

TD1 - Gravitation Correction

1 - Sismomètre à pendule

1. a. On pourrait vouloir utiliser le Théorème du moment cinétique au point de fixation du pendule (en $x = X(t)$). Le problème est que ce point est mobile ; ce n'est pas un point fixe dans un référentiel galiléen donc le TMC ne s'applique pas.

b. Comme le point d'attache du pendule bouge, la vitesse de M n'est pas forcément selon $\vec{e}_\theta$: $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{X}\vec{e}_x$
 Cette vitesse a une composante non nulle selon $\vec{e}_x$ donc la force de tension travaille dans le référentiel terrestre.
 Ceci ne rend pas forcément utile une résolution énergétique puisque cette force de tension est inconnue.

2. a. Non, car la terre bouge à cause du séisme. On peut se placer dans le référentiel R défini comme le référentiel associé à la position hypothétique du sol s'il n'y avait pas de séisme.

b. On a $\vec{v}(M/R) = \vec{v}(M/\text{sol}) + \vec{v}(\text{sol}/R)$
 $= R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{X}\vec{e}_x$

c. La masse est soumise à :

* La tension du fil $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ de norme inconnue,

* Son poids $\vec{P} = m\vec{g}$

On a donc intérêt à projeter le PFD selon $\vec{e}_\theta$ pour éliminer la tension.

d. On projette le PFD selon $\vec{e}_\theta$:

$$m(\underbrace{R\ddot{\theta}}_{=\vec{e}_\theta \cdot \ddot{\vec{v}}} + \underbrace{\ddot{X}\cos\theta}_{=\vec{e}_\theta \cdot \ddot{\vec{v}}}) = -mg\sin\theta$$

Soit $mR\ddot{\theta} + mg\theta = -m\ddot{X}$ dans le cadre de l'approximation des petits angles.

En notant $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$ la pulsation propre du pendule simple:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{1}{R} \ddot{X}}$$

3. a. Le système est forcé par le mouvement du sol (X)
On mesure en réponse l'angle θ , qui est la sortie.

b. En notant $\underline{\theta} = \underline{\theta}_0 e^{j\omega t}$ $\underline{X} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$

$$\text{On a } (\omega_0^2 - \omega^2) \underline{\theta} = + \frac{1}{R} \omega^2 \underline{X}$$

$$\text{Ou encore: } \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{\theta}}{\underline{X}} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

$$|\underline{H}(j\omega)| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{R}$$

C'est un filtre passe-haut du second ordre (avec facteur de qualité infini, car on a négligé les frottements).

Il permet de sélectionner les mouvements de haute fréquence et d'éliminer par exemple les marées qui ont une période de l'ordre de 12h.

c. On constate que les oscillations résonantes ont une période maximale $T \sim 0,5$ s. On souhaite donc une fréquence de coupure plus petite que $\frac{1}{T} = 2$ Hz. On peut prendre par exemple $f_c = 1$ Hz.

$$\text{On a } f_c = \frac{1}{2\pi} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{R}} \text{ soit:}$$

$$R = \frac{g}{(2\pi f_c)^2} \sim \frac{10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}}{(6 \text{ s}^{-1})^2} \sim \boxed{0,3 \text{ m}}$$

d. C'est encombrant: pour avoir un appareil plus petit on privilégie une autre technologie comme un ressort. En effet, la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ne dépend alors plus de la taille du système, et on peut plus facilement miniaturiser le sismomètre.

2 - Pendule pesant

1. Le moment d'inertie est la somme du moment d'inertie de la tige et de la masse.

On rappelle que J est défini par $L_{\Delta} = J \cdot \dot{\theta}$

On a alors pour la masse : $L_{(\Delta)}^{\text{masse}} = M \underbrace{(L \vec{e}_r \wedge L \dot{\theta} \vec{e}_\theta)}_{\text{moment cinétique par rapport à un point de } (\Delta)} \cdot \underbrace{\vec{e}_y}_{\text{projeté selon l'axe } (\Delta)}$

$$\text{soit } L_{(\Delta)}^{\text{masse}} = M L^2 \dot{\theta} = M L^2 \ddot{\theta} \Rightarrow J_{\text{masse}} = M L^2$$

Et pour la tige : $J_{\text{tige}} = \frac{1}{3} m L^2$ (énoncé).

$$\text{D'où : } \boxed{J = \left(\frac{1}{3} m + M \right) L^2}$$

2. Le pendule est soumis à :

* La réaction du support au niveau de la liaison pivot, qui est telle que $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{R}_{\text{support}}) = 0$

* Le poids de la masse qui s'applique en M :

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_{\text{masse}}) = (L \vec{e}_r \wedge -Mg \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_y = -M L g \sin \theta$$

* Le poids de la tige qui s'applique à son centre de gravité en $r = \frac{L}{2}$:

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{P}_{\text{tige}}) = \left(\frac{L}{2} \vec{e}_r \wedge -mg \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_y = -\frac{m}{2} L g \sin \theta$$

$$\text{D'où } \boxed{\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) = -\left(\frac{m}{2} + M \right) L g \sin \theta}$$

3. On applique le théorème du moment cinétique au pendule dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\frac{dL_{\Delta}}{dt} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow J \ddot{\theta} = -\left(\frac{m}{2} + M \right) L g \sin \theta$$

Or $J = \left(\frac{m}{2} + M \right) L^2$ donc on obtient

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{\frac{m}{2} + M}{\frac{m}{2} + M} \cdot \frac{g}{L}$$

en faisant l'approximation des petits angles.

La période des oscillations est $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sqrt{\frac{\frac{M}{2} + M}{\frac{M}{2} + M}}$

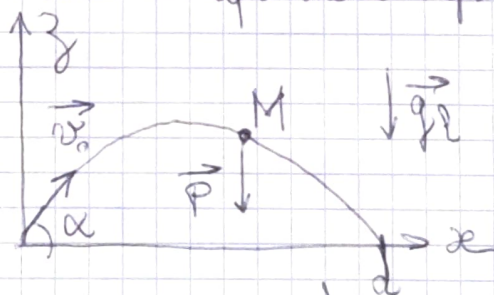
4. Si $m \ll M$ (masse de la tige négligeable), on peut alors l'assimiler à un fil et on retrouve bien $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$.

3 - Bond sur la Lune

1. a. Système : le capitaine, assimilé à un point matériel.
Référentiel : le référentiel "lunaire" solide de la surface de la Lune, noté R_L et supposé galiléen

b. On choisit le repère cartésien (xOz) où :

- * le capitaine est initialement en $x=0, z=0$
- * $\vec{e}_z$ est orienté vers le haut
- * Lors de son saut le capitaine se déplace selon $+\vec{e}_x$



c. Le capitaine est soumis uniquement à son poids $\vec{P} = -mg_L \vec{e}_z$
On lui applique le PFD dans R_L :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg_L \vec{e}_z \Leftrightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -g_L \vec{e}_z$$

On projette :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = \text{cte} \\ \dot{z} = \text{cte} - g_L t \end{cases}$$

On sait que à $t=0$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{z} = v_0 \sin \alpha - g_L t \end{cases}$$

On intègre avec $x=0$ et $z=0$ à $t=0$:

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ z = v_0 \sin(\alpha) t - g_L \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

2. Le capitaine atterrit lorsque $z=0$ soit $t = \frac{2 v_0 \sin \alpha}{g_L}$

En réinjectant dans $\alpha(t)$ on trouve $d = v_0 \cos(\alpha) \times \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$
 Or $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ donc $d = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$

3. On constate que $d \propto \frac{1}{g}$. Si g est six fois plus faible alors d est six fois plus longue et $d \approx 6 \times 1,5 \text{ m} = \boxed{9 \text{ m}}$
 Le dessin dans la BD semble donc réaliste.

4- Expérience de Cavendish

Le principe de la mesure est le suivant : l'attraction gravitationnelle entre les boules de plomb très massives et les petites boules de plomb crée un couple qui dévie la balle de sa position d'équilibre et permet de mesurer G .

- En l'absence des grosses boules, nous pouvons modéliser le pendule comme un ensemble de deux petites boules de moment d'inertie $J = 2 \times m_p \times \left(\frac{L}{2}\right)^2$ où L est la longueur de la tige.

Le pendule est soumis à :

- * La force de torsion du fil } colinéaire au fil donc de moment nul par rapport à l'axe du fil
- * Son poids
- * Le couple de torsion de moment $\Gamma = -C \times \alpha$.

Le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Δ) appliqué au pendule donne, dans le référentiel terrestre galiléen :

$$J \ddot{\alpha} = -C \alpha \quad \text{soit} \quad \ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0$$

$$\text{où } \omega_0 = \sqrt{\frac{C}{J}} = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et } T = 7,0 \text{ min} = 420 \text{ s}$$

est la période des oscillations

- Lorsqu'on ajoute les boules, on a en plus le couple de la force gravitationnelle :

$$\mathcal{M}_{(\Delta)}(\vec{F}_{\text{grav}}) = \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ boules}}}{2} \times \frac{L}{2} \times \frac{G m_M m_p}{r^2}$$

Or on a vu que $J = \frac{1}{2} m_p L^2$ donc $M_s(\vec{F}_{\text{grav}}) = \frac{2GJm_p}{Lr^2}$

L'équation du mouvement devient $J\ddot{\alpha} = -C\alpha + \frac{2GJm_p}{Lr^2}$

À l'équilibre : $\alpha_{\text{eq}} = \frac{2GJm_p}{Cr^2L}$

Or on a vu que $\frac{J}{C} = \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$ d'où :

$$\alpha_{\text{eq}} = \frac{2Gm_p}{Lr^2} \left(\frac{I}{2\pi r}\right)^2$$

On en déduit :

$$G = \frac{L}{2} \cdot \frac{\alpha_{\text{eq}} r^2}{m_p} \cdot \left(\frac{2\pi}{I}\right)^2$$

A.N : on trouve bien $G = 6,6 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$
(valeur tabulée $6,67 \cdot 10^{-11}$, à connaître par cœur).

5 - Trou noir

1. M ressent une force gravitationnelle : $\vec{F}_{\text{grav}} = -G \frac{m m_0}{r^2} \vec{e}_r$

où r est la distance OM et $\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|OM\|}$.

Elle dérive de l'énergie potentielle : $E_p = -G \cdot \frac{m m_0}{r}$.

Si on note $\vec{v}$ la vitesse de M son énergie mécanique

est :

$$E_m = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

Elle se conserve car le référentiel est galiléen et M ne subit pas de force non conservative.

2. M est soumis à la seule force de gravitation dont le moment en O est nul (force centrale). Si on note $\vec{L}_0$ son moment cinétique, le théorème du moment cinétique dans le référentiel galiléen R donne :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{0} \quad \text{soit} \quad \vec{L}_0 = \text{cte}$$

Or $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v} \perp \vec{OM}$ donc M reste dans le plan passant par O et perpendiculaire à $\vec{L}_0$.

On se place dans le système de coordonnées polaires associé à

et donc $\|\vec{\Sigma}_0\| = m r^2 \dot{\theta}$. Ainsi $C = r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

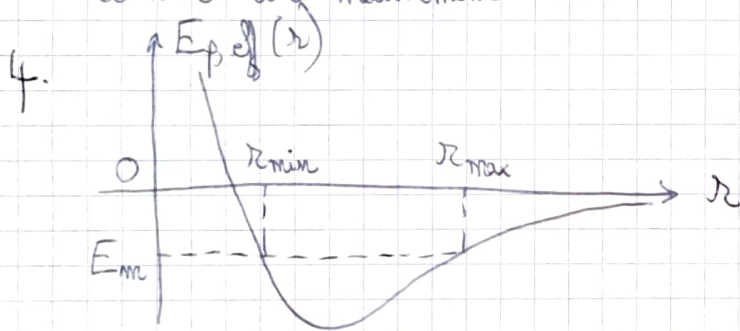
3. On a $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

donc $\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$.

Ainsi: $E_m = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{m C^2}{r^2}$.

On note $E_{p,eff}(r) = -G \frac{m m_0}{r} + \frac{1}{2} \frac{m C^2}{r^2}$

Alors: $E_m = E_{p,eff}(r) + \frac{1}{2} m \dot{r}^2$ et le mouvement peut être étudié comme un mouvement unidimensionnel selon $\vec{e}_r$.



On a toujours:

$$E_{p,eff}(r) \leq E_m = C^{ste}$$

Donc ceci fixe les valeurs minimales et maximales de r .

On a un état de diffusion si $r \rightarrow \infty$ est possible c'est à dire si $E_m > 0$.

5. Si M est à la surface de l'étoile alors $E_{pot} = -\frac{G m m_0}{R}$
car $r = R$.

On $E_m = E_{pot} + \frac{1}{2} m v^2$ doit être positif. On en déduit que v doit être supérieur à la vitesse de libération v_{lib} telle que $E_{pot} + \frac{1}{2} m v_{lib}^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{v_{lib} = \sqrt{\frac{2G m_0}{R}}}$.

6. Si $\boxed{v_{lib} \geq c}$ alors aucun objet ne peut avoir $v \geq v_{lib}$ donc aucun objet ne peut s'échapper de l'étoile, pas même un photon: c'est un trou noir.

7. On a $v_{lib} \geq c \Leftrightarrow R \leq R_s$ où $\boxed{R_s = \frac{2G m_0}{c^2}}$
est le rayon maximal de l'étoile (rayon de Schwarzschild).

8. On a $R_s = \frac{2GM_{\text{M}}}{c^2} \approx 1,3 \cdot 10^{10} \text{ m}$ soit 13 millions de km

9. $R_s^{\text{soleil}} = \frac{2GM_s}{c^2} \approx 2,9 \cdot 10^3 \text{ m}$ soit $R_s \approx 3 \text{ km}$

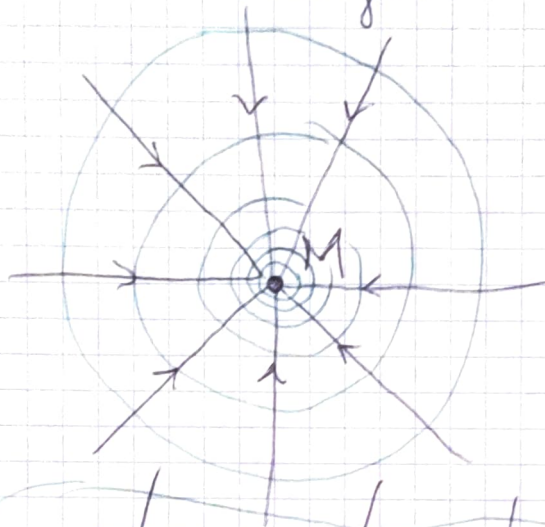
Le soleil est beaucoup plus gros, ce n'est pas du tout un trou noir.
Cette valeur donne une idée de l'ordre de grandeur de la densité
massique d'un trou noir.

6. - Lignes de champ et équipotentielles

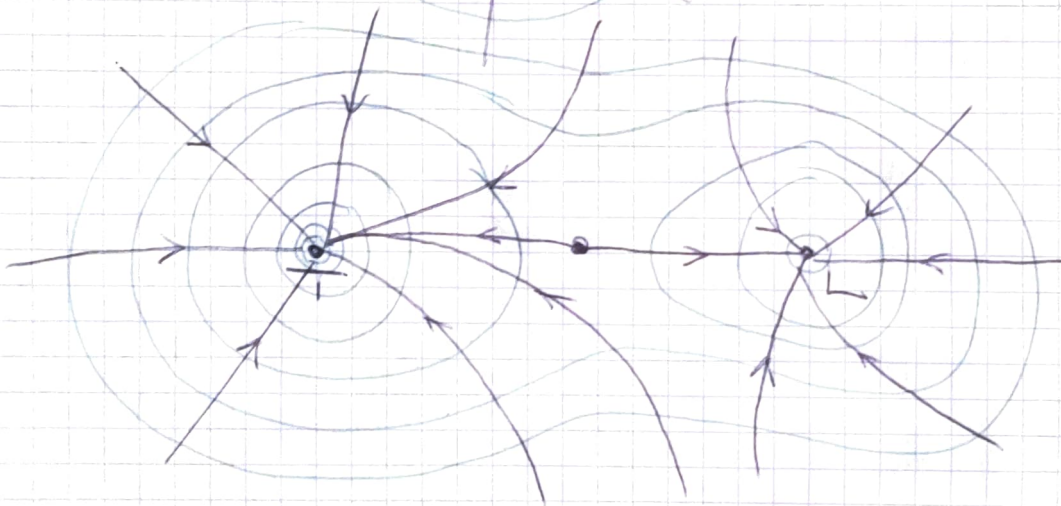
Equipotentielles

Lignes de champ

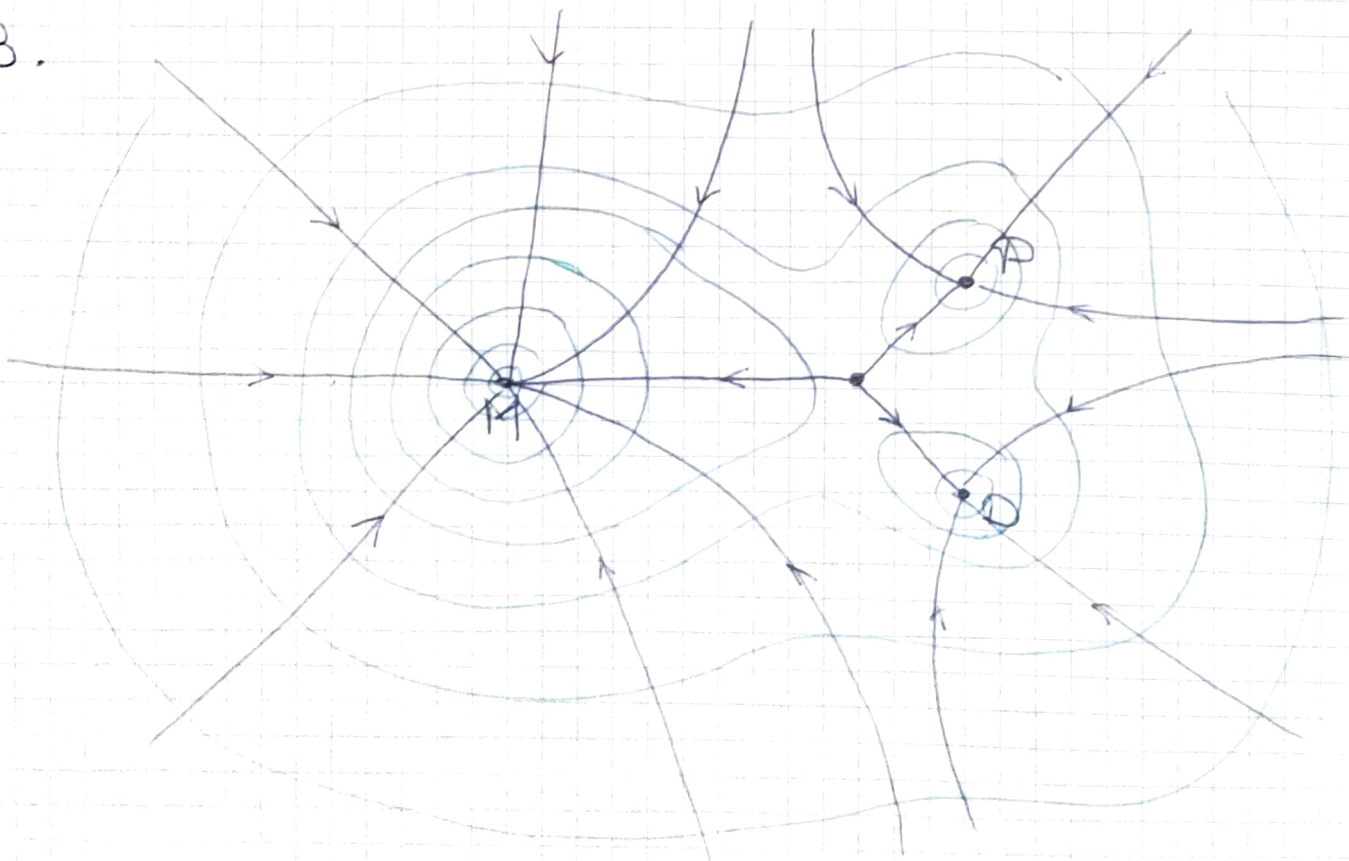
1.



2.



3.



7 - Les marées

1. L'attraction gravitationnelle de la Lune va attirer les masses d'eau vers elle et donc on peut supposer que cela va déformer la surface de l'océan.
Comme la Terre tourne sur elle-même on va avoir une variation de la hauteur d'eau au cours de la journée.
2. Le champ gravitationnel est un vecteur à 2 composantes ici (problème plan). Le potentiel gravitationnel est scalaire $\Rightarrow$ il y a 2 fois moins de calculs à faire.
3. a. On s'intéresse au potentiel créé par la Lune qui s'écrit simplement
$$V = - \frac{GM_L}{L}$$



~~On a $d_L^2 \sim D_H^2$~~

$$\text{Or } d^2 = (r \sin \theta)^2 + HL^2$$

Soit:

$$d^2 = (r \sin \theta)^2 + (d_L - r \cos \theta)^2$$

$$= d_L^2 + r^2 (\underbrace{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}_= 1) - 2 d_L r \cos \theta$$

Also: $d^2 = d_L^2 - 2d_L r \cos \vartheta + r^2$

c. Om a $\frac{dr}{dt} = \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[1 - 2 \frac{r}{a} \cos \vartheta + \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$

On développe à l'ordre 2.

Rappel: $(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots$

$$\begin{aligned} I_{cc} \frac{d^2}{dt^2} &= 1 - \frac{1}{2} \left(-2 \frac{r_c}{a_L} \cos \vartheta + \left(\frac{r_c}{a_L} \right)^2 \right) + \frac{\left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right)}{2} \left(-2 \frac{r_c}{a_L} \cos \vartheta \right)^2 \\ &= 1 + \frac{r_c}{a_L} \cos \vartheta + \left(\frac{r_c}{a_L} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \vartheta \right) \end{aligned}$$

Đạo: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{x} \cos \theta + \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \left(\frac{1}{x} \right)^2 \right)$

d. On en déduit

$$V = -\frac{GM_L}{d_L} \left(1 + \frac{r}{d_L} \cos \theta + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \left(\frac{r}{d_L} \right)^2 \right)$$

4. a. Le champ créé par la lune au point T est :

$$\vec{g}_{L,T} = g \cdot \frac{M_L}{d_L^2} \vec{e}_x$$

$$\text{Or } \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\text{Donc } \vec{g}_L(T) = \frac{GM_L}{d_L^2} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

b. On a $\vec{g}_L(P) = -\vec{\text{grad}}(V)$

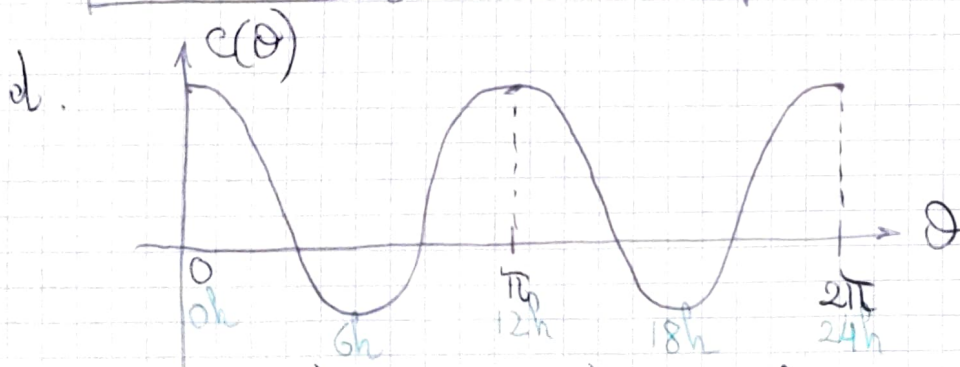
$$\vec{g}_L(P) \cdot \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = + \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta + \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

c. On fait la soustraction :

$$C(\theta) = (\vec{g}_L(P) - \vec{g}_L(T)) \cdot \vec{e}_r$$

$$= \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta + \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1) - \frac{GM_L}{d_L^2} \cos \theta$$

$$C(\theta) = \frac{GM_L r}{d_L^3} (3 \cos^2 \theta - 1)$$



La Terre fait 1 tour (2π) en 24h d'où l'échelle de temps en vert.

On s'attend à avoir une période de 12h. (En réalité 12h30 si on prend en compte la rotation de la Lune comme proposé dans l'énoncé).

Ceci correspond aux observations de Pointe à Pitre.

5. a. Nous avons vu:

$$V = - \frac{GM_L}{d_L} \left[1 + \frac{R}{d_L} \cos \vartheta + \underbrace{\frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} \left(\frac{R}{d_L} \right)^2}_{\text{terme de marée qui apparaît dans } C(\vartheta)} \right]$$

Entre marée haute ($\cos^2 \vartheta = 1$) et marée basse ($\cos^2 \vartheta = 0$).

$$\Delta V = \frac{GM_L}{d_L} \times \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{R}{d_L} \right)^2$$

b. On écrit $\Delta E_p = m \Delta V = mg \times \Delta z$

D'où :

$$\Delta z = \frac{\Delta V}{g} = \frac{GM_L}{g d_L} \times \frac{3}{2} \cdot \frac{R_T^2}{d_L^2}$$

Or : $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $\Delta z = \frac{3}{2} \cdot \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^4}{d_L^3}$

c. A.N : $\Delta z \approx 55 \text{ cm}$

C'est effectivement très proche de ce qu'on mesure en Guadeloupe (Rq : pas en métropole).