

Thermodynamique des systèmes ouverts

Chapitre 7

I - Principes infinitésimaux

1 Temps de réponse d'un thermomètre

On considère un thermomètre à mercure. Le mercure se trouve dans une sphère de rayon $a = 5 \text{ mm}$, à laquelle est rattaché un cylindre de rayon $b = 0.1 \text{ mm}$. La sphère et le cylindre sont délimités par une couche de verre d'épaisseur $e = 2 \text{ mm}$. On note $\rho = 13.5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ la masse volumique du mercure et $c_p = 139 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ sa capacité thermique massique à pression constante, ainsi que $\rho_v = 2.5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ et $c_{p,v} = 840 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ les mêmes quantités pour le verre.

1. (a) Faire un schéma et expliquer le principe de fonctionnement du thermomètre.
(b) Pour le mercure, le coefficient de dilatation α est donné par :

$$\alpha = \left. \frac{\partial V}{\partial T} \right|_p = 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \quad (1)$$

Déterminer la variation de hauteur du niveau de mercure dans le cylindre pour une augmentation de température de 1°C .

- (c) Déterminer la hauteur minimale h du thermomètre pour que l'on puisse mesurer toutes les températures possibles à Pointe-à-Pitre. Les records enregistrés par la station Météo-France du Raizet sont de 13.0°C (4 février 1958) et 34.2°C (24 juillet 2001).
2. On constate que le thermomètre était au soleil. On le met à l'ombre et on voudrait savoir au bout de combien de temps on pourra lire la température. On modélise la puissance thermique reçue par le thermomètre par une loi de Newton :

$$\mathcal{P} = kS(T_{\text{ext}} - T_{\text{thermometre}}) \quad (2)$$

où S est la surface de contact entre l'air et la sphère en bas du thermomètre (la variation de température du fluide dans le cylindre influe très peu sur le volume total). On a en général $k \approx 5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il n'y a pas de vent, et $k \approx 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il y a du vent.

- (a) Appliquer le premier principe infinitésimal au mercure contenu dans la sphère entre t et $t + dt$
- (b) En déduire une équation différentielle sur la température du fluide dans le thermomètre.
- (c) Combien de temps faut-il attendre en l'absence de vent ? Et avec du vent ?

3. Le mercure présente les mentions de sécurité suivantes :

**Mention
d'avertissement**

Danger

Pictogrammes

GHS06, GHS08,
GHS09



Mentions de danger

H330	Mortel par inhalation
H360D	Peut nuire au fœtus
H372	Risque avéré d'effets graves pour les organes à la suite d'expositions répétées ou d'une exposition prolongée
H410	Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme

Associer chaque pictogramme aux mentions de danger qui lui correspondent, et expliquer pourquoi les thermomètres à mercure ont été retirés du commerce en 1998.

2 Mesure d'une capacité thermique (difficile)

On considère un échantillon de capacité thermique massique C supposée indépendante de la température. Les échanges thermiques de cet échantillon sont, d'une part, l'apport par une source électrique de puissance $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos \omega t)$ et d'autre part une déperdition thermique telle que le flux thermique perdu est $\Phi = K(T - T_0)$ où K est une constante, T_0 la température d'un bain thermostaté, et T la température de l'échantillon supposé uniforme à tout instant dans son volume.

1. Expliquer comment réaliser expérimentalement la puissance alternative $\mathcal{P}(t)$. Quelle fréquence électrique faut-il imposer avec le GBF ?
2. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$.
3. Résoudre l'équation en considérant que $T(t = 0) = T_0$. Exprimer la solution comme somme de trois contributions que l'on qualifiera physiquement. Donner l'allure de $T(t)$ sur un graphe.
4. Quel est le temps caractéristique τ de passage du régime transitoire au régime permanent ?
5. Montrer que la mesure de l'amplitude de la composante alternative de la température de l'échantillon à différentes fréquences permet d'accéder à la valeur de sa capacité thermique.

II - Machines thermiques et systèmes ouverts

3 Calorimétrie par effet Joule

Un fluide s'écoule lentement en régime permanent avec un débit massique D dans un cylindre horizontal aux parois rigides et calorifugées. Ce fluide est en contact avec une résistance R , soumise à une différence de potentiel U constante. La température du fluide est notée T_1 en amont de la résistance et T_2 en aval.

1. Exprimer la capacité thermique massique c du fluide en fonction des paramètres du problème.
2. Pour améliorer la sensibilité de la mesure, vaut-il mieux choisir un débit massique faible ou élevé ?

4 Moteur à réaction

Dans un moteur à réaction, un gaz parcourt un cycle que l'on supposera réversible. Le gaz est l'air, assimilable à un gaz parfait diatomique de rapport $\gamma = 7/5$.

Le gaz entre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2 . La température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3 , la pression restant égale à P_2 (état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans la turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)).

Le gaz est rejeté avec la vitesse c dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1 . On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

On donne $T_1 = 290 \text{ K}$, $P_1 = 1 \text{ bar}$, $P_2/P_1 = 5$, $T_3 = 1300 \text{ K}$. L'air est considéré comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$.

1. Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, v), où v est le volume massique.
2. Exprimer l'énergie cinétique massique e_c à la sortie du moteur en fonction de M , R , γ , T_4 et T_5 .
3. Calculer les températures T_5 et T_2 .

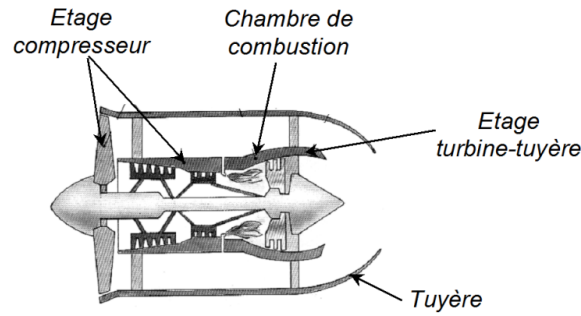
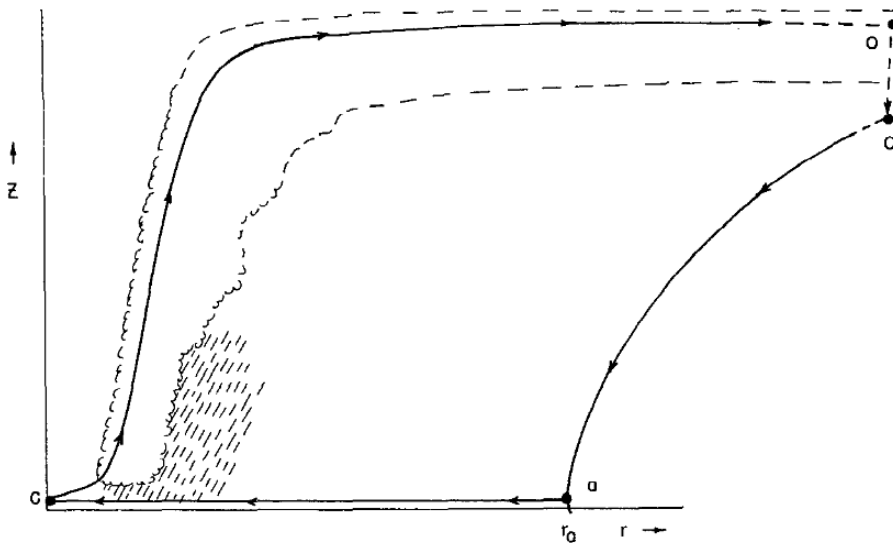


Figure 1: Schéma du moteur à réaction.

4. Exprimer la température T_4 en fonction des autres températures. Faire l'application numérique.
5. Calculer la vitesse du gaz à la sortie du moteur.

5 Cyclone tropical

Un cyclone tropical peut être modélisé par un cycle thermodynamique subi par l'air :


 Figure 2: Cyclone tropical. Source : Emanuel (1991). *The theory of hurricanes*.

Depuis l'œil du cyclone (point C), l'air subit une décompression adiabatique vers les hautes couches de l'atmosphère. Lors de cette décompression, la vapeur d'eau se liquéfie et précipite sous forme de pluie. Lorsque l'air arrive au sommet de l'atmosphère en O , il ne contient plus d'eau. Il subit alors une compression isotherme à la température $T_f = 235\text{ K}$ en perdant de l'énergie vers l'espace par rayonnement. On note q_f l'énergie perdue par rayonnement, par unité de masse d'air.

Puis, l'air subit une compression adiabatique et retourne vers la surface au point noté a . Cet air très sec est à l'origine de larges régions sans nuages autour des cyclones tropicaux.

Enfin, de a à C l'air se charge d'humidité à température constante $T_c = 300\text{ K}$, par évaporation de l'eau à la surface de l'océan. Le vent, qui peut être très important, forme des vagues à la surface de la mer, ce qui consomme un travail $w < 0$ par unité de masse d'air. On note x_v la fraction massique en vapeur d'eau au point C (généralement appelée *humidité spécifique* en météorologie), on a typiquement $x_v \approx 3 \cdot 10^{-2}$.

L'ensemble du cycle est alimenté par la liquéfaction de l'eau lors de la phase d'ascension.

1. On fait d'abord l'hypothèse (simplifiée) que le système se comporte comme un système fermé.
 - (a) Représenter le cycle subi par l'air dans un diagramme (P, V) et dans un diagramme (T, S) . Comment s'appelle ce cycle ?
 - (b) Expliquer pourquoi le cyclone peut être assimilé à un moteur, et calculer son efficacité η_c à partir des deux diagrammes.
 - (c) Comparer η à l'efficacité de Carnot et commenter.
2. En réalité, le système est ouvert, car de l'eau s'évapore à la surface de l'océan et revient à l'océan sous forme de pluie.
 - (a) Relier le débit massique de l'eau qui rentre et sort du système, D_m^{eau} , au débit massique de l'air qui circule dans le cycle, D_m^{air} .
 - (b) En appliquant le premier principe industriel au système ouvert, montrer que :

$$x_v \Delta h_{vap} + w + q_f = 0 \quad (3)$$

où $\Delta h_{vap} = 2250\text{ kJ/kg}$ est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

- (c) En appliquant le second principe industriel au système, déterminer q_f . En déduire que :

$$w = -\eta x_v \Delta h_{vap} \quad (4)$$

- (d) Commenter ce résultat vis-à-vis de la réponse à la question 1.

3. On cherche maintenant à déterminer le vent produit par le cyclone. La force de frottement fluide exercée par les vagues sur l'air sur une surface dS est de la forme :

$$d\vec{F} = -\rho C_d v \vec{v} dS \quad (5)$$

où $C_d \approx 10^{-3}$ a été estimé par des études phénoménologiques (Ellison, 1956) et $\rho \approx 1\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'air. Pour simplifier le problème, on va supposer que le cyclone crée un vent $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_r$ de norme uniforme dans un disque de rayon

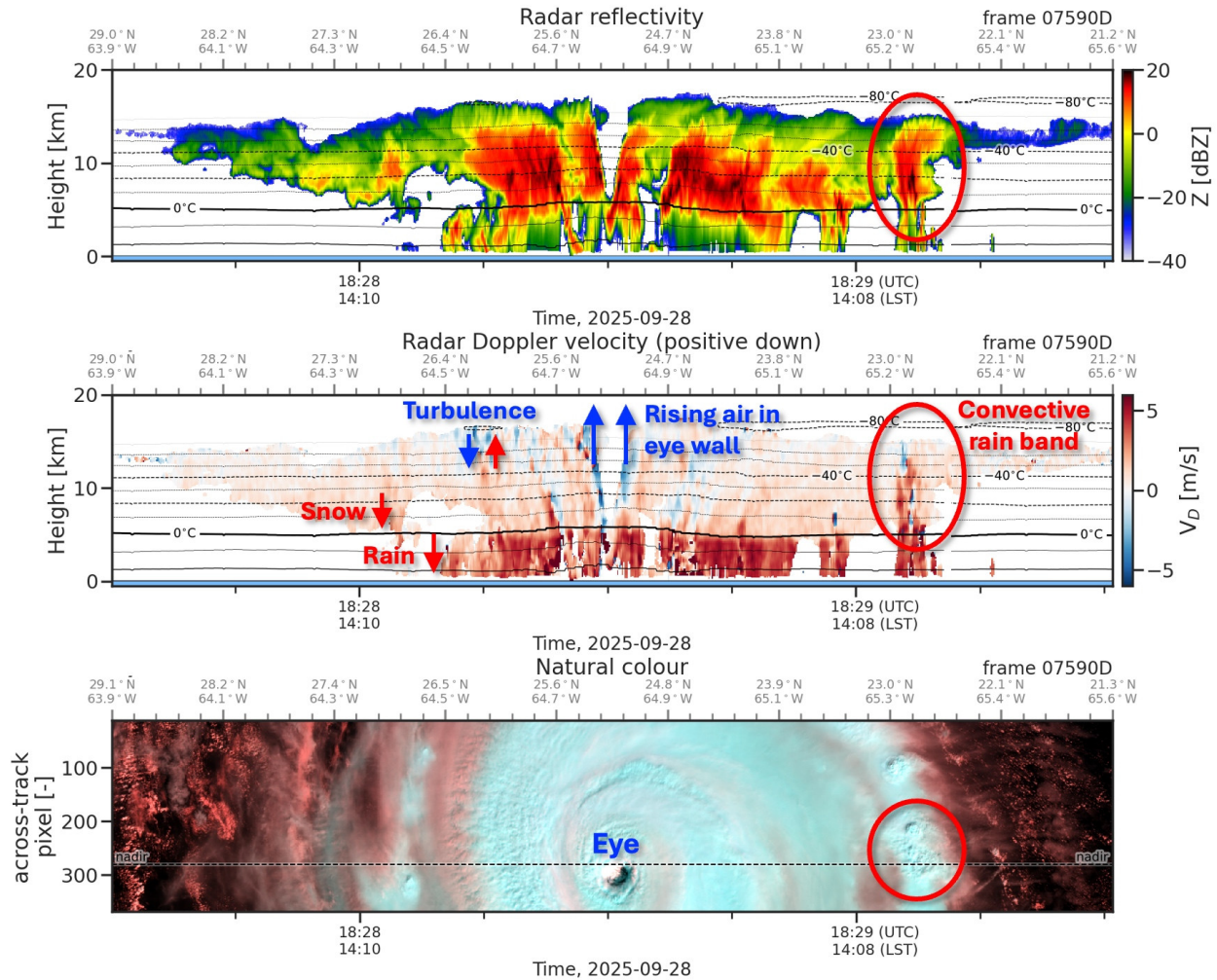


Figure 3: Vue en coupe du cyclone tropical Humberto par le satellite EarthCare au large des Antilles le 28 septembre 2025. En haut : réflectivité radar (reliée à l'intensité des précipitations). Au milieu : composante verticale de la vitesse des gouttes d'eau ou des flocons de neige $\vec{v}_{gouttes} \cdot \vec{e}_z$, le bleu indique un mouvement vers le haut dans l'oeil du cyclone. En bas : vue de haut du cyclone. La distance de gauche à droite est d'environ 1000 km.

$r_a = 1000$ km, et sur une épaisseur de $h = 500$ m (hauteur de la couche limite atmosphérique).¹

- (a) Déterminer la puissance totale dissipée par les forces de frottement fluide en fonction de v_0 et des constantes du problème.
- (b) Déterminer, de même, la quantité D_m^{air} en fonction de v_0 et des constantes du problème.
- (c) En déduire que :

$$w = -\frac{C_d r_a}{2h} v_0^2 \quad (6)$$

- (d) En utilisant les résultats de la question 2, en déduire une expression de v_0 en fonction de $C_d, r_a, h, x_v, \Delta h_{vap}$ et η . Faire l'application numérique. L'ouragan Hugo passé sur la Guadeloupe en 1989 avait des vents moyens de 220 km/h et des rafales à plus de 300 km/h. Commenter ces valeurs.
4. Nous allons maintenant estimer le taux de précipitations qui tombe dans le cyclone. Pour cela, nous pouvons supposer que l'ensemble de la pluie tombe dans un disque de rayon $r_b = r_a/2$ (la pluie ne se produit que dans la région proche du centre du cyclone où l'air monte). On note P le taux de précipitations, qui se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ (équivalents à des mm/h)
- (a) Relier le débit massique D_m^{eau} à la quantité totale d'eau qui précipite par unité de temps. En déduire que $P = 4D_m^{eau}/(\pi r_a^2)$
 - (b) A partir du résultat des questions 2a et 3b, en déduire une expression de P en fonction de ρ, v_0, h, x_v et r_a .
 - (c) Faire l'application numérique. En Guadeloupe, le record de précipitations en une heure par un cyclone est détenu par le cyclone Helena (1995) avec $125 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ à Saint-Claude. Commenter.

6 Pompe à chaleur

On souhaite réaliser une pompe à chaleur utilisant le fluide caloporteur *R134a* pour laquelle la source chaude (appartement à réchauffer) est à la température $T_c = 20^\circ\text{C}$ et la source froide (air extérieur l'hiver en hexagone) est à la température $T_f = -5^\circ\text{C}$.

On supposera pour cela que :

- Les transferts thermiques sont isobares

¹Cette expression du vent pose un certain nombre de problèmes car elle ne conserve pas la masse et ne prend pas en compte la force de Coriolis, mais elle nous permettra d'estimer un ordre de grandeur de v_0 . Nous expliquerons la forme de l'écoulement autour d'un cyclone dans un chapitre ultérieur.

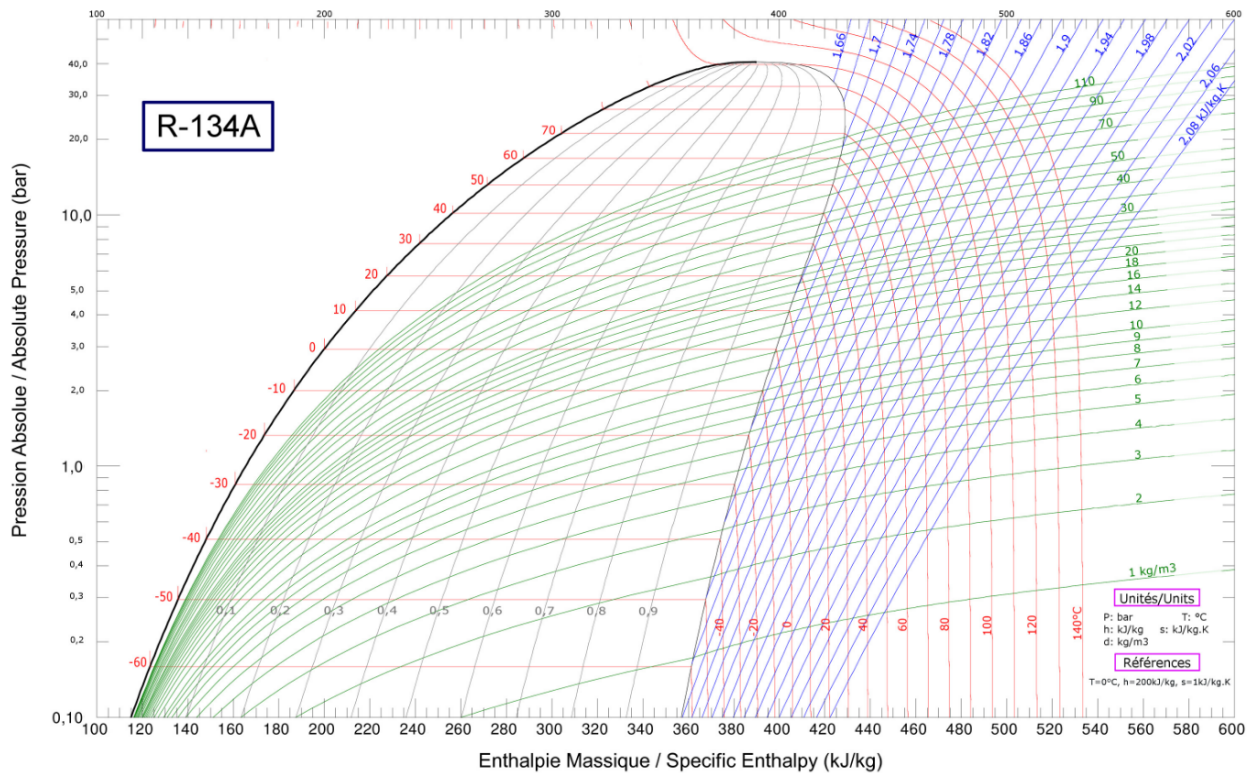


Figure 4: Diagramme enthalpique du fluide R134A.

- L'échange avec la source chaude cesse une fois que la dernière bulle de vapeur s'est condensée.
 - L'échange avec la source froide cesse une fois que la dernière goutte de liquide s'est évaporée.
 - La détente à lieu en absence de pièce mécanique mobile, dans une enceinte parfaitement calorifugée
 - La compression est effectuée à l'aide d'un moteur, Cette dernière est supposée adiabatique et on mesure une température du gaz d'environ 30 °C en fin de compression, pour une pression de 5.8 bar
1. Tracer le cycle correspondant à la pompe à chaleur proposée. Il se compose de 4 états intermédiaires, entre 4 transformations.
 2. Les échanges thermiques sont-ils réversibles ?
 3. Définir rigoureusement l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques aux sources, puis la calculer à l'aide d'une lecture graphique.
 4. Calculer le rendement associé à une pompe à chaleur réversible. Commenter ce résultat.

7 Chauffe-eau

Pour faire de l'eau tiède à 38°C , un mélangeur domestique utilise de l'eau froide de l'alimentation générale à 12°C et de l'eau chaude d'un chauffe-eau à 65°C .

La consommation d'eau des foyers français est répartie comme suit (par personne et par jour) :

- 49 L pour les bains et les douches (*),
- 25 L pour les W.C.,
- 25 L pour le linge,
- 12 L pour la vaisselle (6 L au lave-vaisselle et 6 L à la main (*)),
- 8 L pour le ménage (*),
- 8 L pour l'arrosage des plantes,
- 9 L pour la préparation de la nourriture,
- 1 L pour la boisson.

On considère que les consommations notées avec un astérisque (*) utilisent de l'eau tiède (mélange d'eau chaude et froide).

Données : Le prix du kWh est d'environ 0,15€ et la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4.2 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Déduire de ces données le coût moyen de la consommation électrique par an et par personne dans l'utilisation du chauffe-eau.

8 Etude d'une tuyère (difficile)

Un gaz supposé parfait est en écoulement permanent selon l'axe Ox dans une tuyère rigide horizontale de section $S(x)$. L'écoulement a lieu sans frottement sur les parois, et on suppose qu'il est suffisamment lent pour être considéré comme quasi-statique, mais toutefois suffisamment rapide pour être considéré comme adiabatique. Les particules de gaz situées dans une tranche de gaz d'épaisseur dx située à abscisse x ont une même vitesse $\vec{c} = c(x)\vec{e}_x$. On note $u(x)$ l'énergie interne massique, $h(x)$ l'enthalpie massique, $v(x)$ le volume massique, $P(x)$ la pression et $T(x)$ la température, M la masse molaire du gaz et $\gamma = c_p/c_v$.

1. En appliquant le premier principe industriel à un système ouvert bien choisi, déterminer une relation entre $h(x)$, $h(0)$, $c(x)$ et $c(0)$.

2. En déduire que :

$$\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) = - \int_{P(0)}^{P(x)} v dP \quad (7)$$

3. En déduire l'expression de la vitesse de sortie $c(L)$ du gaz en fonction de $c(0)$, $T(0)$, γ , M , R , $P(0)$ et $P(L)$.

4. En régime stationnaire, justifier que le débit massique est indépendant de x . En déduire une relation entre dS/S , dv/v et dc/c .

5. On note $c_{son} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la célérité du son, et $m = c/c_{son}$ le nombre de Mach. Montrer que :

$$\frac{dS}{S} + (1 - m^2) \frac{dc}{c} = 0 \quad (8)$$

6. On désire que la vitesse d'écoulement du gaz soit une fonction croissante de x . En déduire la géométrie locale de la tuyère dans les deux cas $c < c_{son}$ et $c > c_{son}$.