

DM 4 - Correction

I - Étude d'un condensateur sphérique

1. Soit M un point de l'espace. Tous les plans contenant le centre O des sphères et M sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc $\vec{E}(M)$ est dans tous ces plans et $\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$

De plus on a invariance par rotation selon θ et φ :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

2. On choisit comme surface de Gauss une sphère de centre O et de rayon r :
- $$\phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

Par le th de Gauss : $4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

* Si $r < R_1$: $Q_{\text{int}} = 0$ et $\vec{E} = \vec{0}$

* Si $R_1 < r < R_2$: $Q_{\text{int}} = Q$ $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

* Si $r > R_2$: $Q_{\text{int}} = 0$

3. On a $U_1 - U_2 = \int_{\text{armature 1}}^{\text{armature 2}} \text{grad}(V) \cdot d\vec{l}$

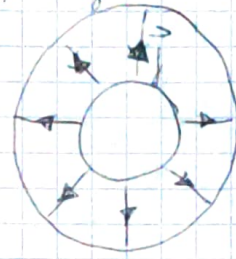
$$= \int_{\text{armature 1}}^{\text{armature 2}} -\text{grad}(V) \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_{\text{armature 1}}^{\text{armature 2}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr$$

$$U_1 - U_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

4. On a $Q = CU$ d'où

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

5. Le courant va vers les potentiels plus faibles donc de R_1 à R_2 ,
il recharge le condensateur :



II - Analyse du préambule

6. On a $R_2 - R_1 \approx 80 \text{ km}$ $R_1 = 6370 \text{ km}$ $R_2 = 6450 \text{ km}$
 et $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \approx \boxed{57 \text{ nF}}$

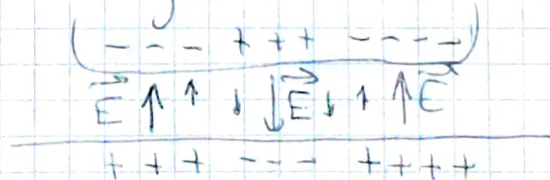
C'est très élevé par rapport à ce qu'on a en TP, de l'ordre du nF au 1 μF maximum.

7. On a vu que par temps d'été $\vec{E}$ est suivant $-\vec{e}_r$ (figure 1 à gauche). En cas d'orage c'est le contraire (figure 1 à droite).

8. Claquage interne : éclairs.

Foudre : claquage entre la base du nuage et le sol.

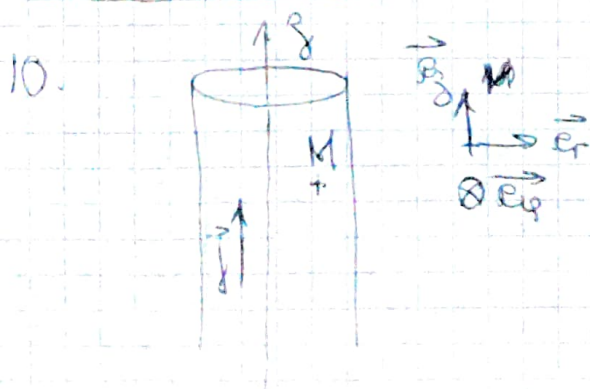
La foudre peut être ascendante car selon l'énoncé il y a à la base des charges positives et négatives à la base du nuage (fig 1 à droite)



9. On a $U \approx \|\vec{E}\| \times h$ $\leftarrow$ hauteur de la base du nuage
 $\approx 20 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1} \times 2000 \text{ m}$

$$\boxed{U \approx 4 \cdot 10^4 \text{ V}}$$

III - Foudre et tonnerre



Le plan passant par M et contenant (B_0) est plan de symétrie de la distribution de courant donc antisymétrie de $\vec{B}$.
 Ainsi $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$.

On a invariance par rotation autour de (Oz) et par translation selon $\vec{e}_z$ donc $\boxed{\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\varphi}$

On applique le théorème d'Ampère sur un contour de rayon r passant par M :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \times B(r)$$

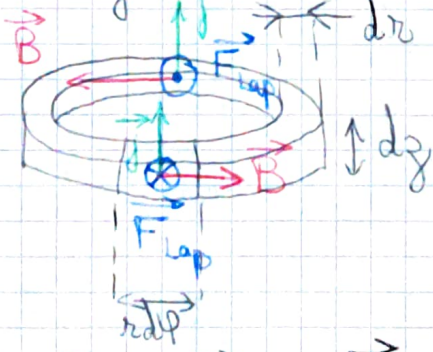
$$I_{\text{enclosée}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \pi r^2 \times j \quad \text{car } M \text{ est à l'intérieur de la colonne}$$

$$\text{D'où: } B(r) = \frac{\mu_0 I \pi r^2 j}{2\pi r} = \frac{1}{2} \mu_0 j r$$

$$\text{Et } \boxed{\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 j r \vec{e}_\varphi}$$

11. On a $\vec{j} = -n e \vec{v} \Leftrightarrow \vec{v} = -\frac{1}{n e} \vec{j} = -\frac{1}{n e} \vec{e}_z$

12.



On a une force de Laplace qui agit, la force est:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{Lap}} &= i d\vec{l} \wedge \vec{B} \\ &= \vec{j} \wedge \vec{B} dS \end{aligned}$$

$$\text{Or } \vec{j} = j \vec{e}_z \quad \vec{B} = B(r) \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{j} \wedge \vec{B} = -j B(r) \vec{e}_r$$

$$\text{Et donc } d\vec{F}_{\text{Lap}} = -\frac{1}{2} \mu_0 j^2 r \times dz \vec{e}_r = -\frac{1}{2} \mu_0 j^2 r^2 d\varphi dz dr \vec{e}_r$$

Or l'élément dz est aussi soumis aux forces de pression sur chaque surface:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{\text{pression}} &= +P(r) dS \vec{e}_r - P(r+dr) dS \vec{e}_r \\ &= -\frac{dP}{dr} \cdot dS dr \vec{e}_r = -\frac{dP}{dr} \cdot dz \vec{e}_r \end{aligned}$$

À l'équilibre, en appliquant le PFD à dz dans R_T galiléen:

$$\vec{0} = d\vec{F}_{\text{Lap}} + d\vec{F}_{\text{pression}} \Leftrightarrow 0 = -\frac{dP}{dr} - \frac{1}{2} \mu_0 j^2 r$$

Ainsi $\boxed{\frac{dP}{dz} + \alpha r = 0} \quad ; \quad \alpha = \frac{\mu_0 j^2}{2}$

13. On suppose $P = P^0 = 10^5 \text{ Pa}$ en $r = R$.

Et: $P(r) = C - \frac{\alpha r^2}{2} = P^0 + \frac{\alpha}{2}(R^2 - r^2)$

$P(r) = P^0 + \frac{\mu_0 j^2}{4}(R^2 - r^2)$

Où $P = n(r) \cdot k_B \cdot T$ $\left(= \underbrace{n(r) \cdot N_A}_{\text{nb de moles par unité de volume}} \times R_g \times T \right)$ ← état des gaz parfaits

D'où $n(r) = \frac{P^0}{k_B T} + \frac{\mu_0 j^2}{4 k_B T} (R^2 - r^2) =$

Au centre de la colonne: $\boxed{P = P^0 + \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4}} \approx \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4}$

Et $n(0) = n^0 + \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4 k_B T} \approx \frac{\mu_0 j^2 R^2}{4 k_B T} \quad (*)$

14. On a $N dz = \int_L \int_0^{2\pi} \int_0^R n(r) r dr d\varphi dz$ nombre d'électrons dans une tranche dz de la colonne

Donc $N = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R n(r) r dr d\varphi dz = \frac{2\pi \mu_0 j^2}{4 k_B T} \int_0^L \int_0^R (R^2 - r^2) r dr d\varphi dz$

$N = \frac{2\pi \mu_0 j^2}{4 k_B T} \times \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{2\pi \mu_0}{4 k_B T} \times \left(\frac{I}{\pi R^2} \right)^2 \times \frac{R^4}{4} = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B T}$

15. On a $j = \frac{I}{\pi R^2} \sim \frac{10^4}{\pi \cdot 10^{-6}} \sim 3 \cdot 10^9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$

Et $N = n_0 \times \pi R^2 \sim 10^{25} \times \pi \cdot 10^{-6} \sim 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-1}$

D'où: $T \sim \frac{\mu_0 I^2}{8\pi k_B N} \sim \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^8}{8\pi \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^{19}} \sim \boxed{10\,000 \text{ K}}$

Et $P = n k_B T \sim 10^{25} \cdot 10^{-23} \cdot 10^4 \sim 10^6 \text{ Pa} = \boxed{10 \text{ bar}}$ en ordre de grandeur

16. L'air étant très chaud, il émet une lumière selon la loi du corps noir (comme le Soleil qui est à 6000 K)

17. La supression crée une onde sonore et même une onde de choc ($v > c_{\text{son}}$)