

Gravitation

Chapitre 1

Avec solutions

I - Pendules (révisions MPSI)

1 Sismomètre à pendule

Cet exercice est un prolongement des révisions de mécanique faites en cours. Il permet aussi de réviser le filtrage linéaire.

Un sismomètre à pendule est constitué d'un pendule simple attaché à un support solide du sol. L'objectif est de mesurer le déplacement du sol, $X(t)$, en fonction du temps. Puisqu'on ne peut pas mesurer ce déplacement directement (on n'a pas de référence immobile à laquelle on pourrait comparer le mouvement du sol), on utilise à la place une mesure de l'angle $\theta(t)$ entre le pendule et la verticale. Lorsque le sol se déplace, le pendule commence en effet à osciller.

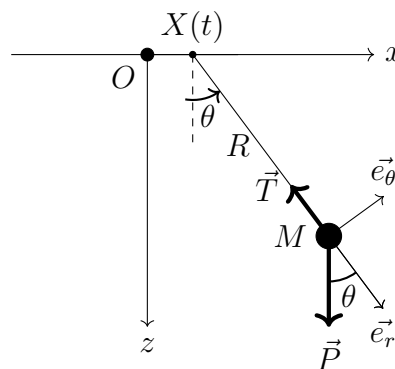


Figure 1: Schéma simplifié du sismomètre à pendule. Notons que l'origine du repère de coordonnées sphériques se déplace avec le temps en raison du séisme et se trouve sur l'axe (Ox) avec la coordonnée $X(t)$. Schéma adapté à partir d'un schéma de Gabriel Pereira Coelho.

Nous adoptons deux systèmes de coordonnées, polaire et cartésien. Au cours de l'exercice, on pourra utiliser les vecteurs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ au choix en prenant l'expression la plus simple possible (il n'est pas nécessaire de toujours se ramener au même système de coordonnées).

1. Nous souhaitons établir l'équation qui régit l'évolution de l'angle θ , en fonction du déplacement du sol $X(t)$.

(a) Peut-on utiliser le théorème du moment cinétique ? Pourquoi ?

On pourrait vouloir utiliser le théorème du moment cinétique au point de fixation du pendule (en $x = X(t)$). Mais ce point étant mobile, les hypothèses du théorème du moment cinétique ne sont pas vérifiées.

- (b) La force de tension du fil travaille-t-elle ? En déduire si une résolution par une méthode énergétique est possible.

Comme le point d'attache du pendule bouge, la vitesse de M n'est pas forcément orientée selon $\vec{e}_\theta$: $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{X}\vec{e}_x$. Cette vitesse a une composante non nulle selon $\vec{e}_r$, donc la force de tension travaille dans le référentiel terrestre galiléen. Ceci ne rend pas utile une résolution énergétique, puisque cette force de tension est inconnue.

2. (a) Le référentiel terrestre peut-il être considéré comme galiléen ?

Non, car la Terre bouge à cause du séisme. On peut se placer dans le référentiel $\mathcal{R}$ défini comme le référentiel associé à la position hypothétique du sol s'il n'y avait pas de séisme.

- (b) Établir l'expression de la vitesse du point M dans un référentiel galiléen, en fonction de la vitesse de déplacement du sol $\dot{X}$, la longueur du pendule L , la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et les vecteurs unitaires appropriés.

On a par composition des vitesses

$$\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \vec{v}(M/\text{sol}) + \vec{v}(\text{sol}/\mathcal{R}) \quad (1)$$

$$= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{X}\vec{e}_x \quad (2)$$

- (c) Faire un bilan des forces. Sur quel axe a-t-on intérêt à projeter le principe fondamental de la dynamique ?

La masse est soumise à :

- La tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ de norme inconnue ;
- Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

On a donc intérêt à projeter le PFD sur $\vec{e}_\theta$ pour éliminer la tension.

- (d) Montrer que, dans le cadre de l'approximation des petits angles, l'équation du mouvement peut s'écrire sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{1}{L}\ddot{X} \quad (3)$$

On projette le PFD selon $\vec{e}_\theta$:

$$m \left(\frac{d}{dt}(R\dot{\theta}) + \ddot{X} \cos \theta \right) = -mg \sin \theta \quad (4)$$

Ou encore, dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$mR\ddot{\theta} + mg\theta = -m\ddot{X} \quad (5)$$

En notant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre du pendule simple :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{1}{R} \ddot{X}} \quad (6)$$

3. Nous allons maintenant étudier la réponse du sismomètre à un séisme. Nous rappelons que la grandeur mesurée est θ .

- (a) Quel est la variable qui correspond au forçage du système ? Quelle variable correspond à la réponse / sortie ?

Le système est forcé par le mouvement du sol (X). On mesure en réponse l'angle θ , qui est la réponse du système (variable de sortie).

- (b) Calculer la fonction de transfert du système. De quel type de filtre s'agit-il ? Commenter son utilité pour distinguer les séismes d'autres signaux naturels comme les marées.

En notant :

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_0 e^{j\omega t} \quad \underline{X} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$$

On a :

$$(\omega_0^2 - \omega^2) \underline{\theta} = +\frac{1}{R} \omega^2 \underline{X}$$

Ou encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{\theta}}{\underline{X}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \quad |\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{R}$$

C'est un filtre passe-haut du second ordre (avec facteur de qualité infini, car on a négligé les frottements). Il permet de sélectionner les mouvements de haute fréquence et d'éliminer par exemple les marées qui ont une période de l'ordre de 12h.

- (c) La figure 2 montre un enregistrement d'un séisme. Proposer une fréquence de

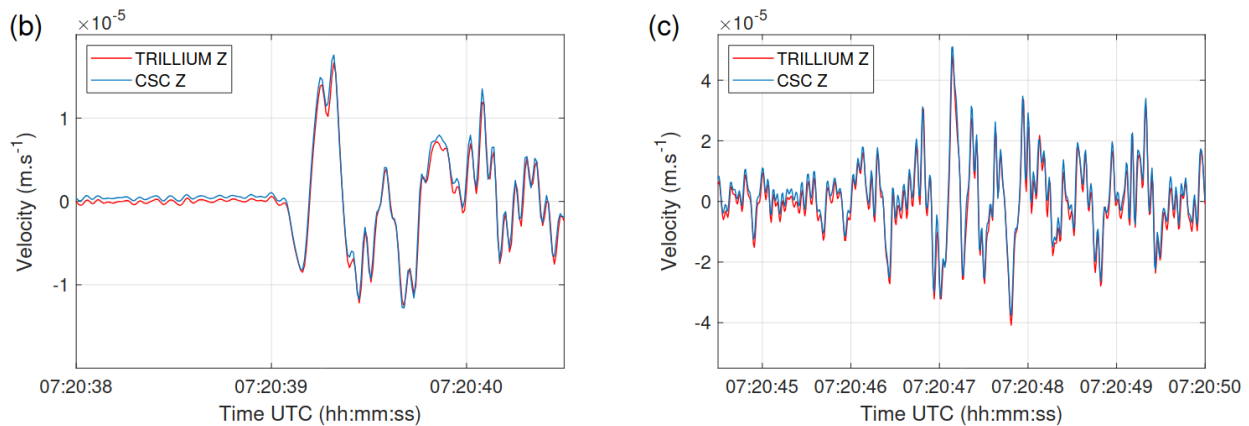


Figure 2: Enregistrements du séisme du Moule le 25 octobre 2019 (magnitude 4.1) par deux sismomètres sur la Soufrière. Source : Romain Feron et al., *First optical seismometer at the top of La Soufrière volcano, Guadeloupe*. Seismological Research Letters, 2020.

coupure appropriée pour le filtre. En déduire la longueur L de la tige nécessaire pour pouvoir détecter le séisme.

On constate que les oscillateurs sismiques ont une période maximale $T \sim 0,5$ s. On souhaite donc une fréquence de coupure plus petite que $\frac{1}{T} = 2$ Hz. On peut prendre par exemple $f_c = 1$ Hz.

On a $f_c = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}$ soit :

$$R = \frac{g}{(2\pi f_c)^2} \sim \frac{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{(6 \text{ s}^{-1})^2} \sim \boxed{0,3 \text{ m}}$$

(d) A votre avis, pourquoi privilégie-t-on plutôt les sismomètres à ressort aujourd'hui ? (Question ouverte, plusieurs réponses possibles).

C'est encombrant : pour avoir un appareil plus petit on privilégie une autre technologie comme un ressort. En effet, la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ne dépend alors plus de la taille du système, et on peut plus facilement miniaturiser le sismomètre.

2 Pendule pesant

On considère un pendule pesant $\mathcal{P}$ constitué d'une tige homogène de masse m de longueur L au bout de laquelle est attachée une masse M . La tige est liée à l'axe (Δ) par une liaison pivot parfaite.

1. Quel est le moment d'inertie de ce pendule autour de son axe de rotation ? (On rappelle

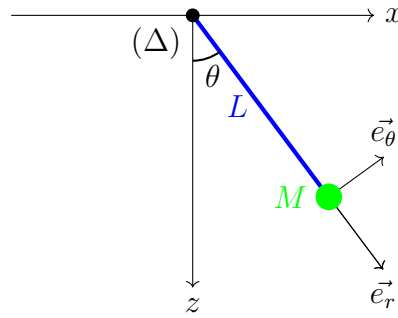


Figure 3: Schéma simplifié d'un pendule pesant, composé d'une tige rigide (en bleu) et d'une masse ponctuelle (en vert), en rotation autour d'un axe (Δ)

que le moment d'inertie d'une barre homogène de masse m et de longueur L autour d'un axe passant perpendiculairement par un de ses bords est $J = \frac{1}{3}mL^2$.

Le moment d'inertie est la somme du moment d'inertie de la tige et de la masse.

On rappelle que J est défini par $L_{(\Delta)} = J \cdot \dot{\theta}$.

On a alors pour la masse :

$$L_{(\Delta)} = M \underbrace{(L\vec{e}_r \wedge L\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}_{\text{moment cinétique par rapport à un point de } (\Delta)} \cdot \underbrace{\vec{e}_z}_{\text{projeté sur } (\Delta)}$$

$$\text{Soit } L_{(\Delta)} = ML \cdot L\dot{\theta} = ML^2\dot{\theta} \implies J_{\text{masse}} = ML^2.$$

Et pour la tige : $J_{\text{tige}} = \frac{1}{3}mL^2$ (énoncé).

D'où :

$$J = \left(\frac{1}{3}m + M \right) L^2$$

- Déterminer le moment par rapport à l'axe de rotation des forces exercées sur le pendule $\mathcal{P}$.

Le pendule est soumis à :

- La réaction du support au niveau de la liaison pivot, qui est telle que :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{\text{support}}) = 0$$

- Le poids de la masse qui s'applique en M :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_{\text{masse}}) = (L\vec{e}_r \wedge -Mg\vec{e}_z) \cdot \vec{e}_y = -MLg \sin \theta$$

- Le poids de la tige qui s'applique à son centre de gravité en $r = \frac{L}{2}$:

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_{\text{tige}}) = \left(\frac{L}{2}\vec{e}_r \wedge -mg\vec{e}_z\right) \cdot \vec{e}_y = -\frac{m}{2}Lg \sin \theta$$

D'où $\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = -\left(\frac{m}{2} + M\right)Lg \sin \theta}$

3. En déduire l'équation horaire du mouvement et la période des oscillations.
4. A quelle condition peut-on assimiler ce pendule à un pendule simple ?

On applique le théorème du moment cinétique au pendule dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) \iff J\ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{2} + M\right)Lg \sin \theta$$

Or $J = \left(\frac{m}{3} + M\right)L^2$ donc on obtient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{\frac{m}{2} + M}{\frac{m}{3} + M} \cdot \frac{g}{L}$$

en faisant l'approximation des petits angles.

La période des oscillations est :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{m}{3} + M}{\frac{m}{2} + M}}}$$

3 Pendule amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{i}$ (avec $g = 9,81 \cdot 10^{-2}$), $\vec{i}$ étant un vecteur unitaire de l'axe $O\vec{x}$. On note l'angle orienté $\theta = (O\vec{x}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{i}, \vec{u})$ où $\vec{u}$ est un vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{OM}$.

On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par une force $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, $\vec{v}$ désigne la vitesse du point M et α est une constante positive.

En se limitant aux petits angles, l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ est:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2m}{\alpha}.$$

1. Quelle est la dimension de τ et son unité dans le système international ? Quelle est son interprétation physique ? Quel est son lien avec le facteur de qualité Q ?

τ est un temps en secondes et correspond au temps caractéristique d'amortissement. On a ici, par identification avec la forme canonique d'une équation du second degré :

$$Q = \frac{\tau\omega_0}{2}$$

2. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

On a un régime pseudo-périodique si $Q > 1/2$, donc si $\omega_0\tau > 1$, donc si $\tau > 1/\omega_0$: le temps caractéristique d'amortissement doit être plus grand que la période d'oscillation en régime permanent.

3. Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T .

$$\text{On a } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} ; \text{ et } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

On appelle décrement logarithmique la quantité $\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right)$ où T est la pseudo-période et t le temps.

4. Exprimer δ en fonction de T et τ .

On peut écrire $\theta(t)$ sous la forme :

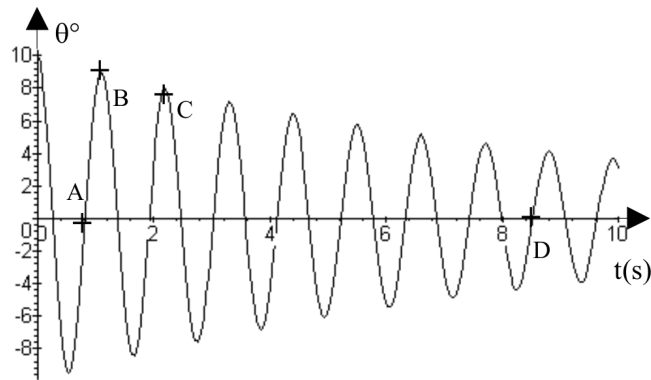
$$\theta(t) = e^{-\omega_0 t/(2Q)} (A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)).$$

et alors :

$$\theta(t+T) = e^{-\omega_0(t+T)/(2Q)} (A_1 \cos(\omega(t+T)) + A_2 \sin(\omega(t+T))) = \frac{e^{-\omega_0(t+T)/(2Q)}}{e^{-\omega_0 t/(2Q)}} (\theta(t)).$$

Donc finalement :

$$\delta = \ln \left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} \right) = \ln \left(\frac{e^{-\omega_0 t/(2Q)}}{e^{-\omega_0(t+T)/(2Q)}} \right) = \ln (e^{\omega_0 T/(2Q)}) = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \boxed{\frac{T}{\tau}}.$$



La figure ci-dessus représente les variations de θ avec le temps. La masse est $m = 470\text{g}$. On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t(s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

5. Calculer numériquement, à partir des valeurs expérimentales, le décrément logarithmique δ , le temps caractéristique τ et la constante du frottement α .

On utilise la position de deux crêtes successives :

$$\delta = \ln \left(\frac{8,95}{8,02} \right) = 0,11$$

La pseudo-période, par ailleurs, vaut :

$$T = \frac{8,25 - 0,53}{7} = 1,10$$

On en déduit le temps caractéristique :

$$\tau = \frac{T}{\delta} = \frac{1,10}{0,11} = 10$$

puis :

$$\alpha = \frac{2m}{\tau} = \frac{2 \times 0,470}{10} = 0,094/$$

II - Force de gravitation (révisions MPSI)

4 Bond sur la Lune

Dans l'album de Tintin "On a marché sur la Lune", le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond plus grand que sur Terre.

On assimile le mouvement du capitaine Haddock à celui de son centre de gravité M de masse m . Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30^\circ$ avec le sol. On note g_l l'accélération de la pesanteur à la surface de la Lune. En l'absence d'atmosphère, on peut considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

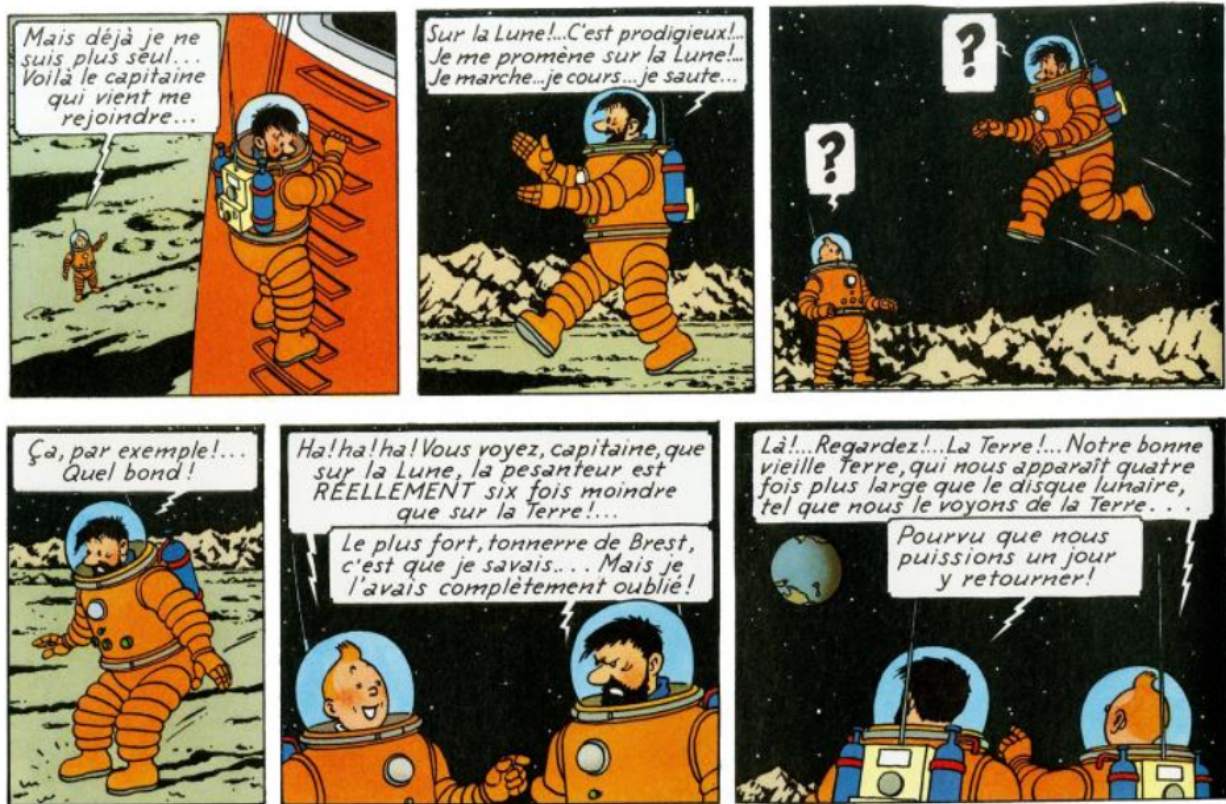


Figure 4: Extrait de *On a marché sur la Lune*.

1. (a) Définir le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.

Système : Le capitaine, assimilé à un point matériel.

Référentiel : le référentiel "lunaire", solidaire de la surface de la Lune, noté $\mathcal{R}_L$ et supposé galiléen (le mouvement est rapide par rapport à la rotation de la Lune)

- (b) Choisir un repère adapté à l'étude du mouvement.

On choisit le repère cartésien (xOz) où :

- Le capitaine est initialement à l'origine du repère
- $\vec{e}_z$ est orienté vers le haut
- Lors de son saut, le capitaine se déplace selon $+\vec{e}_x$

(c) Etablir un bilan des forces détaillé et en déduire les équations du mouvement.

Le capitaine est soumis uniquement à son poids $\vec{P} = -mg_l\vec{e}_z$. On lui applique le PFD dans $\mathcal{R}_L$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g_l \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = c^{\text{ste}} \\ \dot{z} = c^{\text{ste}} - g_l t \end{cases}$$

Or on sait que à $t = 0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

On en déduit après identification des constantes et intégration :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ z = v_0 \sin \alpha t - g_l \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

2. Déterminer l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de v_0 , α et g_l .

Le capitaine atterrit lorsque $z = 0$ soit $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g_L}$.

En réinjectant dans $x(t)$ on trouve :

$$d = v_0 \cos(\alpha) \times \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g_L}$$

Or $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha)$ donc

$$d = \frac{v_0^2}{g_L} \sin(2\alpha)$$

3. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur la Terre. Quelle est la distance horizontale parcourue par le capitaine sur la Lune, si elle correspond à un saut de $d = 1.5 \text{ m}$ sur la Terre ?

On constate que $d \propto \frac{1}{g_L}$. Si g est six fois plus faible alors d est six fois plus longue et :

$$d \simeq 6 \times 1,5 \text{ m} = \boxed{9 \text{ m}}$$

5 Expérience de Cavendish

Cet exercice est une résolution de problème et nécessite une certaine prise d'initiative : il faut modéliser le système de manière simplifiée et choisir un référentiel et un système de coordonnées appropriés pour résoudre le problème. On rappelle que le couple Γ exercé par un fil de constante de torsion C et tordu avec un angle α est donné par $\Gamma = C\alpha$.

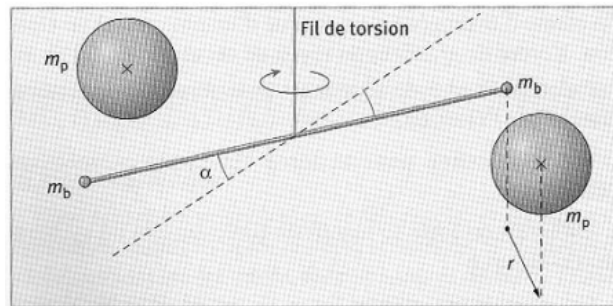


Figure 5: Schéma de l'expérience de Cavendish.

En 1798, Henry Cavendish utilise un pendule de torsion pour mesurer la masse de la Terre et déterminer sa densité. Ses mesures permettent de déterminer la valeur de la constante de gravitation universelle G (qui n'avait pas encore été définie à l'époque).

Il accroche tout d'abord une boule de plomb de masse $m_b = 730 \text{ g}$ à chacune des deux extrémités d'une tige en bois de longueur $L = 2.0 \text{ m}$ et de masse négligeable. Il suspend ce système à un fil de torsion de constante C . L'expérience se déroule en deux temps :

- dans un premier temps, il fait osciller librement le pendule de torsion et mesure la période des oscillations. Il trouve $T = 7.0 \text{ min}$.
- Il approche ensuite deux boules de plomb de diamètre 30 cm et de masse $m_p = 158 \text{ kg}$ à une distance $r = 22.5 \text{ cm}$. Il mesure un décalage de la position d'équilibre qui correspond à une torsion d'angle $\alpha_{eq} = 0.053^\circ$.

Expliquer pourquoi l'expérience de Cavendish fait intervenir des forces gravitationnelles, et déterminer la valeur de G .

Le principe de la mesure est le suivant : l'attraction gravitationnelle entre les boules de plomb très massives et les petites boules de plomb crée un couple qui dévie la barre de sa position d'équilibre et permet de mesurer G .

- En l'absence des grosses boules, nous pouvons modéliser le pendule comme un ensemble de deux petites boules de moment d'inertie $J = 2 \times m_p \times \left(\frac{L}{2}\right)^2$ où L est la longueur de la tige.

Le pendule est soumis à :

- * La force de tension du fil
 - * Son poids
 - * Le couple de torsion de moment $\Gamma = -C \times \alpha$.
- colinéaires au fil donc de moment nul par rapport à l'axe du fil

Le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Δ) appliqué au pendule donne, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$J\ddot{\alpha} = -C\alpha \quad \text{soit} \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

$$\text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et } T = 7,0 \text{ min} = 420 \text{ s est la période des oscillations}$$

- Lorsqu'on ajoute les boules, on a en plus le couple de la force gravitationnelle :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_{\text{grav}}) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ boules}}}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{Gm_b m_p}{r^2}$$

Or on a vu que $J = \frac{1}{2} m_b L^2$ donc $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{grav}}) = \frac{2 G J m_P}{L r^2}$

L'équation du mouvement devient $J\ddot{\alpha} = -C\alpha + \frac{2 G J m_P}{L r^2}$

À l'équilibre : $\alpha_{\text{éq}} = \frac{2 G J m_P}{C r^2 L}$

Or on a vu que $\frac{J}{C} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$ d'où :

$$\alpha_{\text{éq}} = \frac{2 G m_P}{L r^2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Ou encore :

$$G = \frac{L}{2} \cdot \frac{\alpha_{\text{éq}} r^2}{m_P} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

A.N : on trouve bien $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$

(valeur tabulée $6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, à connaître par cœur).

6 Trou noir

En 1783, le physicien britannique John Michell eut pour la première fois l'idée de l'existence d'astres dont la gravitation serait si forte que même la lumière ne pourrait s'en échapper. L'idée fut reprise par Pierre-Simon Laplace en 1796, puis oubliée car elle semblait trop abstraite. Elle ressurgit en 1916 dans le cadre de la relativité générale lorsque Karl Schwarzschild vit apparaître un tel objet dans les solutions des équations d'Einstein, que l'on peut voir comme l'analogue relativiste du principe fondamental de la dynamique. Ce concept fut développé par la suite, et la dénomination de trou noir s'est imposée dans les années 1960. On pense aujourd'hui en avoir détecté plus d'une centaine, mais comme rien ne peut s'échapper d'un trou noir la détection ne peut être qu'indirecte.

Cet exercice propose de calculer l'ordre de grandeur de la taille et de la densité d'un trou noir dans un modèle de physique classique newtonienne (même si en pratique on devrait prendre en compte la théorie de la relativité pour étudier ce genre d'objet).

Considérons pour cela un point matériel M de masse m à proximité d'un astre sphérique de masse m_0 , de rayon R et de centre O . Cet astre est supposé suffisamment massif pour que l'on puisse considérer que M n'est soumis qu'à la force gravitationnelle due à l'astre. On étudie le mouvement de M dans le référentiel $\mathcal{R}$ astrocentrique, que l'on suppose galiléen.

1. Exprimer la force gravitationnelle ressentie par M ainsi que l'énergie potentielle dont elle dérive en la supposant nulle à l'infini. Exprimer l'énergie mécanique de M . Celle-ci se conserve-t-elle ?

M ressent une force gravitationnelle :

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -G \frac{m m_0}{r^2} \vec{e}_r$$

où r est la distance OM et $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$.

Elle dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p = -G \cdot \frac{m m_0}{r}$$

Si on note $\vec{v}$ la vitesse de M , son énergie mécanique est :

$$E_m = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

Elle se conserve car le référentiel est galiléen et M ne subit pas de force non conservative.

2. Montrer que le mouvement de M est nécessairement plan. M étant alors repéré par ses

coordonnées polaires, montrer que $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

M est soumis à la seule force de gravitation dont le moment en O est nul (force centrale). Si on note $\vec{L}_O$ son moment cinétique, le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ donne :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{L}_O = \text{cte}$$

Or $\vec{L}_O = O\vec{M} \wedge m \vec{v} \perp O\vec{M}$ donc M reste dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_O$.

On se place dans le système de coordonnées polaires associé à ce plan, et donc $\|\vec{L}_O\| = m r^2 \dot{\theta}$. Ainsi $C = r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

3. Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \quad (7)$$

en introduisant l'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$ dont on précisera l'expression en fonction de r .

On a $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

donc

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$$

Ainsi :

$$E_m = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m C^2}{r^2}$$

On note

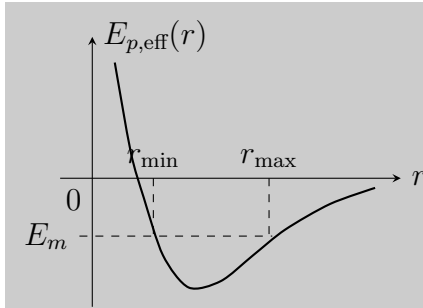
$$E_{p,eff}(r) = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{m C^2}{r^2}$$

Alors :

$$E_m = E_{p,eff}(r) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

et le mouvement peut être étudié comme un mouvement unidimensionnel selon $\vec{e}_r$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de $E_{p,eff}(r)$. À l'aide d'un raisonnement graphique, déterminer pour quelles valeurs de E_m le point M peut échapper à l'attraction d'un astre, c'est-à-dire se trouver dans un état de diffusion.



On a toujours :

$$E_{p,\text{eff}}(r) \leq E_m = \text{cste}$$

Donc ceci fixe les valeurs minimales et maximales de r .

On a un état de diffusion si $r \rightarrow \infty$ est possible c'est à dire si $E_m > 0$.

5. En déduire la vitesse de libération v_{lib} à la surface de cet astre.

Si M est à la surface de l'astre alors $E_{\text{pot}} = -\frac{G m m_0}{R}$ car $r = R$.

Or $E_m = E_{\text{pot}} + \frac{1}{2} m v^2$ doit être positif. On en déduit que v doit être supérieur à la vitesse de libération v_{lib} telle que :

$$E_{\text{pot}} + \frac{1}{2} m v_{\text{lib}}^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2 G m_0}{R}}$$

6. Un trou noir est un astre dont le champ gravitationnel empêche tout objet de s'échapper. Sachant qu'aucun objet ne peut se déplacer plus vite que la lumière c , quelle condition simple sur la vitesse de libération peut-on utiliser pour déterminer si un astre est un trou noir ?

Si $v_{\text{lib}} \geq c$ alors aucun objet ne peut avoir $v \geq v_{\text{lib}}$ donc aucun objet ne peut s'échapper de l'astre, pas même un photon : c'est un trou noir.

7. Déterminer le rayon de Schwarzschild R_s de l'astre, c'est-à-dire le rayon maximal qu'il doit avoir pour être un trou noir.

On a $v_{\text{lib}} \geq c \Leftrightarrow R \leq R_s$ où $R_s = \frac{2 G M_0}{c^2}$ est le rayon maximal de l'astre (rayon de Schwarzschild).

8. Application numérique : le trou noir situé au centre de notre galaxie, la voie lactée, est Sagittarius A. Sa masse est $M_{TN} = 4.3 \times 10^6 M_S$ où M_S est la masse du soleil ($M_S = 2.0 \times 10^{30}$ kg). Calculer son rayon maximal.

On a $R_s = \frac{2 G M_{\text{TN}}}{c^2} \simeq 1,3 \cdot 10^{10} \text{ m}$ soit 13 millions de km.

9. Quel rayon devrait avoir le Soleil pour qu'il devienne un trou noir ?

$R_s^{\text{soleil}} = \frac{2 G M_S}{c^2} \simeq 2,9 \cdot 10^3 \text{ m}$ soit $R_s \simeq 3 \text{ km}$

Le soleil est beaucoup plus gros, ce n'est pas du tout un trou noir. Cette valeur donne une idée de l'ordre de grandeur de la densité massique d'un trou noir.

III - Champ gravitationnel

7 Lignes de champ et équipotentielles

On considère différents systèmes. Pour chacun d'entre eux, tracer les lignes de champ gravitationnel et les équipotentielles. (Remarque : en général, il est plus facile de commencer par les équipotentielles).

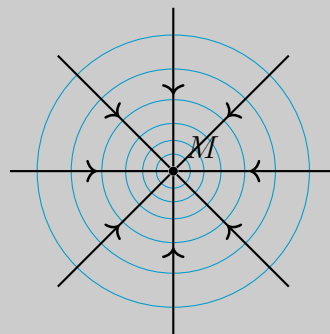
1. Une masse ponctuelle M , par exemple la Terre ;
2. Deux masses ponctuelles, dont une plus importante que l'autre (exemple : la Terre et la Lune) ;
3. Trois masses ponctuelles, dont l'une est beaucoup plus importante que les deux autres (exemple : Mars et ses deux lunes Phobos et Deimos). Les deux masses plus petites sont placées à égale distance de la masse ponctuelle initiale.

Remarque : la solution aux deux premières questions est déjà dans le cours. Essayez de la retrouver par vous-même.

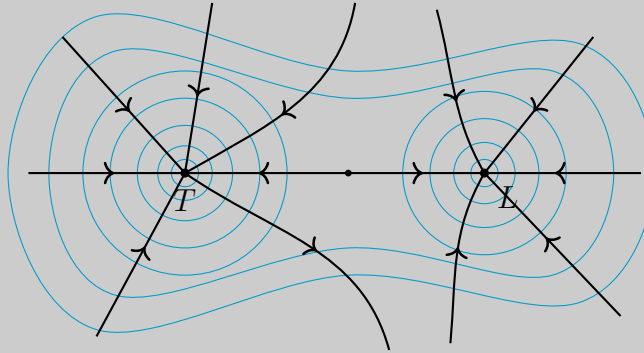
Equipotentielles

Lignes de champ

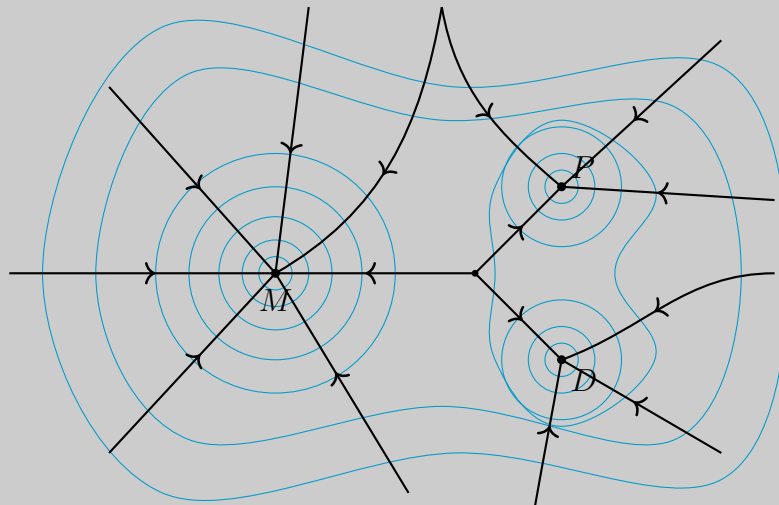
1.



2.



3.



8 Les marées

Dans cet exercice, nous nous intéressons au phénomène des marées : on constate que le niveau des océans varie au cours de la journée. Nous allons supposer que la planète est entièrement recouverte de l'océan.

On considère la lune située au point L et assimilée à une masse ponctuelle M_L . On note $R_T = 6380 \text{ km}$ le rayon terrestre.

On souhaite calculer le champ gravitationnel créé par la lune en un point de la surface de la Terre, P , en fonction de sa position repérée par un angle θ comme indiqué sur le schéma (figure 7).

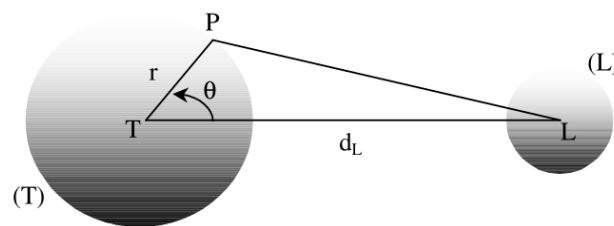


Figure 6: Schéma définissant les points et variables du problème. Source : Poly d'exercices de Olivier Granier.

On donne :

- $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- $M_L = 7,3 \times 10^{22} \text{ kg}$
- $R_T = 6380 \text{ km}$
- $d_L = 3,8 \times 10^5 \text{ km}$

1. Donner une explication qualitative du phénomène des marées.

L'attraction gravitationnelle de la Lune va attirer les masses d'eau vers elle, et donc on peut supposer que cela va déformer la surface de l'océan. Comme la Terre tourne sur elle-même, on va avoir une variation de la hauteur d'eau au cours de la journée.

2. Nous allons maintenant essayer de faire une prédiction quantitative des marées (période et amplitude). Proposer un argument simple pour choisir de raisonner en termes de potentiel gravitationnel que de champ gravitationnel.

Le champ gravitationnel est un vecteur à deux composantes ici (problème plan). En revanche le potentiel gravitationnel est un scalaire : il y a deux fois moins de calculs à faire.

3. (a) Calculer le potentiel gravitationnel au point P en fonction de la distance $d = PL$.

On s'intéresse au potentiel créé par la Lune qui s'écrit simplement $V = -\frac{GM_L}{d}$.

- (b) En construisant deux triangles rectangles, montrer que :

$$d^2 = d_L^2 - 2rd_L \cos \theta + r^2 \quad (8)$$

On note H le projeté orthogonal de P sur TL . On applique ensuite le théorème de Pythagore dans le triangle PHL qui donne :

$$d^2 = (r \sin \theta)^2 + (d_L - r \cos \theta)^2$$

Ainsi, après développement et simplification :

$$d^2 = d_L^2 - 2rd_L \cos \theta + r^2$$

- (c) En déduire le développement limité suivant, au second ordre en r/d_L :

$$\frac{1}{d} \approx \frac{1}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right) \quad (9)$$

On a :

$$\frac{d_L}{d} = \left[\left(\frac{d}{d_L} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - 2\frac{r}{d_L} \cos \theta + \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

On développe à l'ordre 2 avec $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + o(x^2)$. Ici :

$$\frac{d}{d_L} = 1 - \frac{1}{2} \left(-2\frac{r}{d_L} \cos \theta + \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \left(-2\frac{r}{d_L} \cos \theta \right)^2 \quad (10)$$

$$= 1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \theta \right) \quad (11)$$

D'où :

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right)$$

- (d) En déduire l'expression du potentiel gravitationnel créé par la lune en fonction de r , θ et d_L

On en déduit :

$$V = -\frac{GM_L}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right)$$

4. On cherche maintenant à calculer le champ des marées défini comme la différence entre le champ gravitationnel créé par la lune à la surface de la Terre (au point P) et au centre de la Terre (au point T).

- (a) Exprimer le champ gravitationnel créé par la lune au point T d'abord en fonction de $\vec{e}_x$, puis en fonction de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

Le champ créé par la Lune au point T est :

$$\vec{\mathcal{G}}_L(T) = \frac{GM_L}{d_L^2} \vec{e}_x$$

Or $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$. Donc :

$$\vec{\mathcal{G}}_L(T) = \frac{GM_L}{d_L^2} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

- (b) Calculer la composante selon $\vec{e}_r$ du champ gravitationnel créé par la lune au point P . On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \quad (12)$$

On a $\vec{\mathcal{G}}_L(P) = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ et donc :

$$\vec{\mathcal{G}}_L(P) \cdot \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta + \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

- (c) En déduire l'anomalie de champ gravitationnel selon $\vec{e}_r$ définie par :

$$C(\theta) = (\vec{\mathcal{G}}(P) - \vec{\mathcal{G}}(T)) \cdot \vec{e}_r \quad (13)$$

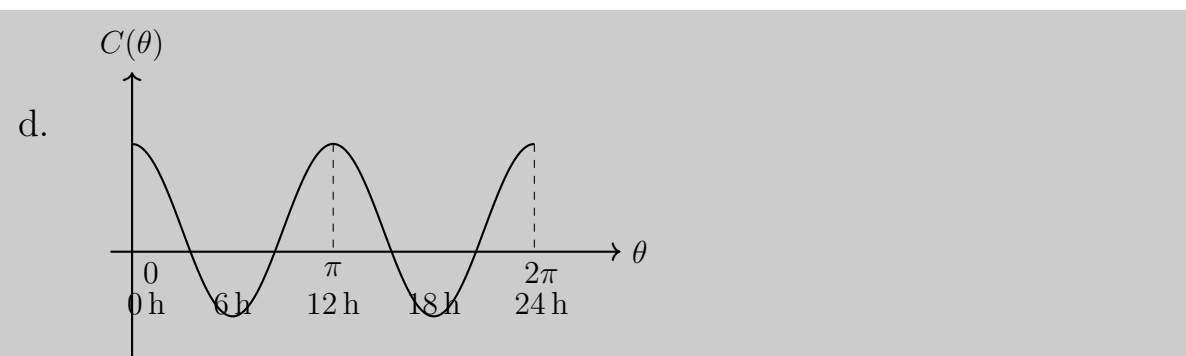
On fait la soustraction entre les deux champs :

$$C(\theta) = (\vec{\mathcal{G}}_L(P) - \vec{\mathcal{G}}_L(T)) \cdot \vec{e}_r \quad (14)$$

$$= \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta + \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta \quad (15)$$

$$= \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1) \quad (16)$$

- (d) Tracer la fonction $C(\theta)$. Sachant que le mouvement de rotation entre la Terre et la Lune est d'environ 25 h, en déduire le temps qui sépare une marée haute d'une marée basse. Ceci correspond-il aux observations ?



La Terre fait 1 tour (2π) en 24 h d'où l'échelle de temps en vert.

On s'attend à avoir une période de 12 h. (En réalité 12 h 30 si on prend en compte la rotation de la Lune comme proposé dans l'énoncé).

Ceci correspond aux observations de Pointe à Pitre.

5. Nous voulons maintenant savoir si notre modèle permet d'expliquer la hauteur des marées.

- (a) Identifier le terme qui représente les marées dans l'expression du potentiel gravitationnel établie en 2d. Quelle est l'amplitude de la variation de ce potentiel entre la marée haute et la marée basse ?

Nous avons vu :

$$V = -\frac{GM_L}{d_L} \left[1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \underbrace{\frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{r}{d_L} \right)^2}_{\text{terme de marée qui apparaît dans } C(\theta)} \right]$$

Entre marée haute ($\cos^2 \theta = 1$) et marée basse ($\cos^2 \theta = 0$) :

$$\Delta V = \frac{GM_L}{d_L} \times \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{r}{d_L} \right)^2$$

- (b) En égalant cette variation avec la variation du potentiel de pesanteur de la surface des océans, en déduire la variation de hauteur d'eau correspondante.

On écrit $\Delta E_p = m \Delta V = mg \times \underbrace{\Delta z}_{\text{variation de hauteur d'eau}}$

D'où :

$$\Delta z = \frac{\Delta V}{g} = \frac{GM_L}{g d_L} \times \frac{3}{2} \cdot \frac{R_T^2}{d_L^2}$$

Or : $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $\Delta z = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^4}{d_L^3}$

- (c) Cela correspond-il aux observations du marégraphe de Pointe-à-Pitre ?

L'application numérique donne $\Delta z \approx 55$ cm. C'est effectivement proche de ce que l'on mesure en Guadeloupe. (Remarque : cela fonctionne car la Guadeloupe est une île, mais proche des côtes continentales, un phénomène de résonance se produit et les marées sont beaucoup plus importantes.)

Remarque : En réalité, la hauteur des marées dépend fortement de l'endroit où on se trouve. Le calcul que l'on a fait marche relativement bien pour la Guadeloupe car il s'agit d'une île qui perturbe peu l'écoulement à l'échelle planétaire. Mais les continents empêchent l'eau de s'écouler de l'Est vers l'Ouest et amplifient les marées près des côtes. Ainsi, à certains endroits du globe comme au Canada ou en Bretagne, les marées peuvent atteindre jusqu'à 15 m.

Pour en savoir un peu plus sur les marées sans équations : lien vers un podcast de l'astrophysicienne Fatoumata Kebe sur Cahier de Prépa.

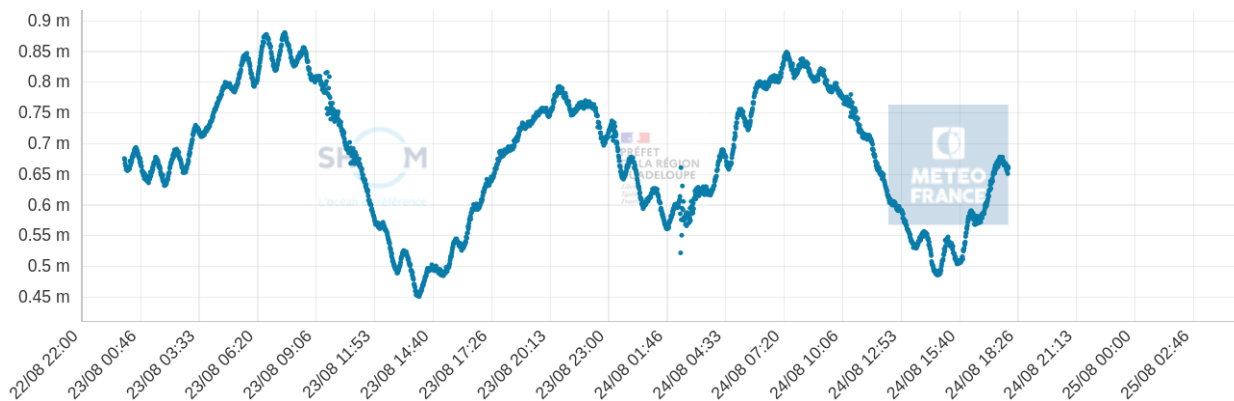


Figure 7: Données du marégraphe de Pointe-à-Pitre en août 2025. Source : SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine française).