T galiléen au point O fixe et projeté sur $\vec{e}_z$:

$$J \ddot{\theta} + MB \sin \theta = 0$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 (*) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{MB}{J}} = \sqrt{\frac{2MB}{mL^2}}$$

b. On a alors $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{2MB}}$

D'où: $M = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{mL^2}{2B} = \boxed{8,8 \cdot 10^{-2} \text{ A} \cdot \text{m}^2}$

c. D'après (*) l'aiguille oscille autour de la position d'équilibre ce qui n'est pas très pratique pour lire la direction du Nord.

3. a. Avec cette nouvelle force on va avoir une perte d'énergie et un amortissement des oscillations, l'aiguille va atteindre sa position d'équilibre et y rester.

b. L'équation devient: $J \ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + MB \sin \theta = 0$

Soit $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{MB}{J}} \quad Q = \frac{\sqrt{MBJ}}{\alpha}$

Si $Q > \frac{1}{2}$ on a des oscillations amorties:

$$\theta = \theta_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{où } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Si $Q < \frac{1}{2}$ on a des exponentielles décroissantes :

$$\theta(t) = \theta_0 \times [Ae^{-\omega_+ t} + Be^{-\omega_- t}]$$

$$\text{où } \omega_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right]$$

La décroissance la plus lente correspond à $\omega_- = -\frac{\omega_0}{2Q} (1 - \sqrt{1 - 4Q^2})$

c. Si $\alpha \rightarrow 0$ on a des oscillations et on n'atteint pas l'équilibre.
Si $\alpha \rightarrow \infty$ alors $Q \rightarrow 0$ et $\omega_- \rightarrow 0$ donc l'exponentielle décroissante a un temps caractéristique infiniment long et on mettra très longtemps à atteindre l'équilibre.

On a la décroissance la plus rapide pour $Q = \frac{1}{2}$.

$$\text{On } \omega_0/Q = \frac{\alpha}{J} \Leftrightarrow \alpha = 2J\omega_0 = \boxed{\frac{4\mu_0 J}{T}}$$

d. On doit donc choisir $\eta = \frac{4\mu_0 J}{TL^3} = \frac{\mu_0 m_e L^2}{3T L^3}$

(car $J = \frac{1}{2} m_e L^2$) soit $\boxed{\eta = \frac{\mu_0 m_e}{3T L}}$

A.N : on trouve $\eta \sim 10^{-11} \text{ Pa} \cdot \text{s}$

On préfère ainsi plutôt de l'huile (comme de la silicone qu'on trouve effectivement souvent dans les boussoles).

12 - Facteur gyromagnétique de l'électron

1. a. On a un proton autour duquel orbite un électron soumis à la seule force électrique.

b. On se place dans R_f galiléen en supprimant l'atome fixe, alors par le théorème de moment cinétique appliqué à l'électron : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{r}_0 \wedge (\vec{F}) = \vec{0}$ car $\vec{F}$ est central ^{le rayon de l'atome fixe}

Or $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \perp \vec{OM}$ donc $\vec{OM}$ reste dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$: le mouvement est plan.

c. On se place dans les coordonnées polaires de ce plan,

on a alors $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ d'où $\sigma = m r^2 \dot{\theta}$ où r est le rayon constant de la trajectoire.

Or l'électron n'est soumis qu'à $\vec{F}_{el} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, en lui appliquant le PFD dans R_T galiléen on trouve:

$$-m r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

D'où, en remplaçant $\dot{\theta}$ par $\frac{\sigma}{m r^2}$: $\frac{\sigma^2}{m r^3} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

On en déduit: $\sigma = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{r m}{\pi \epsilon_0}}$

2. a. L'électron peut être considéré comme une charge parcourant un fil fictif correspondant à sa trajectoire.

b. $i = \frac{dq}{dt} = \frac{q}{T} = -\frac{e \cdot \dot{\theta}}{2\pi} = -\frac{e \sigma}{2\pi r^2 m}$

c. On a $\vec{H} = i \cdot \pi r^2 \vec{e}_z = -\frac{e \sigma}{2m} \vec{e}_z$.

3. a. Ici on a $\gamma = -\frac{e}{2m} \approx 8,8 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \cdot \text{T}^{-1}$

b. Bien qu'on ne puisse pas vérifier cette valeur à la précision des mesures, on voit clairement que $\gamma_{\text{théorique}} \neq \gamma_{\text{mes}}$. Cela est dû à des phénomènes quantiques, et, dans une moindre mesure, relativistes.