

I - Premier principe (révisions)

1 Mesure de capacités thermiques

L'énergie interne des phases condensées (solides et liquides) ne dépend quasiment que de la température ; la détermination de leur capacité thermique est donc essentielle. On utilise pour ce faire des récipients calorifugés type vases Dewar constitués d'une double paroi de verre contenant du vide et dont la face intérieure est recouverte d'une pellicule argentée.

1. Les parois du récipient sont alors diathermes : justifiez cette propriété vis-à-vis de la constitution du récipient. On rappelle cela signifie que la paroi empêche les transferts thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du vase Dewar.

Le vide entre les 2 parois en verre permet d'éviter les transferts thermiques par conduction (le vide est un très mauvais conducteur thermique) et par convection (s'il n'y a pas de milieu matériel, il ne peut pas y avoir de convection). La pellicule argentée permet de réfléchir la lumière et donc d'éviter les transferts thermiques par rayonnement.

2. On considère un calorimètre contenant une masse m_1 d'eau à la température T_1 (Figure 1). La capacité thermique massique de l'eau c_e est connue. À l'instant initial, on plonge dans le calorimètre un corps (ou un liquide) de masse m_2 , porté à la température T_2 , dont on souhaite connaître la capacité thermique massique c . À l'équilibre la température finale est T_f . Le système considéré est l'ensemble {eau + corps}.

- (a) Décrire l'état initial et l'état final du système.

Le système considéré est l'ensemble { eau + corps }. Durant tout l'exercice, les systèmes thermodynamiques sont à la pression ambiante et leur volumes ne varient pas. De plus, le système est fermé, donc la quantité de matière ne varie pas non plus. L'état initial n'est pas un état d'équilibre thermodynamique :

- corps : T_2
- eau : T_1 ,

contrairement à l'état final où l'eau et le corps sont à température T_f (à cause de la condition d'équilibre thermique).

- (b) Exprimer ΔU , ΔE_c , W et Q et en déduire l'expression de c .

D'après la propriété d'extensivité (d'additivité) de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$\Delta U = \Delta U_{\text{corps}} + \Delta U_{\text{eau}} \quad ; \quad \Delta E_c = \Delta E_{c,\text{corps}} + \Delta E_{c,\text{eau}}$$

L'eau et le corps sont des phases condensées indilatables et incompressibles dont la capacité thermique ne dépend pas de la température, donc :

$$\Delta U_{\text{corps}} = cm_2(T_2 - T_f) \quad ; \quad \Delta U_{\text{eau}} = c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f).$$

On suppose que le corps ne possède pas de vitesse initiale et que l'eau n'est pas mise en mouvement par la transformation (dans le référentiel du laboratoire), donc :

$$\Delta E_{c,\text{corps}} = 0 \quad ; \quad \Delta E_{c,\text{eau}} = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta U = cm_2(T_2 - T_f) + c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f)} \quad ; \quad \boxed{\Delta E_c = 0}$$

Le volume du système ne varie pas, la transformation est donc isochore. On en déduit que le travail des forces de pression est nul :

$$\boxed{W = 0}$$

Les parois du vase Dewar étant athermanes, la transformation est adiabatique. Ainsi :

$$\boxed{Q = 0}$$

On peut alors appliquer le premier principe de la thermodynamique au système { eau + corps } lors de cette transformation :

$$\Delta U + \Delta E_c = W + Q \Rightarrow cm_2(T_2 - T_f) + c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f) = 0$$

Finalement :

$$\boxed{c = \frac{-c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f)}{m_2(T_2 - T_f)}}$$

- (c) Effectuer l'application numérique sachant que pour du cuivre : $m_2 = 200 \text{ g}$, $T_2 = 100^\circ\text{C}$, $m_1 = 1 \text{ kg}$, $T_1 = 20^\circ\text{C}$, $T_f = 21.5^\circ\text{C}$, $c_{\text{eau}} = 4.18 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

En ne gardant qu'un chiffre significatif (car la donnée la moins précise n'en a qu'un seul) :

$$\boxed{c = 400.^\circ\text{C}^{-1}.$$

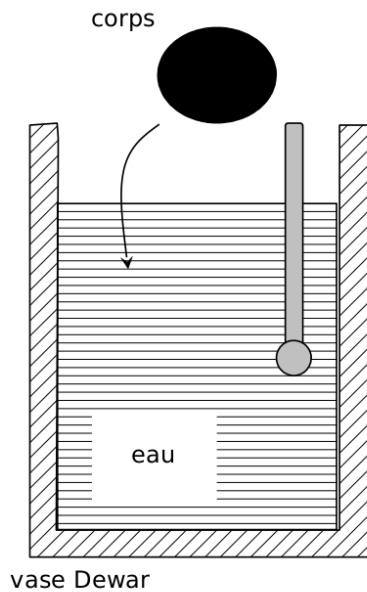


Figure 1

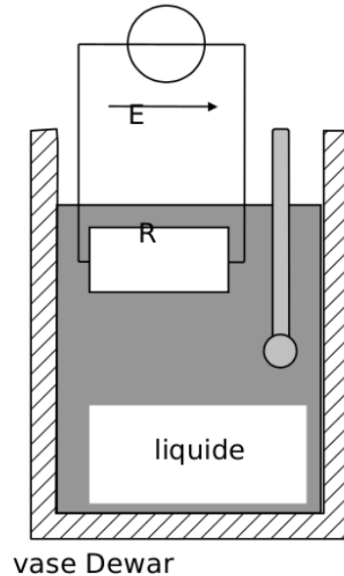


Figure 2

3. La détermination de la capacité thermique c (supposée indépendante de la température) d'un liquide peut également se faire à l'aide de l'effet Joule. Une résistance de valeur R soumise à une tension de valeur efficace E est plongée dans une masse m_3 du liquide à étudier. À l'instant initial le liquide est à la température T_3 , après une durée Δt de chauffage, le liquide est à la température T_f . Le système considéré est uniquement le {liquide}.

- (a) Décrire l'état initial et l'état final du système.

Le système étudié est maintenant le liquide uniquement. Comme dans la partie précédente, son volume, sa pression et sa quantité de matière ne varient pas au cours de la transformation. Ses états initial et final sont alors caractérisés par sa température :

- état initial : T_3 ,
- état final : T_f .

- (b) Rappeler la définition d'une tension efficace.

La tension efficace E est définie par $E = \sqrt{\langle e(t)^2 \rangle}$ où les crochets désignent une moyenne temporelle, et $e(t)$ est la tension étudiée en fonction du temps.

- (c) En déduire une expression de ΔU , ΔE_c , W et Q durant la transformation.

Le système est une phase condensée dont la capacité thermique est indépendante

de la température, donc :

$$\Delta U = m_3 c (T_3 - T_i).$$

Aussi bien à l'état initial qu'à l'état final, le liquide est globalement au repos dans le référentiel du laboratoire donc son énergie cinétique macroscopique ne varie pas lors de la transformation (et elle est même nulle tout le temps) :

$$\Delta E_c = 0.$$

La transformation est isochore, donc :

$$W = 0.$$

Enfin, le liquide reçoit un transfert thermique de la part de la résistance. La puissance instantanée dissipée par effet Joule par celle-ci est :

$$P = EI = RI^2 = \frac{E^2}{R}.$$

Le transfert thermique reçu par le liquide est alors :

$$Q = \frac{E^2}{R} \Delta t.$$

- (d) Déterminer l'expression de c en fonction des données.

On applique alors le premier principe de la thermodynamique sur le système d'étude (le liquide) lors de cette transformation :

$$\Delta U + \Delta E_c = W + Q \quad \Rightarrow \quad m_3 c (T_3 - T_i) = \frac{E^2}{R} \Delta t \quad \Rightarrow \quad c = \frac{E^2 \Delta t}{R m_3 (T_3 - T_i)}.$$

4. On utilise une résistance de $50 \, \Omega$ alimentée par une tension de $20 \, \text{V}$. Après 10 minutes de chauffage, on mesure une élévation de température de $5 \, \text{K}$ dans les $200 \, \text{g}$ d'huile introduits dans le calorimètre.

- (a) Quelle est la puissance électrique dissipée par effet Joule ?

$$P = \frac{E^2}{R} = 8 \, \text{W}$$

- (b) En déduire la capacité calorifique de l'huile étudiée.

On peut alors effectuer l'application numérique (attention aux unités) :

$$c = 4.8 \text{ kJ}/(\text{kg K}).$$

5. Si l'on prend en compte le fait que le vase Dewar, le thermomètre et l'agitateur voient également leur énergie interne augmenter lors des mesures précédentes, comment faut-il modifier les relations obtenues pour en tenir compte ? On notera C_M leur capacité calorifique.

Il faut alors rajouter dans l'expression de l'énergie interne la quantité : $C_M \Delta T$. La variation d'énergie interne devient :

$$\Delta U = cm_2(T_2 - T_f) + c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f) + C_M(T_1 - T_f).$$

2 Chute d'un grêlon

Les grêlons se forment dans les nuages d'orage. Dans les tropiques, ces nuages peuvent monter jusqu'à une altitude de 18 km, mais les grêlons ne commencent à fondre que lorsqu'ils passent en-dessous de 5 km (altitude de l'isotherme 0°C). Ils acquièrent très rapidement dans leur chute une vitesse constante. On donne la chaleur latente de fusion de l'eau $L = 333 \text{ kJ kg}^{-1}$ (à 0°C).

On considère un grêlon qui commence à chuter et à fondre à une altitude de 5 km. On suppose que le grêlon reste à une température de 0°C au cours de sa chute.

1. (a) Quelle force $\vec{f}$ permet au grêlon de garder une vitesse constante ?

Ce sont les frottements visqueux entre le grêlon et l'air.

- (b) Exprimer $\vec{f}$ en fonction des paramètres du problème.

On sait que le grêlon chute à vitesse constante, il a donc un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; il est soumis à son poids et à $\vec{f}$. Par le principe d'inertie les forces qui s'appliquent à lui se compensent et :

$$\vec{f} = mg\vec{e}_z$$

où m est la masse du grêlon et $\vec{e}_z$ est orienté vers le haut.

2. (a) En appliquant le premier principe au grêlon, relier le transfert thermique Q reçu par le grêlon à la fraction massique x de glace qui fond au cours de la chute. Peut-on déterminer la fraction massique x ?

Le grêlon, au cours de sa chute, reçoit un transfert thermique Q . On suppose le volume du grêlon constant ce qui permet de négliger le travail des forces de pression, et on note $E_p = mgz$ son énergie potentielle de pesanteur. Son énergie cinétique est constante. Alors :

$$\Delta(U + E_p + E_c) = W_{nc} + Q$$

Or $\Delta E_c = 0$ et $\Delta E_p = -mgh$ avec $h = 5 \text{ km}$. Enfin :

$$\Delta U = m_{\text{fondue}} L = mxL$$

Le travail de la force de frottements est donné par :

$$W(\vec{f}) = (-m\vec{g}) \cdot (-h\vec{e}_z) = -mgh$$

On conclut par le premier principe que $mxL = Q$ ou encore $\boxed{x = \frac{Q}{mL}}$. On ne peut pas déterminer x car on ne connaît pas le transfert thermique Q .

- (b) Appliquer le premier principe au système {grêlon + atmosphère}, en supposant l'atmosphère immobile et de température constante. En déduire la fraction massique x du grêlon qui a fondu.

Désormais, le système n'est soumis à aucune force extérieure non conservative. L'énergie potentielle de l'atmosphère étant constante et l'atmosphère étant immobile, on a toujours $\Delta E_p = -mgh$ et $\Delta E_c = 0$. Comme la température de l'atmosphère est constante, on a toujours $\Delta U = \Delta U_{\text{glacéon}} = mxL$. Enfin, la durée de l'expérience étant courte devant les échelles de temps climatiques, on pourra négliger les transferts thermiques reçus par l'atmosphère et considérer le système comme isolé. Le premier principe fournit alors :

$$\Delta(E_p + E_m + U) = 0$$

On a ainsi $mxL - mgh = 0$, ou encore :

$$\boxed{x = \frac{gh}{L} = 0.147}$$

3 Expérience de Rüchardt

La méthode de Rüchardt permet de déterminer le rapport γ des capacités thermiques d'un gaz parfait à pression et à volume constants, en étudiant (voir figure) le mouvement d'une bille dans un tube en verre. La bille métallique, de diamètre très voisin de celui du tube, se comporte comme un piston étanche. On néglige les frottements. Lorsqu'on lâche la bille dans le tube de section s , on observe des oscillations autour d'une position d'équilibre. La méthode consiste à mesurer la période des oscillations τ de la bille dans le tube ou, ce qui est équivalent, la période τ des oscillations de la pression de l'air contenu à l'intérieur de la bouteille. Pour cela, on enregistre la pression à l'aide d'un capteur de pression pendant environ 25 s. L'air est assimilé à un gaz parfait.

Données : $m = 20$ g (masse de la bille), $P_0 = 1$ bar et $T_0 = 293$ K (pression et température de l'air atmosphérique), $s = 2$ cm² (section intérieure du tube) et $V_0 = 10$ L (volume total de la bouteille, pour $x = 0$).

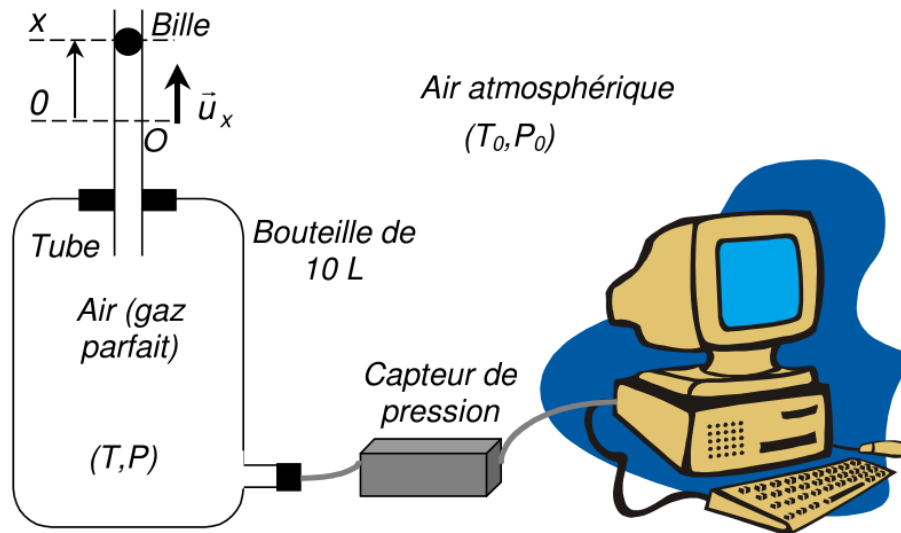


Figure 1: Méthode de Rüchardt.

1. D'un point de vue thermodynamique, les compressions et détentes du gaz à l'intérieur de la bouteille sont considérées comme pratiquement réversibles et adiabatiques. Les écarts de pression et de volume étant faibles, on approxime la variation de volume dV par $V - V_0$ et dP par $P - P_{eq}$.

(a) Rappeler les lois de Joule pour les gaz parfaits.

- Première loi de Joule : l'énergie interne molaire d'un gaz parfait ne dépend que de sa température : $U_m = U_m(T)$

- Deuxième loi de Joule : l'enthalpie molaire d'un gaz parfait ne dépend que de sa température : $H_m = H_m(T)$

(b) Rappeler la relation de Mayer et la démontrer.

Relation de Mayer : $C_p - C_v = nR$.

On a en effet $H = U + PV = U + nRT$ en utilisant la loi des gaz parfaits. On dérive par rapport à la température, comme U_m et H_m ne dépendent que de la température les dérivées à volume constant et à pression constante sont égales et :

$$\frac{dH}{dT} = \frac{dU}{dT} + nR$$

On obtient la relation de Mayer par définition de C_p et C_v .

(c) Démontrer ensuite la relation de Laplace.

La relation de Laplace est vraie dans le cadre d'une transformation adiabatique et réversible. La transformation étant réversible, il s'agit d'une succession d'états d'équilibre et l'énergie interne est définie à tout instant. On peut donc adopter une formulation infinitésimale. Le premier principe fournit :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Comme la transformation est adiabatique : $\delta Q = 0$. De plus, le gaz étant soumis a priori aux seules forces de pression : $\delta W = -pdV$.

Enfin, pour un gaz parfait, par la première loi de Joule : $dU = C_v dT$. Donc :

$$C_v dT = -pdV$$

D'autre part par la deuxième loi de Joule et le premier principe :

$$dH = C_p dT = d(U + pV) = dU + pdV + Vdp = Vdp$$

On a ainsi :

$$\begin{cases} C_v dT = -pdV \\ C_p dT = Vdp \end{cases}$$

On note $\gamma = C_p/C_v$, alors $\gamma pdV + Vdp = 0$. Ou encore :

$$p\gamma V^{\gamma-1}dV + V^\gamma dp = d(pV^\gamma) = 0$$

Ainsi : $pV^\gamma = \text{cste}$ pour un gaz parfait lors d'une transformation adiabatique réversible.

- (d) Utiliser cette relation pour déterminer $P - P_{eq}$ en fonction de dV , puis de x .

Les mouvements de la bille étant rapides devant le temps d'équilibration thermique de la bouteille, on suppose la transformation adiabatique réversible. On a alors, par différentielle logarithmique de la loi de Laplace :

$$\frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V}$$

Or $dp \approx P - P_{eq}$ donc :

$$P - P_{eq} \approx -\gamma P_{eq} \frac{dV}{V}$$

où P_{eq}, V_{eq} sont la pression et le volume à l'équilibre dans la bouteille. Or, $dV = sx$ où s est la section du tube. Ainsi :

$$P - P_{eq} \approx -\gamma P_{eq} \frac{sx}{V_{eq}}$$

2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la variable x . Quelle est la période τ des oscillations de pression ?

On note m la masse de la bille, soumise à :

- Son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$
- La force de pression $\vec{F} = s(P - P_{atm})\vec{u}_x$

On applique le PFD à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, qui donne, une fois projeté sur $\vec{u}_x$:

$$m\ddot{x} = -mg + s(P - P_{atm})$$

A l'équilibre :

$$0 = -mg + s(P_{eq} - P_{atm})$$

En soustrayant les deux équations on trouve :

$$m\ddot{x} = s(P - P_{eq}) = -\gamma P_{eq} \frac{s^2 x}{V_{eq}}$$

On obtient ainsi une équation d'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{\gamma P_{eq} s^2}{V_{eq} m}$.
D'où la période des oscillations :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{s} \sqrt{\frac{m V_{eq}}{\gamma P_{eq}}}$$

3. On mesure $\tau = 1.2$ s.

(a) Déterminer la valeur de γ .

On suppose la bille suffisamment petite pour avoir $P_{eq} \approx P_{atm}$ et $V_{eq} \approx V_0$. Alors :

$$\gamma = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \cdot \frac{mV_0}{s^2 P_0} = \left(\frac{2\pi}{1.2}\right)^2 \cdot \frac{(20 \cdot 10^{-3})(10 \cdot 10^{-3})}{(2 \cdot 10^{-4})^2 \cdot 10^5} = \boxed{1.37}$$

(b) On rappelle que la valeur théorique pour un gaz parfait diatomique est $\gamma = \frac{7}{5}$. Commenter la valeur obtenue. Quels peuvent être les problèmes d'ordre expérimental rencontrés ?

La valeur théorique est de 1.40. Ici, le dispositif n'est peut-être pas complètement adiabatique et on peut également penser qu'il y a des fuites d'air au niveau de la bille ce qui modifie l'équilibre mécanique.

4 Sorbet coco

Une sorbetière est une machine permettant de fabriquer des glaces faites maison, par exemple le sorbet coco. La préparation (basiquement fruits, eau et sucre), sortie du réfrigérateur, est versée dans un bol sorti du congélateur. Ce bol contient une solution saline dont la fusion progressive permet de récupérer une grande quantité d'énergie à basse température, et donc de refroidir efficacement la préparation. Une manivelle ou un petit moteur permet de faire tourner une pale qui agite le mélange, jusqu'à la prise en glace. On modélise l'ensemble de la façon suivante :

- la préparation de masse m est initialement liquide à 0°C , elle commence à solidifier dès qu'elle est versée ;
- le bol de la sorbetière demeure à température constante $T_0 = -15^\circ\text{C}$;
- la température T du mélange est uniforme ;
- la puissance thermique échangée entre le mélange et le bol de la sorbetière s'écrit $P = \alpha(T - T_0)$;
- les échanges thermiques avec l'air sont négligés pour simplifier.

On note c la capacité thermique massique de la glace, et $\Delta_{\text{fus}}h$ son enthalpie de fusion.

1. Quelle est la durée nécessaire à ce que le mélange se solidifie complètement ?

Lors de la solidification, la température de la glace est constante égale à $T_f = 0^\circ\text{C}$. La variation d'énergie interne (pour un changement d'état entre phases condensées) vaut ici $\Delta U = -m\Delta_{\text{fus}}h$. Enfin, la glace reçoit un transfert thermique $Q = -P\Delta t$.

On néglige le travail mécanique reçu par la glace au moyen de la pale d'agitation, ce travail étant très faible devant les grandeurs énergétiques liées à un changement d'état. Le premier principe appliqué à la glace entre l'instant initial et l'instant auquel elle est complètement solidifiée donne :

$$\Delta U = W + Q \Leftrightarrow m\Delta_{\text{fus}}h = \alpha(T_f - T_0)\Delta t$$

On en déduit que :

$$\Delta t = \frac{m\Delta_{\text{vap}}h}{\alpha(T_f - T_0)}$$

2. La glace est meilleure à déguster à $T_{\text{opt}} = -8^\circ\text{C}$. Combien de temps supplémentaire faudra-t-il patienter ?

Après solidification totale, la glace va se refroidir et sa température va varier en fonction du temps, on la note $T(t)$. On suppose la transformation quasi-statique. Entre l'instant t et l'instant $t + dt$, on aura ainsi $dU = mc_p dT$ où c_p est la capacité thermique de la glace, et $\delta Q = Pdt = -\alpha(T - T_0)dt$. Ainsi, le premier principe infinitésimal $dU = \delta W + \delta Q = \delta Q$ fournit l'équation différentielle suivante :

$$mc_p \frac{dT}{dt} + \alpha T = \alpha T_0$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. La condition initiale est $T(t = 0) = T_f$ (en choisissant l'instant où la glace est solidifiée comme origine des temps), et la solution s'écrit :

$$T(t) = T_0 + (T_f - T_0)e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mc_p}{\alpha}$$

On aura alors atteint la température optimale lorsque :

$$t = -\tau \ln \left(\frac{T_{\text{opt}} - T_0}{T_f - T_0} \right)$$

5 Freins à disque

On considère une voiture de masse $m = 1.5\text{t}$ se déplaçant sur une route. La voiture est équipée de quatre freins à disque en acier, de rayon $R_d = 12\text{cm}$, d'épaisseur $e = 1\text{cm}$. Lors du freinage, le conducteur appuie sur la pédale de frein avec une force F , qui est transmise

au liquide de freinage via un piston de surface $S_0 = 1 \text{ cm}^2$. Le liquide est relié aux disques par un tuyau.

Un problème pouvant survenir lors du freinage dans une descente est la surchauffe des disques : le coefficient de frottement entre les disques diminue lorsque la température augmente, ce qui peut empêcher le véhicule de freiner suffisamment pour maintenir une allure constante. Nous proposons ici d'étudier ce problème.

Des données de constructeur de frein permettent de modéliser la dépendance du coefficient de frottement dynamique entre les disques par la loi suivante :

$$f_d = f_0 - \beta(T - T_0)$$

où T_0 est la température ambiante, $f_0 = 0.4$ et $\beta = 3 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$.

1. La voiture, initialement à la vitesse $v_0 = 90 \text{ km/h}$, freine jusqu'à l'arrêt. Calculer la température des disques en explicitant les hypothèses faites.

On applique le premier principe de la thermodynamique à la voiture. Son énergie potentielle de pesanteur est constante. Son énergie cinétique, initialement de $E_{c,0} = \frac{1}{2}mv_0^2$, est nulle à l'état final. Enfin, pour calculer la variation d'énergie interne, on suppose que seuls les disques des quatre roues s'échauffent. On note $T_0 \approx 30^\circ\text{C}$ leur température initiale et T_f leur température finale. Alors :

$$\Delta U = 4 \times \pi R_d^2 e \times \mu c_p (T_f - T_i)$$

Les forces de frottement agissant au niveau du frein sont des forces intérieures au système et n'apparaissent donc pas dans le premier principe. Comme les roues roulent sans glisser sur le sol, la réaction du sol sur les roues de la voiture ne travaille pas. Enfin, on supposera le freinage suffisamment rapide pour que l'on puisse considérer la transformation comme adiabatique. On conclut par le premier principe que $\Delta(U + E_c) = 0$, d'où :

$$T_f = T_i + \frac{mv_0^2}{8\pi R_d^2 e \mu c_p} = 95^\circ\text{C}$$

2. La voiture descend maintenant une pente d'angle α sur une hauteur totale H à vitesse constante v_0 .
 - (a) Evaluer la température des disques en bas de la pente en fonction de H .

On applique à nouveau le premier principe, mais désormais l'énergie cinétique est constante alors que la variation d'énergie potentielle est non nulle : $\Delta E_p = -mgH$. Il suffit de remplacer ΔE_c par ΔE_p dans le calcul, on obtient :

$$T_f = T_i + \frac{mgH}{4\pi R_d^2 e \mu c_p}$$

- (b) Le résultat dépend-il de v_0 ? Cela vous semble-t-il surprenant ?

Le résultat ne dépend pas de la vitesse de la voiture. Si la voiture va plus vite, la puissance des forces de frottement à appliquer est plus importante, mais la descente dure moins longtemps. Il se trouve que ces deux effets se compensent exactement. (*Remarque : ce n'est pas le cas pour les frottements fluides avec l'air qui augmentent avec le carré de la vitesse, ce qui explique que l'on consomme généralement bien plus de carburant sur un même trajet lorsque l'on roule plus vite.*)

- (c) Que vaut le coefficient de frottement lorsque la voiture arrive en bas de la pente ?

Le coefficient de frottement au niveau des disques est réduit en raison de l'élévation de la température, conformément à la loi donnée par le constructeur :

$$f_d = f_0 - \frac{\beta mgH}{4\pi R_d^2 e \mu c_p}$$

3. On cherche à déterminer à partir de quelle pente cette diminution du coefficient de frottement peut empêcher le véhicule de maîtriser son allure.

- (a) Exprimer le couple de freinage Γ à exercer sur chacune des roues pour maintenir la vitesse constante dans la pente.

On applique le théorème de la puissance mécanique à la voiture au cours de la descente, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La voiture est soumise à son poids (conservatif) et à la réaction de la route qui ne travaille pas (roulement sans glissement des pneus sur la route). En revanche, le couple Γ exercé par les disques sur les roues est une force intérieure au système qui travaille et on note $\mathcal{P}$ sa puissance sur chaque roue :

$$\frac{dE_m}{dt} = 4\mathcal{P}$$

On peut écrire $\mathcal{P} = -\Gamma\Omega$ où Ω est la vitesse de rotation de la roue. Comme la roue roule sans glisser sur le sol, la vitesse v_0 de la voiture est reliée à la vitesse

de rotation de la roue par la relation $v_0 = R_r \Omega$. On en conclut que $\mathcal{P} = -\frac{\Gamma v_0}{R_r}$. Par ailleurs, l'énergie cinétique de la voiture est constante, et son énergie potentielle de pesanteur est donnée par $E_p = mgz = -mgx \tan \alpha$. En dérivant, on obtient :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_p}{dt} = -mg\dot{x} \tan \alpha = -mgv_0 \tan \alpha$$

On conclut par application du théorème de la puissance mécanique :

$$\Gamma = \frac{1}{4}mgR_r \tan \alpha$$

On remarque que ce couple ne dépend pas de la vitesse du véhicule.

- (b) Exprimer la pression P dans le liquide de freinage.

La force F exercée par le conducteur est transmise au liquide de freinage via un piston de section S_0 . Ainsi $P = \frac{F}{S_0}$.

- (c) En supposant la pression du fluide uniformément répartie sur le disque, montrer que le couple Γ exercé sur chacune des roues par les forces de frottement est donné par :

$$\Gamma = \frac{2\pi}{3} f_d P R_d^3$$

On pourra découper le disque en éléments mésoscopiques pour répondre à la question.

On modélise le disque comme un ensemble de petits éléments de surface $dS = r dr d\theta$. Chacun de ces éléments est soumis, dans la direction perpendiculaire au disque, à :

- Une force de pression de norme $dF_p = P dS$, normale au disque ;
- Une réaction normale de la roue dN .

Dans le référentiel de la voiture, qui est galiléen car en translation rectiligne uniforme par rapport au sol, le disque est immobile (seules les roues tournent). Par le principe d'inertie, ces forces se compensent : $dN = dF_p = P dS$.

Comme la roue glisse le long du disque, il existe également une réaction tangentielle de la roue sur le disque, dont la norme dT est donnée par la loi de Coulomb : $dT = f_d dN = f_d P dS = f_d P r dr d\theta$. Le moment de cette force autour de l'axe du disque est donné, en valeur absolue, par la formule du bras de levier :

$$d\Gamma = r \times dT = f_d P r^2 dr d\theta$$

On conclut que le couple total de la force de frottement est donné par :

$$\Gamma = \int_{\theta_0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R_d} d\Gamma = \boxed{\frac{2\pi}{3} f_d P R_d^3}$$

- (d) En déduire une relation entre l'angle maximal $\alpha_{\max}$ auquel le véhicule peut descendre, et la force maximale $F_{\max}$ que le conducteur peut exercer sur la pédale de frein.

L'angle maximal est atteint lorsque le conducteur appuie au maximum sur la pédale de frein, et que le couple appliqué suffit tout juste à maintenir une vitesse constante. Cette situation s'obtient en égalisant les expressions des couples obtenues en a) et en c) :

$$\frac{2\pi}{3} f_d P_{\max} R_d^3 = \frac{1}{4} m g R_r \tan \alpha_{\max}$$

avec $P_{\max} = F_{\max}/S_0$. On en déduit :

$$\boxed{\tan \alpha_{\max} = \frac{8\pi}{3} \frac{f_d F_{\max} R_d^3}{m g S_0 R_r}}$$

4. A partir des deux questions précédentes, montrer que l'angle maximal de la pente dépend de la hauteur de celle-ci selon la relation :

$$\tan \alpha_{\max} = \frac{2R_d}{3R_r} \cdot \frac{F_{\max}}{S_0} \left(\frac{4\pi f_0 R_d^2}{m g} - \frac{\beta H}{e\mu c_p} \right)$$

L'angle de la pente dépend de la hauteur maximale puisque l'on a vu que le coefficient de frottement f_d diminue par échauffement au fur et à mesure de la descente. Plus la voiture descend, plus les disques chauffent, et moins ils sont capables de soutenir une pente élevée. Une descente plus longue doit donc être faite sur une pente moins raide. On obtient directement l'expression demandée en réinjectant l'expression obtenue pour f_d en question 2c dans le résultat de la question 3d.

5. Application numérique : la voiture peut-elle descendre :

- (a) La côte de Papin dans les Grands Fonds ? ($H = 43$ m et $L = 230$ m)

En appliquant la formule pour $H = 43$ m on trouve $\tan \alpha_{\max} = 1.0$, or ici $\tan \alpha = H/L = 0.19$ donc la voiture peut descendre.

- (b) Le col des Mamelles, côté Pointe-Noire ? ($H = 500$ m et $L = 6.0$ km)

On a désormais $\tan \alpha_{\max} = 0.25$ et $\tan \alpha = 0.08$ donc la voiture peut descendre.

- (c) La côte de Laffrey dans les Alpes ? ($H = 590$ m et $L = 5.8$ km).

On a désormais $\tan \alpha_{\max} = 0.09$ et $\tan \alpha = 0.10$ donc la voiture ne peut pas descendre à allure constante, elle va accélérer.

- (d) La route de Laffrey est parsemée de panneaux "Utiliser votre frein moteur". Expliquer pourquoi la voiture peut quand même descendre (avec prudence).

En baissant le rapport de vitesse, cela va fortement augmenter la vitesse de rotation dans le moteur et augmenter la puissance des frottements mécaniques dans les engrenages. Ceci va créer un couple de freinage supplémentaire qui permettra à la voiture de descendre sans faire surchauffer les disques.

Par ailleurs, nous avons aussi supposé que les disques étaient en évolution adiabatique, mais sur une durée d'une dizaine de minutes, les transferts thermiques avec l'extérieur permettent d'évacuer une partie de l'énergie thermique accumulée au cours de la descente dans les disques.

Données :

- Capacité thermique massique de l'acier $c_p = 500 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$
- Masse volumique de l'acier $\mu = 8000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Rayon des quatre roues du véhicule : $R_r = 35 \text{ cm}$
- Force maximale pouvant être exercée sur la pédale de frein : $F = 100 \text{ N}$

II - Enthalpie standard de réaction

6 Température de flamme

La réaction de combustion de l'hydrogène s'écrit :



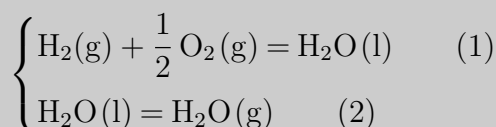
Cette réaction a lieu avec une température initiale de $T_i = 300 \text{ K}$ et on note ξ son avancement. Dans toute la suite, on suppose que la combustion se déroule dans une enceinte calorifugée et un piston mobile, lui aussi calorifugé permet de maintenir la pression P_0 constante.

1. Citer une application industrielle mettant en jeu cette réaction.

On peut citer par exemple la pile à hydrogène, qui permet de produire de l'énergie électrique par cette réaction.

2. Que vaut l'enthalpie de réaction $\Delta_r H^0$? Elle sera par la suite supposée indépendante de la température.

On peut remarquer que cette réaction est la réaction standard de formation de l'eau, cependant l'eau est produite sous forme gazeuse et non sous forme liquide. On la décompose comme la somme de deux réactions comme suit :



On a alors $\Delta_r H_1^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) = -241.8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\Delta_r H_2^\circ = L_{\text{vap}}(\text{H}_2\text{O}) \times M_{\text{H}_2\text{O}} = 40.6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. Comme l'enthalpie est une fonction d'état, les enthalpies standard s'ajoutent comme suit :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_r H_1^\circ + \Delta_r H_2^\circ = -2012.2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3. On suppose la combustion totale et on note n_{0,H_2} et n_{0,O_2} les quantités de matière initiales respectives en dihydrogène et dioxygène de manière à ce que le réactif limitant soit le dioxygène. Exprimer la température T_f atteinte par le mélange en fin de combustion en fonction des données du problème.

On a une transformation monobare et monotherme sans travail autre que les forces de pression, ainsi $\Delta H = Q$. De plus, la transformation est adiabatique donc $Q = 0$. Comme H est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi, on considère la transformation suivante :

Réactifs à $T_i \rightarrow \text{H}_2\text{O}(\text{g})$ et reste de $\text{H}_2(\text{g})$ à $T_i \rightarrow \text{H}_2\text{O}(\text{g})$ et reste de $\text{H}_2(\text{g})$ à T_f

On a alors, en notant $\xi = 2n_{0,\text{O}_2}$ l'avancement final de la réaction :

$$\Delta H = \xi \times \Delta_r H^\circ + [(n_{0,\text{H}_2} - \xi)C_{p,m}(\text{H}_2) + \xi C_{p,m}(\text{H}_2\text{O})](T_f - T_i)$$

Ainsi :

$$T_f = T_i - \frac{2n_{0,\text{O}_2} \Delta_r H^\circ}{(n_{0,\text{H}_2} - 2n_{0,\text{O}_2})C_{p,m}(\text{H}_2) + 2n_{0,\text{O}_2} C_{p,m}(\text{H}_2\text{O})}$$

4. Dans quelle(s) condition(s) la température atteignable au cours de cette combustion est-elle maximale ? La calculer.

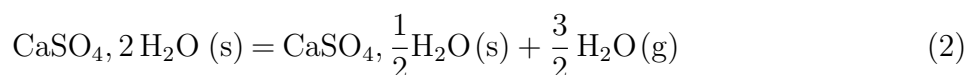
La température maximale est atteinte en conditions stoechiométriques. Alors nous avons :

$$T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ}{C_{p,m}(\text{H}_2\text{O})} \approx 6.2 \cdot 10^3 \text{ K}$$

Données : $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) = -241.8 \text{ kJ/mol}$; $C_{p,m}(\text{H}_2\text{O}_{(g)}) = 34 \text{ J/K/mol}$; $C_{p,m}(\text{H}_{2(g)}) = 29 \text{ J/K/mol}$; $L_{vap}(\text{H}_2\text{O}) = 2257 \text{ kJ/kg}$; $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g/mol}$.

7 Production du plâtre

La déshydratation du gypse $\text{CaSO}_4, 2\text{H}_2\text{O}(\text{s})$ permet d'obtenir le plâtre $\text{CaSO}_4, \frac{1}{2}\text{H}_2\text{O}(\text{s})$. La réaction totale suivante est pratiquée à 400°C :



1. Calculer l'enthalpie standard de la réaction de déshydratation, en supposant les enthalpies standard de réaction indépendantes de la température. Conclure sur la nécessité ou non de chauffer le réacteur.

Par la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{plâtre}) + \frac{3}{2}\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) - \Delta_f H^\circ(\text{gypse})$$

Ainsi :

$$\Delta_r H^\circ = -1575 - 1.5 \times 241.8 + 2021 = 83 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'enthalpie de réaction est positive donc la réaction est endothermique: elle consomme de l'énergie thermique. Il faut donc chauffer le milieu réactionnel pour maintenir sa température et pour que la réaction puisse continuer à se faire.

2. Quelle est l'énergie nécessaire Q pour produire un sac de plâtre classique du commerce, pesant $m_p = 40 \text{ kg}$, si on introduit le gypse à 298 K dans le four ?

Il va falloir chauffer le gypse à 400°C , puis produire la réaction. Or, la réaction étant monotherme et monobare, $\Delta H = Q$. On en déduit, en sommant la variation d'enthalpie pour chacune des deux étapes :

$$Q = \Delta H = C_{p,m}(\text{gypse})n_{\text{gypse}}\Delta T + \Delta_r H^\circ n_{\text{gypse}}$$

De plus, on peut relier la quantité de gypse à celle de plâtre :

$$n_{\text{gypse}} = n_{\text{plâtre}} = \frac{m_{\text{plâtre}}}{M_p} = \frac{40}{0.145} = 276 \text{ mol}$$

On trouve, après avoir remplacé dans l'expression (attention à convertir les degrés en Kelvins), $Q = 42 \cdot 10^6 \text{ J}$.

3. Pour apporter l'énergie nécessaire à la réaction, on réalise la combustion du charbon à 400°C :



Le charbon et l'air nécessaires sont introduits dans le foyer à la température de 298 K. On utilise le double de la quantité d'air nécessaire et les gaz sont évacués à la température du four. Le rendement thermique r_{th} du four est de 80 % (pertes d'isolation...), quelle masse de charbon m_C faut-il brûler pour produire ce sac de plâtre ?

La réaction (3) est la réaction standard de formation du CO_2 donc $\Delta_r H_3^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{CO}_2)$.

On considère une situation dans laquelle on introduit les réactifs à T_i , on les chauffe à T_f et on réalise la réaction. Les réactifs sont :

- Charbon en quantité n_C
- Dioxygène en quantité stoechiométrique $n_{\text{O}_2} = 2n_C$
- Diazote qui est également présent dans l'air : $n_{\text{N}_2} = \frac{0.79}{0.21} \times n_{\text{O}_2} = 3.76 \times n_C = \alpha n_C$

On a alors :

$$\Delta H = n_C(C_{p,m}(\text{C}) + C_{p,m}(\text{O}_2) + \alpha C_{p,m}(\text{N}_2))(T_f - T_i) + n_C \Delta_r H^\circ$$

Or $n_C = m_C/M_C$ et l'énergie libérée par la combustion est :

$$-Q' = -\Delta H = -\frac{m_C}{M_C} [(C_{p,m}(\text{C}) + C_{p,m}(\text{O}_2) + \alpha C_{p,m}(\text{N}_2))(T_f - T_i) + \Delta_r H^\circ]$$

L'énergie récupérée est $E = r_{th} \times (-Q')$ et on veut $E = Q$ pour pouvoir faire fonctionner le four, donc :

$$m_C = \frac{-QM_C}{r_{th} [(C_{p,m}(\text{C}) + C_{p,m}(\text{O}_2) + \alpha C_{p,m}(\text{N}_2))(T_f - T_i) + \Delta_r H^\circ]}$$

L'application numérique donne $m_C = 1.93 \text{ kg}$.

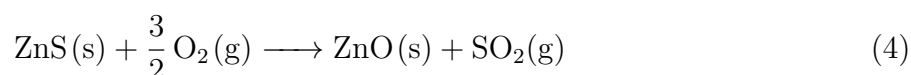
On donne les grandeurs thermodynamiques à 298 K, supposées indépendantes de la température : ainsi que la masse molaire du plâtre $M_p = 145 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et du carbone

Espèce	Gypse	Plâtre	H ₂ O (g)	CO ₂ (g)	N ₂ (g)	O ₂ (g)
$\Delta_f H^\circ$ en kJ mol ⁻¹	-2021	-1575	-241,8	-393,5		
$C_{p,m}^\circ$ (J K ⁻¹ mol ⁻¹)	186			33,6	37,1	29,1

$M_C = 12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et la capacité thermique molaire du charbon à pression constante $C_{p,m}^C = 8.6 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

8 Métallurgie du zinc

L'obtention du zinc par métallurgie se fait en deux étapes : une opération de grillage du sulfure de zinc (ou "blende") ZnS en oxyde de zinc ZnO, puis réduction de cet oxyde. On étudie les aspects thermodynamiques de l'opération de grillage de la blende qui consiste à transformer le sulfure de zinc, à une température de 1350 K, selon le bilan :



On donne à 298 K :

	ZnO(s)	ZnS(s)	SO ₂ (g)	O ₂ (g)	N ₂ (g)	SiO ₂ (s)
$\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹)	-348	-203	-297			
C_p° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	51,6	58,1	51,1	34,2	30,7	72,5

1. Calculer l'enthalpie de réaction à 298 K.

On utilise la loi de Hess en remarquant que le constituant O₂ est déjà dans son état standard :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{ZnO}) + \Delta_f H^\circ(\text{SO}_2) - \Delta_f H^\circ(\text{ZnS}) = -442 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. La réaction est autoentretenue si l'énergie libérée par la réaction permet de maintenir la température du mélange à $T > 1350 \text{ K}$. On suppose dans un premier temps que le sulfure de zinc est pur. On fait réagir 1 mole de blende avec la quantité stoechiométrique d'air (assimilé à un mélange de fraction molaire 0.2 en O₂(g) et 0.8 en N₂(g) approximativement). En supposant le réacteur monobare et adiabatique, calculer la température atteinte par le mélange réactionnel. Conclure.

On suppose la réaction adiabatique, alors $\Delta H = Q = 0$. Or, on peut supposer qu'on chauffe les produits à T_f après avoir fait la réaction (H est une fonction d'état). On fait réagir $n = 1$ mol de blende avec $\frac{3}{2}$ mol de dioxygène et $\frac{8}{2} \cdot \frac{3}{2} = 6$ mol de diazote. Après la réaction, il reste 6 mol de diazote, et 1 mol de dioxyde de soufre et d'oxyde de zinc produites par la réaction. On en déduit :

$$0 = \Delta H = n\Delta_r H^\circ + n(C_p(\text{ZnO}) + C_p(\text{SO}_2) + 6C_p(\text{N}_2))(T_f - T_i)$$

Ainsi :

$$T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ}{C_p(\text{ZnO}) + C_p(\text{SO}_2) + 6C_p(\text{N}_2)} = \boxed{1839 \text{ K}}$$

On maintient bien le réacteur à une température suffisante pour autoentretenir la réaction car $T_f > T_{lim} = 1350 \text{ K}$.

3. En fait, la blende n'est pas pure et contient une fraction molaire x de silice SiO_2 . Quelle doit être la teneur en silice maximale x du minerai pour que la réaction demeure auto-entretenue ?

On a alors 1 mol de blende dans $n_{tot} = \frac{1}{1-x}$ mol du mélange, et $\frac{x}{1-x}$ mol de silice. On se place dans le cas limite où $T_f = T_{lim}$, il faut alors rajouter la capacité thermique de la silice dans le calcul :

$$0 = \Delta H = n\Delta_r H^\circ + n \left(C_p(\text{ZnO}) + C_p(\text{SO}_2) + 6C_p(\text{N}_2) + \frac{x}{1-x} C_p(\text{SiO}_2) \right) (T_{lim} - T_i)$$

En réutilisant l'expression de T_f établie en question précédente, il vient alors :

$$0 = \Delta_r H^\circ \left[1 - \frac{T_{lim} - T_i}{T_f - T_i} \right] + \frac{x}{1-x} C_p(\text{SiO}_2) (T_{lim} - T_i)$$

Ou encore :

$$\frac{x}{1-x} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{C_p(\text{SiO}_2)} \times \frac{(T_f - T_{lim})}{(T_{lim} - T_i)(T_f - T_i)} = 1.83$$

Ainsi $x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1.83}}$. On trouve ainsi que la teneur maximale en silice du minerai pour que la condition de température soit satisfaite est $\boxed{x = 0.65}$.

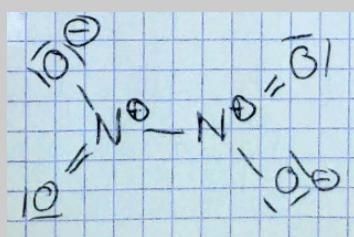
9 Départ d'une fusée

En propulsion spatiale, les réactifs de propulsion sont nommés propergol, mélange de combustibles oxydants et combustibles réducteurs, nommés ergols. Par réaction de combus-

tion, le mélange gazeux produit subira ensuite une détente dans une tuyère pour fournir la force de poussée nécessaire. On utilise par exemple un propergol liquide formé par le 1,1-diméthylhydrazine $\text{N}_2\text{H}_2(\text{CH}_3)_2$ (DMHA) et le tétraoxyde de diazote N_2O_4 , car ils s'enflamment spontanément au contact l'un de l'autre (on parle d'hypergolicité de ces deux liquides).

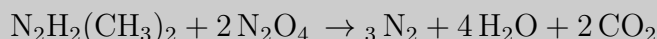
1. Donner la formule de Lewis de N_2O_4 , en précisant au préalable le nombre d'électrons de valence de ses atomes constitutifs.

L'azote a 5 électrons de valence et l'oxygène en a 6, la formule suivante respecte l'octet :



2. La réaction de combustion forme du diazote, de la vapeur d'eau et du dioxyde carbone. Ecrire l'équation de la réaction et calculer son enthalpie standard à 298 K.

La réaction est la suivante :



Par la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = 4\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) + 2\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) - 2\Delta_f H^\circ(\text{N}_2\text{O}_4) - \Delta_f H^\circ(\text{DMHA})$$

On trouve $\Delta_r H^\circ = -2231 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

3. Cette combustion est très rapide et les composés formés restent non dissociés à haute température. Déterminer la température maximale théorique des gaz issus de la combustion totale du mélange stœchiométrique DMHA- N_2O_4 (l).

On suppose la réaction adiabatique car elle est très rapide. Alors : $\Delta H = Q = 0$. H étant une fonction d'état, on peut décomposer sa variation en deux étapes :

- Réaction de combustion de n_0 moles de DMHA :

$$\Delta H_1 = n_0 \Delta_r H^\circ$$

- Chauffage des produits :

$$\Delta H_2 = n_0 \times (3C_p(\text{N}_2) + 4C_p(\text{H}_2\text{O}) + 2C_p(\text{CO}_2))\Delta T$$

Or $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$ d'où :

$$T_f = T_i + \Delta T = T_i - \frac{\Delta_r H^\circ}{3C_p(\text{N}_2) + 4C_p(\text{H}_2\text{O}) + 2C_p(\text{CO}_2)}$$

Si on prend $T_i = 298 \text{ K}$ alors on trouve $T_f = 7930 \text{ K}$.

4. Le premier étage de la fusée Ariane IV contient 48 t de DMHA.

- (a) Les deux réactifs sont embarqués en proportions stoechiométriques. Expliquer pourquoi.

Cela maximise l'énergie récupérée par unité de masse de carburant.

- (b) En déduire la masse de propergol dans les réservoirs.

On a, en raison de la stoechiométrie : $n(\text{N}_2\text{O}_4) = 2n(\text{DMHA})$, ce qui se traduit par :

$$\frac{m(\text{N}_2\text{O}_4)}{M(\text{N}_2\text{O}_4)} = 2 \frac{m(\text{DMHA})}{M(\text{DMHA})}$$

avec $M(\text{N}_2\text{O}_4) = 92 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M(\text{DMHA}) = 60 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. L'application numérique donne alors $m(\text{N}_2\text{O}_4) = 147 \text{ t}$ et $m_{\text{tot}} = 195 \text{ t}$.

- (c) Le bloc propulseur consomme $1 \text{ t}\cdot\text{s}^{-1}$ de propergol liquide. En déduire la durée maximale de fonctionnement du propulseur.

On a alors $T_{\text{max}} = 195 \text{ s}$ soit un peu plus de trois minutes. La fusée doit décoller très vite !

5. La fusée Ariane, décolle de la surface à Kourou en Guyane, avec à son bord un équipage pour la station spatiale internationale ! On suppose que le carburant représente la moitié de la masse de la fusée.

- (a) Déterminer son énergie potentielle gravitationnelle à la surface de la Terre.

On note $m = 2 \times 195 = 390 \text{ t}$ la masse de la fusée, R_T le rayon terrestre à Kourou. Alors :

$$E_p^1 = -G \frac{mM_T}{R_T}$$

- (b) Faire de même lorsque la fusée est arrivée à l'ISS.

De même :

$$E_p^2 = -G \frac{mM_T}{R_T + H}$$

(c) La fusée a-t-elle assez de carburant pour rejoindre l'ISS ?

On suppose que l'énergie thermique libérée par la réaction va permettre de faire fonctionner le moteur. On négligera la variation d'énergie cinétique de la fusée, puisqu'on ne sait pas sur quelle orbite elle va arriver au niveau de l'ISS (probablement pas une orbite circulaire sur laquelle on pourrait calculer facilement cette énergie cinétique). Alors il faut que :

$$E_p^2 - E_p^1 \leq \Delta_r H^\circ \times n_0 = \Delta_r H^\circ \times \frac{m(\text{DMHA})}{M(\text{DMHA})}$$

On fait l'application numérique, le membre de gauche vaut 1.44 TJ et celui de droite 1.78 TJ donc la fusée a assez de carburant, mais seulement si le moteur a un très bon rendement.

Données :

- Masses molaires en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: C :12 ; O :16 ; N :14 ; H :1
- Enthalpies standard de formation en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$: DMHA : 51.6 ; N_2O_4 : -19.5 ; H_2O : -241.8 ; CO_2 : -393.5
- Capacités thermiques massiques à pression constante en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$: H_2O : 33.6 ; CO_2 : 37.1 ; N_2 : 27.9
- Masse de la Terre : $5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
- Altitude de l'ISS : 400 km
- Distance de Kourou au centre de la Terre : 6 378 km

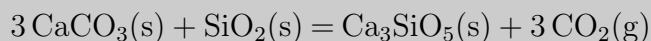
10 Bilan carbone de la production de ciment

L'industrie cimentière est aujourd'hui responsable de 5 à 7 % des émissions de CO_2 à l'échelle mondiale. La fabrication d'une tonne de ciment rejette en moyenne l'équivalent de 0,6 tonne de CO_2 dans l'atmosphère. Cet exercice a pour objectif de retrouver cet ordre de grandeur en procédant à un (rapide) bilan carbone de la production.

L'élaboration des ciments se fait à haute température dans un four à partir d'un mélange de 80 % de calcaire CaCO_3 et de 20 % d'argile, composé d'alumine Al_2O_3 et de silice SiO_2 . Le composé majoritaire obtenu est le silicate de calcium Ca_3SiO_5 .

1. Ecrire l'équation de réaction notée (R_1) qui modélise la formation de Ca_3SiO_5 solide à partir des seuls réactifs silice et calcaire. Quel produit est formé lors de la réaction ?

L'équation de la réaction s'écrit :



Elle forme également du dioxyde de carbone qu'il va falloir comptabiliser dans le bilan carbone.

2. Calculer l'enthalpie standard de cette réaction, notée $\Delta_r H_1^\circ$. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ? Justifier que l'on utilise un four pour réaliser la réaction.

D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H_1^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) + 3\Delta_f H^\circ(\text{CaCO}_3) - \Delta_f H^\circ(\text{SiO}_2) = 473 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Cette quantité étant positive, la réaction est endothermique.

3. Calculer la masse de calcaire CaCO_3 nécessaire pour obtenir une tonne de ciment par la réaction (R_1) ainsi que l'énergie nécessaire pour réaliser la réaction.

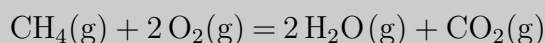
Une masse $m = 1$ tonne de silicate de calcium correspond à une quantité de matière $n = \frac{m}{M(\text{Ca}_3\text{SiO}_5)} = 4.4 \cdot 10^3 \text{ mol}$. Un tableau d'avancement permet facilement de montrer que la quantité de matière de calcaire nécessaire est alors de $n_0 = 3n = 1.3 \cdot 10^4 \text{ mol}$, ce qui correspond à une masse de calcaire :

$$m_0 = n_0 M(\text{CaCO}_3) = 1.3 \text{ t}$$

Supposons que cette réaction se fait de façon monobare grâce à un transfert thermique Q reçu par le système de chauffage. On a alors $\Delta H_1 = Q = n \Delta_r H_1^\circ = 2.0 \cdot 10^9 \text{ J}$.

Les fours utilisés sont généralement des fours à gaz, dans lesquels l'énergie est apportée par la combustion du méthane $\text{CH}_4(\text{g})$. On donne l'enthalpie standard de la réaction de combustion du méthane, écrite conventionnellement avec un nombre stoechiométrique algébrique -1 pour le méthane : $\Delta_r H_2^\circ = -690 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

4. Ecrire l'équation bilan de la réaction (R_2).



5. Quelle masse de méthane faut-il brûler pour apporter l'énergie nécessaire à la production d'une tonne de ciment à la pression atmosphérique et à température constante ?

Comme le nombre stoechiométrique est pris égal à -1 pour le méthane, alors la quantité de méthane consommée est égale à l'avancement final ξ_2 de la réaction (R_2). Considérons cette réaction isotherme, fournissant le transfert thermique $-Q$ au réacteur (l'énergie est cédée par le système, d'où le signe négatif). Nous avons alors, en supposant la réaction monobare et en l'absence de travail autre que les forces de pression (pas de moteur) :

$$\Delta H_2 = -Q = \xi_2 \Delta_r H_2^\circ = \frac{m(\text{CH}_4)}{M(\text{CH}_4)} \Delta_r H_2^\circ$$

On en déduit :

$$m(\text{CH}_4) = -\frac{QM(\text{CH}_4)}{\Delta_r H_2^\circ} = 48 \text{ kg}$$

6. Quelle est la masse totale de dioxyde de carbone produite au cours du processus ? Comparer à la valeur donnée en préambule.

Les deux réactions produisent du CO_2 : lors de la fabrication du ciment, et lors de la combustion des carburants fossiles pour apporter l'énergie nécessaires. La réaction 1 produit 3 moles de CO_2 pour une mole d'avancement et la réaction 2 une mole de CO_2 pour une mole d'avancement ainsi :

$$m_{\text{CO}_2} = (3\xi_1 + \xi_2)M(\text{CO}_2) = 710 \text{ kg}$$

On retrouve bien l'ordre de grandeur annoncé en préambule avec un écart relatif de l'ordre de 15 %, qui peut être dû notamment à l'utilisation d'autres combustibles et/ou d'énergies décarbonées pour réaliser la réaction.

Données :

	CaCO ₃ (s)	SiO ₂ (s)	Ca ₃ SiO ₅ (s)	CO ₂ (g)	
$\Delta_f H^\circ$ [kJ·mol ⁻¹]	-1206	-910.0	-2876	-393.1	
	H	C	O	Si	Ca
M [g·mol ⁻¹]	1.0	12.0	16.0	28.1	40.1

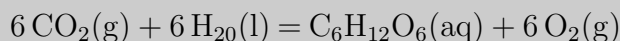
11 Fluorescence chlorophyllienne

Le 15 septembre 2026, le satellite FLEX a été lancé par l'ESA pour mesurer la fluorescence émise par les plantes. Nous souhaitons mieux comprendre ce phénomène et étudier pourquoi cette observation par satellite peut permettre d'anticiper les périodes de sécheresse.

Pour cela, nous étudions une plante occupant une surface d'environ $S = 0.1 \text{ m}^2$. La plante est écalirée par le rayonnement solaire avec une intensité d'environ $\mathcal{P}_{\text{soleil}} = 1368 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

1. La photosynthèse consomme du dioxyde de carbone et de l'eau, et produit du dioxygène ainsi que des sucres. On supposera qu'il s'agit de glucose $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$. Ecrire l'équation de la réaction et calculer l'enthalpie de réaction.

La réaction s'écrit :



Son enthalpie de réaction se calcule par la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = -6\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) - 6\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) + \Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 2583 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. Expliquer pourquoi la réaction n'est possible que lorsque la plante est exposée au soleil.

La réaction est endothermique, donc consomme de l'énergie thermique. Si la plante réalisait cette réaction la nuit, elle perdrait toute son énergie thermique et se refroidirait. Pour que la réaction se fasse à température constante, il faut un apport énergétique important, qui est ici obtenu à l'aide du rayonnement solaire.

3. (a) Quelle est la couleur de la chlorophylle ? En déduire une estimation de la longueur d'onde des photons absorbés.

La chlorophylle est verte. Donc, elle absorbe la couleur complémentaire du vert, c'est-à-dire dans le rouge, autour de $\lambda = 600 \text{ nm}$.

- (b) Combien de photons faut-il au minimum pour produire une molécule de glucose ?

Pour produire 1 molécule (soit $1/N_A \text{ mol}$) de glucose, il faut une énergie $E_g = \frac{\Delta_r H^\circ}{N_A}$ où N_A est le nombre d'Avogadro. Chaque photon porte une énergie $E_p = \frac{hc}{\lambda}$ ainsi le nombre de photons nécessaire est :

$$N_p = \frac{\Delta_r H^\circ \lambda}{hc N_A} = 13.3$$

Il faut donc au minimum 14 photons pour produire une molécule de glucose.

Dans toute la suite, on suppose que la plante absorbe environ $\alpha = 5\%$ de l'énergie lumineuse arrivant de la part du soleil, le reste du spectre étant trop éloigné du pic d'absorption de la chlorophylle.

En période de forte chaleur, la plante ouvre ses stomates pour se refroidir : les stomates permettent à la plante de respirer mais aussi à l'eau de s'évaporer ce qui régule la température de la plante. Enfin, la plante a besoin d'environ 3 grammes de glucose par jour.

4. (a) Déterminer la quantité d'eau que la plante perd par évaporation pour maintenir sa température constante.

Chaque jour, la plante doit produire une quantité de matière de glucose :

$$n = \frac{m(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)}{M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)} = 17 \text{ mmol}$$

On applique le premier principe au système {plante + eau de la plante qui s'évapore dans la journée}. Le système reçoit un transfert thermique de la part du soleil pendant une journée de 12 heures :

$$Q = \alpha \mathcal{P}_{\text{soleil}} \Delta t \times S = 0.05 \cdot 1368 \cdot 12 \cdot 3600 \cdot 0.1 = 295 \text{ kJ}$$

Par ailleurs, la variation d'enthalpie du système est liée à la réaction chimique et à l'évaporation d'une masse m d'eau :

$$\Delta H = n \Delta_r H^\circ + m L_v$$

Le premier principe fournit, dans le cas d'une transformation monobare, $\Delta H = Q$. On peut donc conclure que :

$$m = \frac{Q - n \Delta_r H^\circ}{L_v} = 0.11 \text{ kg}$$

soit environ 110 mL d'eau (c'est-à-dire un demi-verre par jour).

- (b) La plante a-t-elle, en moyenne, assez d'eau pour survivre sans arrosage artificiel en Guadeloupe, sachant qu'il pleut environ 2000 mm/an ?

Il pleut donc environ $h = 2000/365 = 5 \text{ mm}$ par jour, réparti sur la surface S , cela représente un volume d'eau :

$$V = h \times S = (5 \cdot 10^{-3}) \cdot 0.1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 500 \text{ mL}$$

Donc la plante a assez d'eau pour survivre.

- (c) Même question en Provence, où les précipitations au mois de juillet sont en moyenne de 10 mm.

On a alors à peine $10/30 = 0.3$ mm par jour soit environ quinze fois moins d'eau qu'en Guadeloupe : ce n'est pas suffisant pour la plante, qui a besoin d'un arrosage artificiel.

5. La plante peut également évacuer de l'énergie par fluorescence, en émettant des photons dans l'infrarouge.

- (a) Comment évolue la puissance lumineuse émise par la plante en période de sécheresse et pourquoi ?

Notons Q' le transfert thermique cédé par la plante par fluorescence, alors on a désormais $\Delta H = Q - Q'$ donc :

$$Q' = Q - n\Delta_r H^\circ - mL_v$$

En période de sécheresse, pour réguler son taux d'humidité, la plante va réduire l'évaporation donc réduire la quantité d'eau m qui s'évapore. On voit dans cette équation que cela contribue à faire augmenter la fluorescence.

- (b) Justifier alors que l'observation satellitaire dans le rouge et l'infrarouge permet de détecter les plantes ayant besoin d'eau avant qu'elles ne se dessèchent complètement.

Une mesure par satellite d'une fluorescence permet donc de détecter ce type de comportement de la plante. Si la plante continue à réduire m pendant trop longtemps, cela va poser problème, car l'évaporation de l'eau permet de réguler la température de la plante. La plante va se réchauffer et risque de faner. La détection par satellite permet d'identifier précisément les zones qui ont besoin d'eau avant que l'on observe les plantes qui se fanent.

Données :

- Enthalpies de formation à 25 °C : $\Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{s})) = -1273.1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) = -241.8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) = -393.5 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- Masses molaires : $M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = 180.6 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M(\text{H}_2\text{O}) = 18 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- Enthalpie de vaporisation de l'eau : $L_v = 2250 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.
- Capacité thermique de l'eau liquide : $c = 4.18 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

12 Cuisson des pâtes

Cet exercice fait appel à une démarche de résolution de problème, et nécessite en particulier de proposer une modélisation physique et/ou chimique sur la base d'hypothèses que l'on prendra soin de préciser et de commenter.

Vous organisez un événement sportif avec une randonnée au sommet de la Soufrière depuis le littoral de Saint-Claude. Vous devez prévoir de nourrir une centaine de personnes la veille au soir. Afin d'aller au plus simple, vous choisissez de préparer des pâtes (sans accompagnement, ni entrée, ni dessert). Sur le paquet, il est indiqué que le contenu en carbohydrates est de 70 g pour 100 g de pâtes. On supposera que ces carbohydrates correspondent à du glucose de formule chimique $C_6H_{12}O_6$.

Sur le paquet, il est également indiqué qu'il faut utiliser 1 L d'eau de cuisson pour 100 g de pâtes. Au cours de la cuisson, une partie de l'eau, estimée à 10 %, est vaporisée.

Pour apporter l'énergie, vous disposez d'une bouteille de butane C_4H_{10} , cylindrique, de diamètre 35 cm et de hauteur 50 cm, remplie à 80 % de butane liquide. Lorsque le robinet de la bouteille est ouvert, le butane se vaporise sous l'effet de la détente, et sort à l'état gazeux.

1. (a) Estimer l'énergie nécessaire pour une personne de 70 kg pour monter au sommet de la Soufrière depuis la côte.

Il lui faut gagner de l'énergie potentielle de pesanteur : si la personne fournit un travail W , on lui applique le théorème de l'énergie mécanique dans le référentiel terrestre supposé galiléen. La personne n'est soumise qu'à son poids et à la réaction du sol. Cette réaction ne travaille pas en l'absence de glissement, ce qui est le cas si la personne possède de bonnes chaussures. Enfin, il ne faut pas oublier le travail W des frottements intérieures au système et non conservatives, qui est fourni par les muscles de la personne qui monte. On a :

$$\Delta E_c + mg(z_{\text{Soufriere}} - z_{\text{mer}}) = W$$

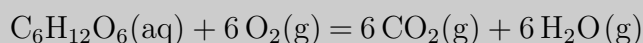
Or $\Delta E_c \approx 0$ (la personne est à l'arrêt au départ et à l'arrivée), ainsi $W = mg(z_{\text{Soufriere}} - z_{\text{mer}}) = 1000 \text{ kJ}$.

- (b) En plus de cela, une personne adulte a besoin d'environ 2000 kJ par repas pour le fonctionnement normal de son métabolisme. En déduire l'apport énergétique dont elle aura besoin pendant le repas.

Il lui faudra donc 3000 kJ pour ce repas.

2. (a) Dans le corps humain, le glucose que l'on consomme, $C_6H_{12}O_6$ réagit avec le

dioxygène que l'on respire pour former de l'eau et du dioxyde de carbone (que l'on expire). Écrire la réaction chimique associée.



- (b) En déduire la quantité de pâtes que chaque personne doit consommer afin de pouvoir réaliser cette ascension.

L'enthalpie standard de la réaction se calcule par la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = 6\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) + 6\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2) - \Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6) = -2583 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Pour avoir une énergie de $E = 3000 \text{ kJ}$ il faut donc consommer $n_g = \frac{E}{|\Delta_r H^\circ|} = 1.18 \text{ mol}$ de glucose, soit une masse de glucose :

$$m_g = M(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6)n_g = 213.4 \text{ g}$$

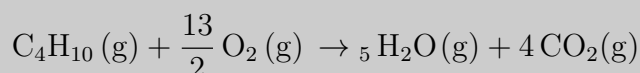
Ou encore, comme il y a 70 % de glucose dans les pâtes, une masse de pâtes :

$$m_p = \frac{m}{0.7} = 304 \text{ g}$$

(Cela semble beaucoup, mais la personne ne mangera rien d'autre.)

3. Avez-vous assez de gaz pour nourrir votre groupe ?

Le gaz va apporter l'énergie de cuisson par sa combustion :



On calcule par la loi de Hess (en remarquant que le dioxygène est déjà dans son état standard) $\Delta_r H^\circ = -2658 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Notons n la quantité de butane à brûler, et m la masse d'eau à évaporer. En considérant le système {gaz+eau} on a :

$$\Delta H = n\Delta_r H^\circ + m\Delta_{vap} H^\circ$$

et $\Delta H = 0$ si on considère l'évolution monobare et adiabatique. Or, il faut évaporer 100 g d'eau pour 100 g de pâtes et on a 100 personnes donc $m = 100m_p = 30.8 \text{ kg}$.

On en déduit $n = -\frac{m\Delta_{vap} H^\circ}{\Delta_r H^\circ} = 26.1 \text{ mol}$.

La masse de butane nécessaire est donnée par :

$$m_B = M(\text{C}_4\text{H}_{10}) \times n = 1.51 \text{ kg}$$

Or on a un volume de butane $V = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = 0.048 \text{ m}^3$, et comme la bouteille est remplie à 80 %, la masse de butane disponible est :

$$m'_B = 0.8V\rho_l = 23 \text{ kg}$$

Il y a donc largement assez de butane pour cuire les pâtes.

Données :

- Enthalpies de formation à 25 °C : $\Delta_f H^\circ(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6(\text{s})) = -1273.1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H^\circ(\text{C}_4\text{H}_{10}(\text{g})) = -124.8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}(\text{g})) = -241.8 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\Delta_f H^\circ(\text{CO}_2(\text{g})) = -393.5 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- Masse volumique du butane : $\rho_l = 0.60 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$ sous forme liquide, et $\rho_g = 2.7 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$ sous forme gazeuse.
- Masse molaires : butane $M = 58.12 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$; glucose : $M = 180.6 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- Enthalpie de vaporisation de l'eau : $\Delta_{vap} H^\circ = 2250 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.
- Capacité thermique de l'eau liquide : $c = 4.18 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- Altitude de la Soufrière : $h = 1467 \text{ m}$