

DM4 - Correction

I - Étude d'un condensateur sphérique

1. Soit M un point quelconque de l'espace. Tous les plans contenant (OM) sont plans de symétrie de la distribution de charges, donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans tous ces plans et $\vec{E}(M) = F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$.
Or la distribution de charges étant invariante par rotation d'angle θ et φ :

$$\boxed{\vec{E} = E(r) \vec{e}_r}$$

2. Soit Σ une sphère de rayon $r \in]R_1, R_2[$, passant par un point M entre les armatures. La charge intérieure à Σ est $Q_{int} = Q$, par le théorème de Gauss :

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

D'où :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r}$$

3. On constate que le champ est le même que si toute la charge était concentrée en O , par conséquent c'est aussi le cas du potentiel :

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + C$$

(Sinon, on peut calculer $\Delta V = -\nabla \cdot \vec{E}$).

$$\text{Ainsi : } U = V(R_1) - V(R_2) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

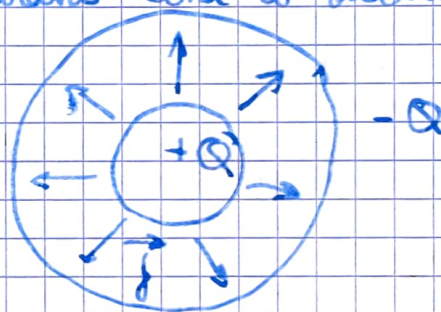
ou encore :

$$U = \frac{Q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}$$

4. La capacité est définie par $Q = CV$, ainsi :

$$C = 4\pi\epsilon_0 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

5. Les charges positives sont attirées vers les potentiels faibles donc vers l'extérieur ; le courant tend à décharger le condensateur :



2 - Analyse du préambule

6. Le champ $\vec{E}$ atteint environ $20 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$ ce qui indique une capacité faible ($U = \frac{Q}{C}$) au regard de la taille du condensateur.

$$\text{Ici } R_1 = R_T = 6380 \text{ km} \approx 6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$R_2 \approx R_1 \text{ et } R_2 - R_1 = 80 \text{ km} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ m}$$

$$\text{Ainsi : } C \approx 4 \times 8 \times 10^{-12} \times \frac{36 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^4} \approx \boxed{5,4 \cdot 10^{-2} \text{ F}}$$

7. Lorsque le temps est clément, $Q < 0$ et le champ $\vec{E}$ est orienté vers le bas d'après la figure 1. En cas d'orage, c'est le contraire : $Q > 0$ et $\vec{E}$ est orienté vers le haut.

8. L'éclair correspond à une décharge interne au nuage, donc que la foudre atteint le sol. On voit à droite de la fig. 1 que le champ électrique peut être orienté vers le haut ou vers le

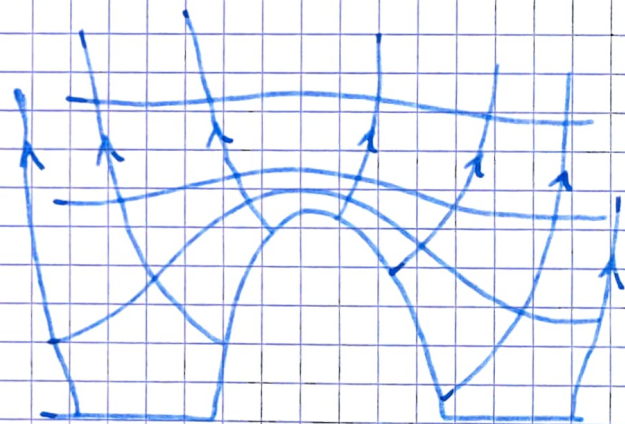
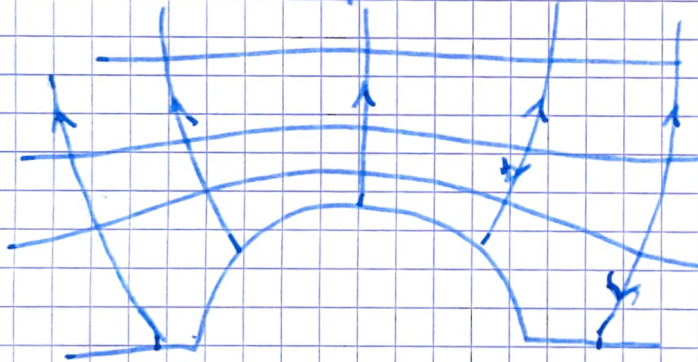
bar selon la position exacte sous le nuage; et il en est donc de même pour la foudre.

9. La base du nuage se situe à $d=2\text{ km}$ d'après l'écranée (Rq: dans les tropiques, et notamment en Guadeloupe, il faut plutôt prendre 500 à 800 m).

Alors:
$$U \approx \|\vec{E}\| \times d \approx 2 \cdot 10^4 \times 2 \cdot 10^3 \approx \boxed{4 \cdot 10^7 \text{ V}}$$

3 - Effet de pointe

10.



$\vec{E}$ est orthogonal aux équipotentielles et orienté vers les potentiels décroissants.

$\|\vec{E}\|$ est maximal lorsque les lignes de champ sont les plus serrées donc au voisinage du sommet des aspérités.

11. On sait que $\|\vec{E}\|$ est inversement proportionnel à la distance entre équipotentielles. Si on choisit le sol ($V=0$) et la première équipotentielle dessinée, au sommet de l'aspérité cette distance est divisée:

* par deux pour la sphère: $\|\vec{E}\| \approx 10 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$

* par quatre pour l'ellipse: $\|\vec{E}\| \approx 20 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$

12. Le champ au niveau de l'aspérité est proche de la valeur de

claquage. Les doigts ajoutent un effet de pointe supplémentaire permettant de rendre l'air conducteur, ce qui est rendu visible par un effluve violet.

(R_g : cet effluve, non dangereux, indique cependant que la foudre pourrait s'abattre à proximité immédiate, ce qui est bien plus dangereux.)

L'estimation de plusieurs centaines de milliers de Volts est un peu haute, on s'attend plutôt à 30-40 kV selon la taille de la personne.

4 - Foudre et tonnerre



13. Soit M un point de l'espace dans la colonne, alors $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie de la distribution de courants donc $\vec{B}$ est normal à ce plan: $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_z$

Le problème étant invariant par translation selon z et par rotation d'angle θ : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$.

On applique le théorème d'Ampère au contour Γ défini comme le cercle d'axe Oz passant par M et orienté selon $+\vec{e}_\theta$:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enclosé}}$$

$$\text{Or } \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B(r) \quad \text{et} \quad I_{\text{enclosé}} = j \times \pi r^2$$

$$\text{D'où } B(r) = \frac{\mu_0 j r}{2\pi} \quad \text{ainsi} \quad \boxed{\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j r \vec{e}_\theta}$$

14. On a $\vec{j} = -n e \vec{v} = j \vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{v} = -\frac{j}{ne} \vec{e}_z}$

15. On s'intéresse au petit élément de volume à droite de la figure. Il est le siège d'un courant élémentaire :

$$di = r dr d\theta \times j \quad \text{ou une longueur } dl = dz \vec{e}_z$$

Il subit donc une force de Laplace :

$$\begin{aligned} \vec{dF}_{\text{Lap}} &= di \times dl \wedge \vec{B} = \underbrace{r dr d\theta dz}_{= d\tau} \times j \vec{e}_z \wedge B(\rho) \vec{e}_\phi \\ &= j \wedge B d\tau \\ &= -j \times r dr d\theta dz \times \frac{1}{2} \mu_0 j r \vec{e}_r \\ &= -\frac{\mu_0 j^2 r^2}{2} dr d\theta dz \vec{e}_r \end{aligned}$$

~~En intégrant :~~

L'élément est également soumis aux forces de pression en

$$r \text{ et en } r+dr = \vec{dF}_p = \underbrace{p(r) dS \vec{e}_r}_{\text{face intérieure}} - \underbrace{p(r+dr) dS \vec{e}_r}_{\text{face extérieure}}$$

$$= - \frac{dp}{dr} \times dS dr \vec{e}_r$$

$$= - \frac{dp}{dr} \times r dr d\theta dz \vec{e}_r$$

À l'équilibre, ces forces se compensent, en supposant le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{dF}_p + \vec{dF}_{\text{Lap}} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \frac{dp}{dr} \times r dr d\theta dz + \frac{1}{2} \mu_0 j^2 r^2 dr d\theta dz = 0$$

On en tire $\boxed{\frac{dp}{dr} + \alpha r = 0 \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{1}{2} \mu_0 j^2}$

16. En $r=R$ la pression est égale à la pression atmosphérique p_0 . Alors :

$$p(r) = p_0 + \int_R^r \frac{dp}{dr} dr$$

$$= p_0 - \frac{\mu_0 j^2}{2} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{R^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p(r) = p_0 + \frac{\mu_0 j^2}{4} (R^2 - r^2)}$$

En particulier $p(r=0) = p_0 + \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4}$

On en déduit $n(r=0) = \frac{p(r=0)}{k_B T} = \underbrace{\frac{p_0}{k_B T}}_{\text{terme a priori négligeable}} + \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4 k_B T}$

17. On sait que $\mathbf{I} = i R^2 \times \mathbf{j}$

Et on compte le nombre d'électrons dans une section longueur dz :

$$N \times dz = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R n(r) \times r dr d\theta dz$$

$$= 2\pi dz \times \int_0^R n(r) dr$$

$$= 2\pi dz \times \int_0^R \frac{p(r)}{k_B T} dr$$

$$= \frac{2\pi dz}{k_B T} \times \frac{\mu_0 j^2}{4} \int_0^R (R^2 - r^2) dr$$

$$= \frac{\mu_0 \pi dz}{2 k_B T} j^2 \times \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \pi j^2}{2 \times 4 k_B T} R^4$$

ainsi

$$N = \frac{\mu_0 \pi R^4}{8 k_B T} \times \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2$$

ou encore

$$\boxed{N = \frac{\mu_0 I^2}{8 \pi k_B T}}$$

18. On sait que $N \sim n \times \pi R^2$ en ordre de grandeur
 $\sim 10^{25} \cdot 10^{-6} \cdot 3$
 $\sim 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1}$

$$\text{Et } j \sim \frac{I}{\pi R^2} \sim \frac{10^4}{3 \cdot 10^{-6}} \sim 30 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\text{Enfin: } T \sim \frac{\mu_0 I^2}{8 \pi k_B N} \sim \frac{12 \cdot 10^{-7} \cdot 10^8}{24 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^{19}} \sim \boxed{10^4 \text{ K}}$$

$$\text{Et } P(0) \sim n k_B T \sim 10^{25} \cdot 10^{-23} \cdot 10^4 \sim 10^6 \text{ Pa} \sim \boxed{10 \text{ bar}}$$

19. La forte température de l'air produit une émission lumineuse (loi du corps noir) de la même manière qu'une flamme. À une telle température, la lumière est bleue ou violette.

20. Ceci crée une onde de choc sonore (effet non linéaire) qui va se propager dans l'air à la vitesse du son et provoquer un son de claquement.