Thermodynamique des systèmes ouverts

Chapitre 7

Incontournables	CCINP/E3A	Mines/Centrale/X/ENS
1 - 3 - 6	4 - 7 - 9 - 10	2 - 5 - 8 - 9 - 10 - 11

I - Principes infinitésimaux

1 Temps de réponse d'un thermomètre ♥★

On considère un thermomètre à mercure. Le mercure se trouve dans une sphère de rayon $a = 5\,\text{mm}$, à laquelle est rattaché un cylindre de rayon $b = 0.1\,\text{mm}$. La sphère et le cylindre sont délimités par une couche de verre d'épaisseur $e = 2\,\text{mm}$. On note $\rho = 13.5\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ la masse volumique du mercure et $c_p = 139\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ sa capacité thermique massique à pression constante, ainsi que $\rho_v = 2.5\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ et $c_{p,v} = 840\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ les mêmes quantités pour le verre.

1. (a) Faire un schéma est expliquer le principe de fonctionnement du thermomètre.

   (b) Pour le mercure, le coefficient de dilatation α est donné par :

   $$\alpha = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = 2 \cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1} \tag{1}$$

   Déterminer la variation de hauteur du niveau de mercure dans le cylindre pour une augmentation de température de 1°C.

   (c) Déterminer la hauteur minimale h du thermomètre pour que l'on puisse mesurer toutes les températures possibles à Pointe-à-Pitre. Les records enregistrés par la station Météo-France du Raizet sont de 13.0°C (4 février 1958) et 34.2°C (24 juillet 2001).

2. On constate que le thermomètre était au soleil. On le met à l'ombre et on voudrait savoir au bout de combien de temps on pourra lire la température. On modélise la puissance thermique reçue par le thermomètre par une loi de Newton :

   $$\mathcal{P} = kS(T_{ext} - T_{thermometre}) \tag{2}$$

   où S est la surface de contact entre l'air et la sphère en bas du thermomètre (la variation de température du fluide dans le cylindre influe très peu sur le volume total). On a en général $k \approx 5\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il n'y a pas de vent, et $k \approx 50\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il y a du vent.

   (a) Appliquer le premier principe infinitésimal au mercure contenu dans la sphère entre t et $t + \text{d}t$

(b) En déduire une équation différentielle sur la température du fluide dans le thermomètre.

(c) Combien de temps faut-il attendre en l'absence de vent ? Et avec du vent ?

3. Le mercure présente les mentions de sécurité suivantes :

Mention d'avertissement **Danger**

Pictogrammes

GHS06, GHS08, GHS09



Mentions de danger

H330	Mortel par inhalation
H360D	Peut nuire au fœtus
H372	Risque avéré d'effets graves pour les organes à la suite d'expositions répétées ou d'une exposition prolongée
H410	Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme

Associer chaque pictogramme aux mentions de danger qui lui correspondent, et expliquer pourquoi les thermomètres à mercure ont été retirés du commerce en 1998.

2 Mesure d'une capacité thermique ★★★

On considère un échantillon de capacité thermique massique C supposée indépendante de la température. Les échanges thermiques de cet échantillon sont, d'une part, l'apport par une source électrique de puissance $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos \omega t)$ et d'autre part une déperdition thermique telle que le flux thermique perdu est $\Phi = K(T - T_0)$ où K est une contante, T_0 la température d'un bain thermostaté, et T la température de l'échantillon supposé uniforme à tout instant dans son volume.

1. Expliquer comment réaliser expérimentalement la puissance alternative $\mathcal{P}(t)$. Quelle fréquence électrique faut-il imposer avec le GBF ?

2. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$.

3. Résoudre l'équation en considérant que $T(t = 0) = T_0$. Exprimer la solution comme somme de trois contributions que l'on qualifiera physiquement. Donner l'allure de $T(t)$ sur un graphe.

4. Quel est le temps caractéristique τ de passage du régime transitoire au régime permanent ?

5. Montrer que la mesure de l'amplitude de la composante alternative de la température de l'échantillon à différentes fréquences permet d'accéder à la valeur de sa capacité thermique.

II - Machines thermiques et systèmes ouverts

3 Calorimétrie par effet Joule ♥★

Un fluide s'écoule lentement en régime permanent avec un débit massique D dans un cylindre horizontal aux parois rigides et calorifugées. Ce fluide est en contact avec une résistance R, soumise à une différence de potentiel U constante. La température du fluide est notée T_1 en amont de la résistance et T_2 en aval.

1. Exprimer la capacité thermique massique c du fluide en fonction des paramètres du problème.

2. Pour améliorer la sensibilité de la mesure, vaut-il mieux choisir un débit massique faible ou élevé ?

4 Moteur à réaction ★★

Dans un moteur à réaction, un gaz parcourt un cycle que l'on supposera réversible. Le gaz est l'air, assimilable à un gaz parfait diatomique de rapport $\gamma = 7/5$.

Le gaz entre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2. La température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3, la pression restant égale à P_2 (état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans la turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)).

Le gaz est rejeté avec la vitesse c dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1. On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

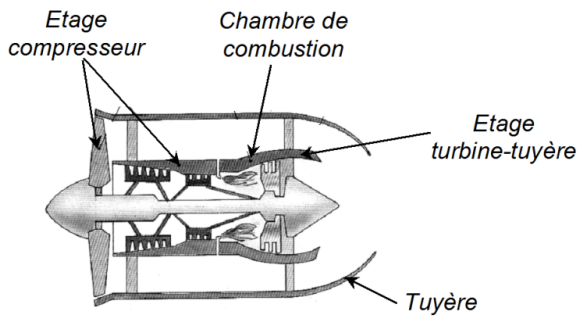


Figure 1: Schéma du moteur à réaction.

On donne $T_1 = 290\,\mathrm{K}$, $P_1 = 1\,\mathrm{bar}$, $P_2/P_1 = 5$, $T_3 = 1300\,\mathrm{K}$. L'air est considéré comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$.

1. Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, v), où v est le volume massique.
2. Exprimer l'énergie cinétique massique e_c à la sortie du moteur en fonction de M, R, γ, T_4 et T_5.
3. Calculer les températures T_5 et T_2.
4. Exprimer la température T_4 en fonction des autres températures. Faire l'application numérique.
5. Calculer la vitesse du gaz à la sortie du moteur.

5 Cyclone tropical ★★

Un cyclone tropical peut être modélisé par un cycle thermodynamique subi par l'air :

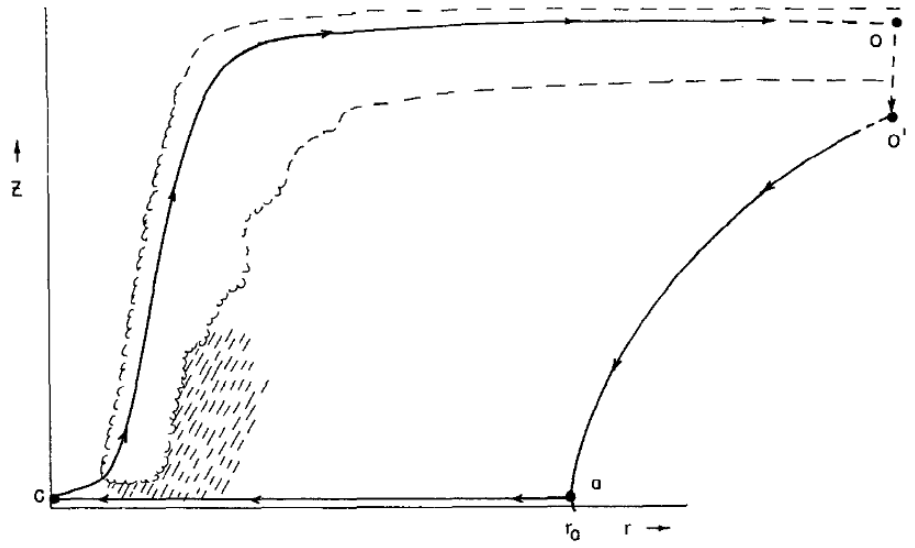


Figure 2: Cyclone tropical. Source : Emanuel (1991). *The theory of hurricanes.*

Depuis l'œil du cyclone (point C), l'air subit une décompression adiabatique vers les hautes couches de l'atmosphère. Lors de cette décompression, la vapeur d'eau se liquéfie et précipite sous forme de pluie. Lorsque l'air arrive au sommet de l'atmosphère en O, il ne contient plus d'eau. Il subit alors une compression isotherme à la température $T_f = 235\,\mathrm{K}$ en perdant de l'énergie vers l'espace par rayonnement. On note q_f l'énergie perdue par rayonnement, par unité de masse d'air.

Puis, l'air subit une compression adiabatique et retourne vers la surface au point noté a. Cet air très sec est à l'origine de larges régions sans nuages autour des cyclones tropicaux.

Enfin, de a à C l'air se charge d'humidité à température constante $T_c = 300\,\mathrm{K}$, par évaporation de l'eau à la surface de l'océan. Le vent, qui peut être très important, forme des vagues à la surface de la mer, ce qui consomme un travail $w < 0$ par unité de masse d'air. On note x_v la fraction massique en vapeur d'eau au point C (généralement appelée *humidité spécifique* en météorologie), on a typiquement $x_v \approx 3 \cdot 10^{-2}$.

L'ensemble du cycle est alimenté par la liquéfaction de l'eau lors de la phase d'ascension : ce processus exothermique contribue à réchauffer l'air.

1. (❤) On fait d'abord l'hypothèse (simplifiée) que le système se comporte comme un système fermé. Notre système est constitué de l'air qui se déplace dans le cyclone, et la condensation de l'eau lors de la phase CO peut être considérée comme un apport d'énergie par transfert thermique q_c.
   (a) Représenter le cycle subi par l'air dans un diagramme (P, V) et dans un diagramme (T, S). Comment s'appelle ce cycle ?
   (b) Expliquer pourquoi le cyclone peut être assimilé à un moteur, et calculer son efficacité η_c à partir des deux diagrammes.
   (c) Comparer η à l'efficacité de Carnot et commenter.
2. En réalité, le système est ouvert, car de l'eau s'évapore à la surface de l'océan et revient à l'océan sous forme de pluie.
   (a) Relier le débit massique de l'eau qui rentre et sort du système, D_m^{eau}, au débit massique de l'air qui circule dans le cycle, D_m^{air}.
   (b) En appliquant le premier principe industriel au système ouvert, montrer que :
   $$x_v \Delta h_{\mathrm{vap}} + w + q_f = 0 \tag{3}$$
   où $\Delta h_{\mathrm{vap}} = 2250\,\mathrm{kJ/kg}$ est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.
   (c) En appliquant le second principe industriel au système, déterminer q_f. En déduire que :
   $$w = -\eta x_v \Delta h_{vap} \tag{4}$$
   (d) Commenter ce résultat vis-à-vis de la réponse à la question 1.
3. On cherche maintenant à déterminer le vent produit par le cyclone. La force de frottement fluide exercée par les vagues sur l'air sur une surface $\mathrm{d}S$ est de la forme :
   $$\mathrm{d}\vec{F} = -\rho C_d v \vec{v} \mathrm{d}S \tag{5}$$
   où $C_d \approx 10^{-3}$ a été estimé par des études phénoménologiques (Ellison, 1956) et $\rho \approx 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ est la masse volumique de l'air. Pour simplifier le problème, on va supposer que le cyclone

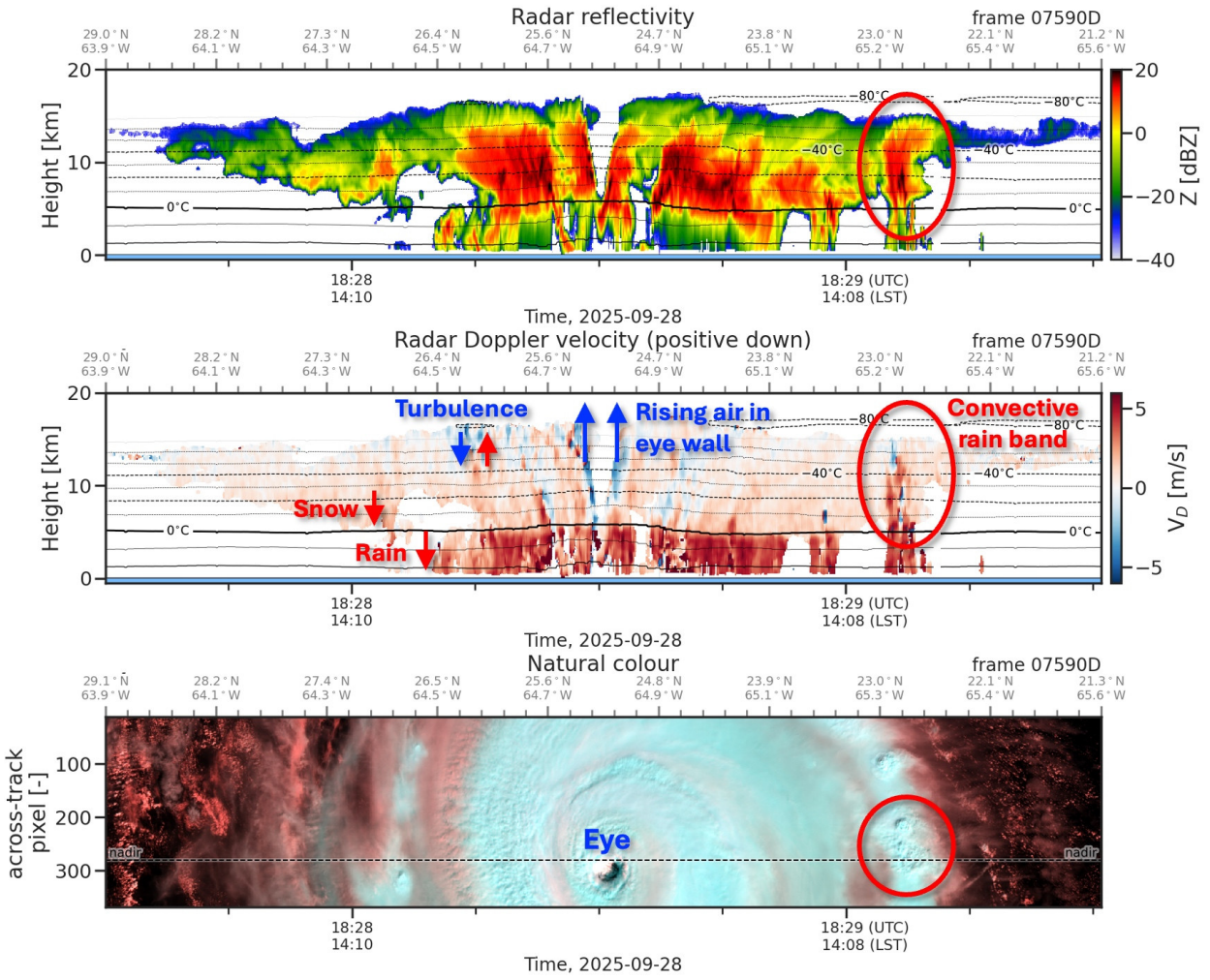


Figure 3: Vue en coupe du cyclone tropical Humberto par le satellite EarthCare au large des Antilles le 28 septembre 2025. En haut : réflectivité radar (reliée à l'intensité des précipitations). Au milieu : composante verticale de la vitesse des gouttes d'eau ou des flocons de neige $\overrightarrow{v_{gouttes}} \cdot \vec{e_z}$, le bleu indique un mouvement vers le haut dans l'oeil du cyclone. En bas : vue de haut du cyclone. La distance de gauche à droite est d'environ 1000 km.

crée un vent $\vec{v} = -v_0\vec{e_r}$ de norme uniforme dans un disque de rayon $r_a = 1000\,\text{km}$, et sur une épaisseur de $h = 500\,\text{m}$ (hauteur de la couche limite atmosphérique).[1]

(a) Déterminer la puissance totale dissipée par les forces de frottement fluide en fonction de v_0 et des constantes du problème.

(b) Déterminer, de même, la quantité D_m^{air} en fonction de v_0 et des constantes du problème.

(c) En déduire que :

$$w = -\frac{C_d r_a}{2h} v_0^2 \tag{6}$$

(d) En utilisant les résultats de la question 2, en déduire une expression de v_0 en fonction de $C_d, r_a, h, x_v, \Delta h_{vap}$ et η. Faire l'application numérique. L'ouragan Hugo passé sur la Guadeloupe en 1989 avait des vents moyens de 220 km/h et des rafales à plus de 300 km/h. Commenter ces valeurs.

4. Nous allons maintenant estimer le taux de précipitations qui tombe dans le cyclone. Pour cela, nous pouvons supposer que l'ensemble de la pluie tombe dans un disque de rayon $r_b = r_a/2$ (la pluie ne se produit que dans la région proche du centre du cyclone où l'air monte). On note P le taux de précipitations, qui se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ (équivalents à des mm/h)

(a) Relier le débit massique D_m^{eau} à la quantité totale d'eau qui précipite par unité de temps. En déduire que $P = 4D_m^{eau}/(\pi r_a^2)$

(b) A partir du résultat des questions 2a et 3b, en déduire une expression de P en fonction de ρ, v_0, h, x_v et r_a.

(c) Faire l'application numérique. En Guadeloupe, le record de précipitations en une heure par un cyclone est détenu par le cyclone Helena (1995) avec $125\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ à Saint-Claude. Commenter.

6 Pompe à chaleur ♥★★

On souhaite réaliser une pompe à chaleur utilisant le fluide caloporteur $R134a$ pour laquelle la source chaude (appartement à réchauffer) est à la température $T_c = 20\,°\text{C}$ et la source froide (air extérieur l'hiver en hexagone) est à la température $T_f = -5\,°\text{C}$.

On supposera pour cela que :

- Les transferts thermiques sont isobares
- L'échange avec la source chaude cesse une fois que la dernière bulle de vapeur s'est condensée.

[1] Cette expression du vent pose un certain nombre de problèmes car elle ne conserve pas la masse et ne prend pas en compte la rotation de la Terre via la pseudo-force d'inertie d'entraînement de Coriolis, mais elle nous permettra d'estimer un ordre de grandeur de v_0. Nous expliquerons la forme de l'écoulement autour d'un cyclone dans un chapitre ultérieur.

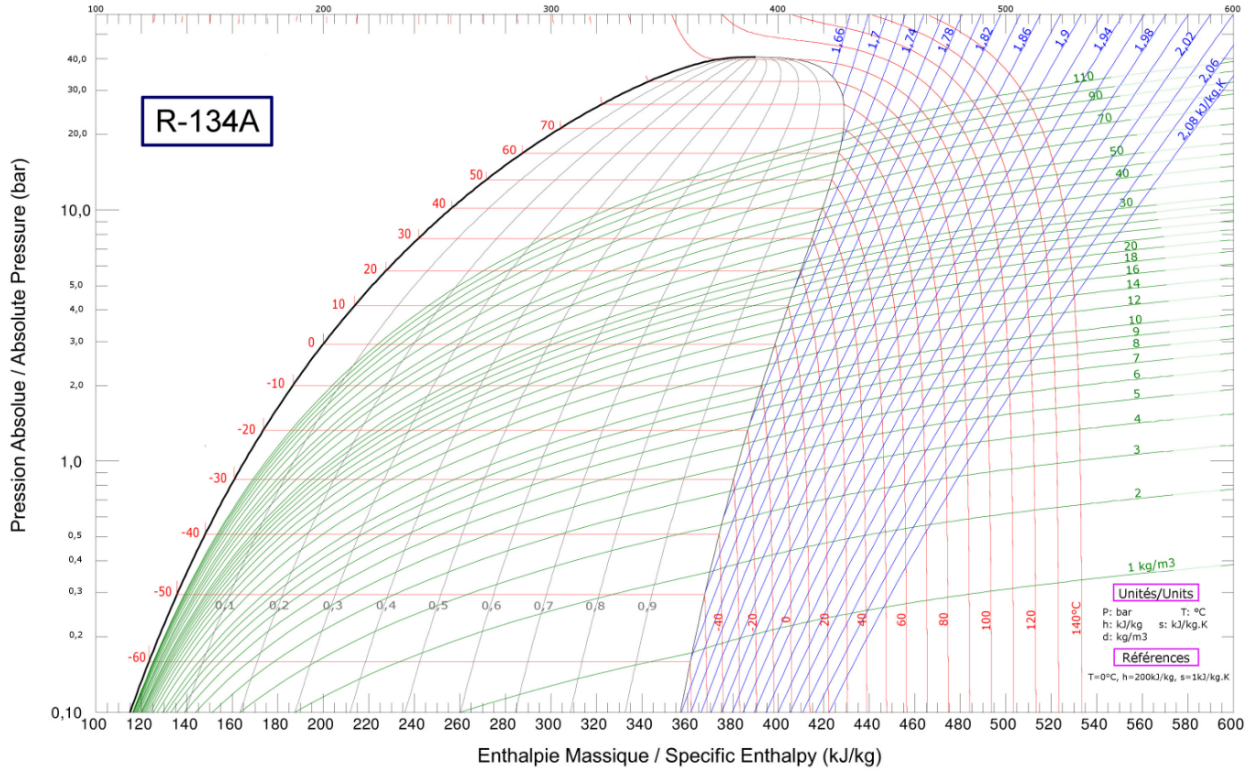


Figure 4: Diagramme enthalpique du fluide R134A.

- L'échange avec la source froide cesse une fois que la dernière goutte de liquide s'est évaporée.
- La détente à lieu en absence de pièce mécanique mobile, dans une enceinte parfaitement calorifugée
- La compression est effectuée à l'aide d'un moteur, Cette dernière est supposée adiabatique et on mesure une température du gaz d'environ 30 °C en fin de compression, pour une pression de 5.8 bar

1. Tracer le cycle correspondant à la pompe à chaleur proposée. Il se compose de 4 états intermédiaires, entre 4 transformations.
2. Les échanges thermiques sont-ils réversibles ?
3. Définir rigoureusement l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques aux sources, puis la calculer à l'aide d'une lecture graphique.
4. Calculer le rendement associé à une pompe à chaleur réversible. Commenter ce résultat.

7 Chauffe-eau ★

Pour faire de l'eau tiède à 38 °C, un mélangeur domestique utilise de l'eau froide de l'alimentation générale à 12 °C et de l'eau chaude d'un chauffe-eau à 65 °C.

La consommation d'eau des foyers français est répartie comme suit (par personne et par jour) :

- 49 L pour les bains et les douches (*),
- 25 L pour les W.C.,
- 25 L pour le linge,
- 12 L pour la vaisselle (6 L au lave-vaisselle et 6 L à la main (*)),
- 8 L pour le ménage (*),
- 8 L pour l'arrosage des plantes,
- 9 L pour la préparation de la nourriture,
- 1 L pour la boisson.

On considère que les consommations notées avec un astérisque (*) utilisent de l'eau tiède (mélange d'eau chaude et froide à 37°C).

Données : Le prix du kWh est d'environ 0,15€ et la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4.2\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Déduire de ces données le coût moyen de la consommation électrique par an et par personne dans l'utilisation du chauffe-eau.

8 Etude d'une tuyère ★★★

Un gaz supposé parfait est en écoulement permanent selon l'axe Ox dans une tuyère rigide horizontale de section $S(x)$. L'écoulement a lieu sans frottement sur les parois, et on suppose qu'il est suffisamment lent pour être considéré comme quasi-statique, mais toutefois suffisamment rapide pour être considéré comme adiabatique. Les particules de gaz situées dans une tranche de gaz d'épaisseur $\mathrm{d}x$ située à abscisse x ont une même vitesse $\vec{c} = c(x)\vec{e_x}$. On note $u(x)$ l'énergie interne massique, $h(x)$ l'enthalpie massique, $v(x)$ le volume massique, $P(x)$ la pression et $T(x)$ la température, M la masse molaire du gaz et $\gamma = c_p/c_v$.

1. En appliquant le premier principe industriel à un système ouvert bien choisi, déterminer une relation entre $h(x), h(0), c(x)$ et $c(0)$.

2. En déduire que :
$$\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) = -\int_{P(0)}^{P(x)} v\mathrm{d}P \tag{7}$$

3. En déduire l'expression de la vitesse de sortie $c(L)$ du gaz en fonction de $c(0), T(0), \gamma, M, R, P(0)$ et $P(L)$.

4. En régime stationnaire, justifier que le débit massique est indépendant de x. En déduire une relation entre $\mathrm{d}S/S$, $\mathrm{d}v/v$ et $\mathrm{d}c/c$.

5. On note $c_{son} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la célérité du son, et $m = c/c_{\text{son}}$ le nombre de Mach. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} + (1 - m^2)\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0 \tag{8}$$

6. On désire que la vitesse d'écoulement du gaz soit une fonction croissante de x. En déduire la géométrie locale de la tuyère dans les deux cas $c < c_{\text{son}}$ et $c > c_{\text{son}}$.

9 La coulée de lave Kaupulehu ★★

Cet exercice demande une certaine prise d'initiative et une analyse documentaire, il vous appartient notamment de faire des hypothèses et de proposer des valeurs numériques à partir des documents.

La coulée de lave Kaupulehu résulte d'une éruption du volcan hawaïen Hualalai en 1800 ou peut-être quelques années avant cette date. Il n'existe aucun témoignage écrit de première main pour cette éruption et les témoignages de seconde main pour cette coulée ne sont pas complètement fiables. La reconstitution des caractères de la coulée Kaupulehu nécessite donc une étude géologique et l'utilisation de modèles physiques.

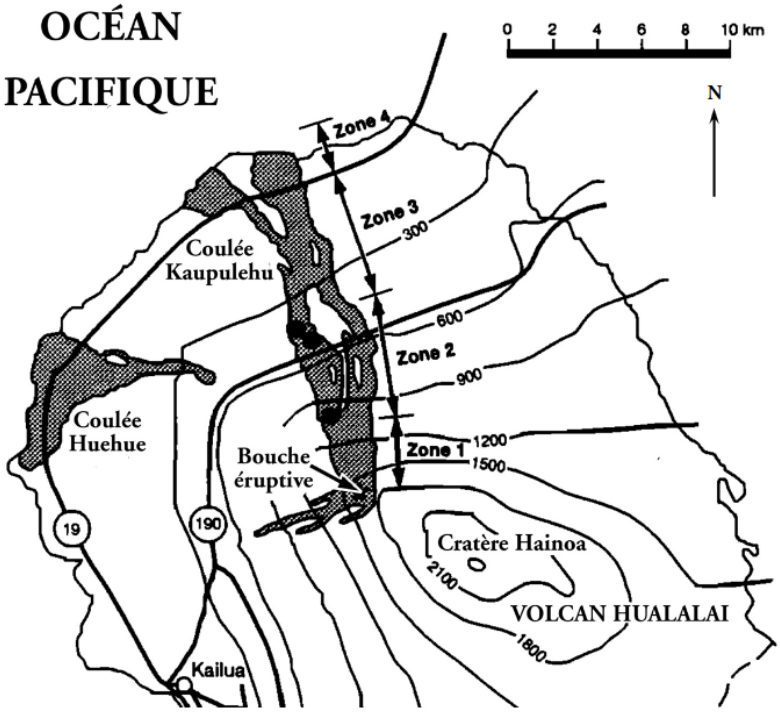
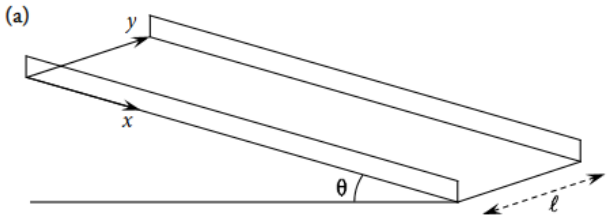


Figure 4. Carte de la coulée de lave Kaupulehu du volcan Hualalai montrant l'emplacement de la bouche éruptive et les quatre zones de la coulée. La coulée Huehue est une autre coulée de lave un peu plus tardive.

La bouche éruptive de la coulée Kaupulehu est une fissure éruptive située un peu au nord-ouest du cratère (Figure 4). La coulée de lave est restée fluide jusqu'à la mer, qui se trouve à environ 15 km de distance de la bouche éruptive, et elle s'est poursuivie sous la

mer sur plusieurs kilomètres. La lave est un basalte alcalin à olivine de structure vitreuse incluant de petits cristaux de plagioclases, de pyroxènes et d'olivine.

On pourra considérer la géométrie de la coulée comme rectangulaire comme sur la figure 1.



La lave n'étant pas un corps pur, elle ne se solidifie pas à température constante : le pourcentage de lave solidifiée augmente au fur et a mesure que la température diminue. Lors du refroidissement, les premiers cristaux qui apparaissent sont des cristaux d'olivine. Les cristaux de plagioclase apparaissent vers 1180°C et ceux de pyroxène vers 1150°C. La Figure 3 présente le pourcentage massique du total des phases cristallines en fonction de la température lors du refroidissement de la lave.

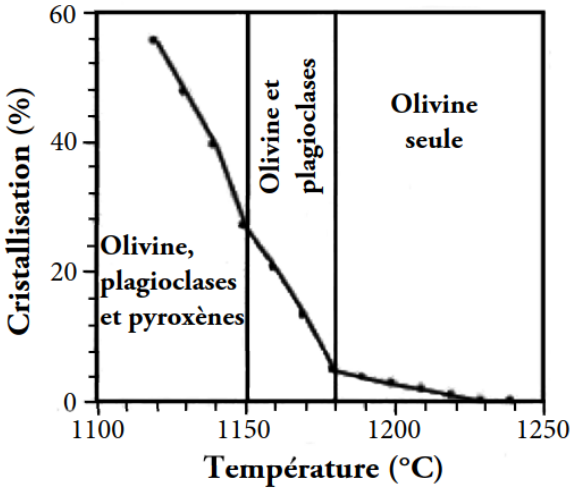


Figure 3. Digramme de phase pour la lave de la coulée Kaupulehu avec le pourcentage en masse de cristallisation en fonction de la température.

L'analyse des fragments de lave solides éjectés à proximité de la bouche éruptive a montré la présence de cristaux d'olivine dans tous les échantillons. La présence de cristaux de plagioclases n'a été observée que dans un petit nombre d'échantillons et aucun cristal de pyroxène n'a été observé.

L'épaisseur de la coulée de lave est d'environ $d = 1.5\,\mathrm{m}$. Par ailleurs, à mi-chemin de la coulée, on constate que dans un virage, la coulée est montée sur le flanc de la montagne situé en face, à une hauteur d'environ $H = 0.8\,\mathrm{m}$.

1. (a) Un point matériel M de masse m et de vitesse initiale v glisse sur un support incurvé (Figure 5). Tous les frottements sont négligés. Ce point matériel monte la pente,

atteint une hauteur maximale et redescend en sens inverse. Etablir l'expression de l'élévation maximale L atteinte par le point.

(b) En déduire la vitesse v de l'écoulement de lave.

(c) Proposer une estimation du débit volumique D_v, puis du débit massique D_m de lave de l'éruption.

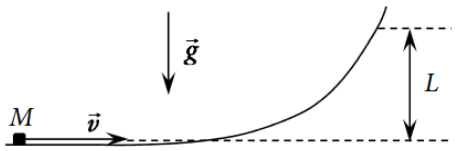


Figure 5. État initial et élévation maximale.

2. Justifier que la température de la lave à l'origine de la coulée est de l'ordre de $T_0 = 1180°\text{C}$.

   Le refroidissement de la lave au cours de son écoulement est essentiellement dû aux pertes thermiques radiatives par la surface libre de la lave. La puissance radiative perdue par un élément de surface $\mathrm{d}S$ est donnée par la loi de Stefan :

$$\mathrm{d}P_{\text{th}} = \sigma T^4 \mathrm{d}S \tag{9}$$

   où T est la température de la lave et $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ est la constante de Stefan. On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire, bidimensionnel et uniforme. La vitesse, la profondeur, la pression moyenne et la largeur du chenal sont constantes le long de l'écoulement.

3. On suppose pour commencer que la lave reste fluide lors de l'écoulement.

   (a) En appliquant le premier principe industriel, déterminer une équation différentielle sur la température $T(x)$ de la lave.

   (b) En déduire la température T_m de la lave au niveau de la mer.

   (c) Commenter la validité de l'hypothèse d'une lave qui reste entièrement fluide.

4. On souhaite désormais prendre en compte la solidification de la lave au cours de l'écoulement.

   (a) A partir de la figure 3, proposer une loi empirique la plus simple possible qui relie la fraction $\alpha(T)$ de lave cristallisée à la température T de la lave.

   (b) Reprendre le calcul de la question précédente en prenant en compte l'effet de solidification de la lave.

5. En réalité, on observe la formation de tunnels de lave : la lave ne cristallise qu'à la surface de la coulée et forme une croûte protectrice, de température $T_c = 150°\text{C}$ (mesurée sur

des coulées de lave contemporaines). Calculer, dans ces conditions la température de la lave lorsque celle-ci arrive au bord de la mer. Expliquer pourquoi, dans un tube de lave où la croûte forme un toit, la lave peut s'écouler sur de longues distances.

Données :

- Masse volumique de la lave $\rho = 2.6 \cdot 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$;
- Capacité thermique massique de la lave $c_p = 10^3\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$;
- Enthalpie massique de fusion de la lave $\ell_f = 200\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$.

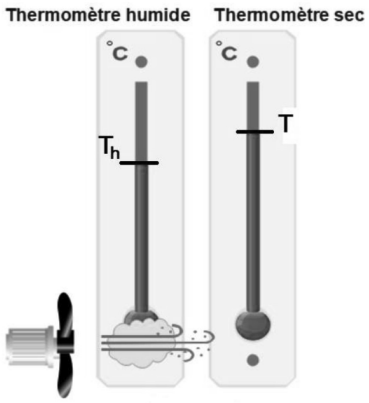
III - Systèmes ouverts et thermochimie

10 Mesure de l'humidité de l'air ★★

Un capteur d'humidité est constitué de deux thermomètres et permet de mesurer :

- la température dite sèche de l'air notée T (température habituelle).
- la température humide de l'air notée T_h obtenue par la mesure, à l'aide d'un bout de tissu enveloppé sur l'élément de mesure (bulbe), imbibé d'eau et ventilé pour provoquer l'évaporation de cette eau.

Ces deux mesures permettent de définir les caractéristiques de l'air humide.



Dans toute la suite, on note P_v la pression partielle en vapeur d'eau. On notera δ le rapport entre les masses molaires de l'eau et de l'air : $\delta = \dfrac{M_{\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{air}}}$.

1. On note $K^\circ(T)$ la constante de réaction $\mathrm{H_2O\,(l) = H_2O\,(g)}$.

   (a) Montrer qu'à l'équilibre, la pression partielle en vapeur d'eau est fixée à une valeur $P_{\mathrm{sat}}(T)$ qui ne dépend que de la température. Dans ces conditions, on dit que l'air est saturé en humidité.

   (b) En déduire que dans l'air, la pression partielle en vapeur d'eau ne peut jamais excéder cette valeur : il existe une quantité maximale d'eau que l'air peut contenir.

(c) Pourquoi peut-on souvent observer une pression partielle inférieure à $P_{\text{sat}}(T)$? Nommer ce phénomène chimique.

On définit le taux d'humidité absolu dans l'atmosphère par $q_v = \dfrac{m_v}{m_{\text{air}}}$ et l'humidité relative $x = \dfrac{m_v}{m_{v,\max}}$ où $m_{v,\max}$ est la masse maximale de vapeur d'eau pouvant être contenue dans une masse m_{air} à la température T. q_v est typiquement de l'ordre de 0.03.

2. On cherche à relier le taux d'humidité aux pressions partielles.

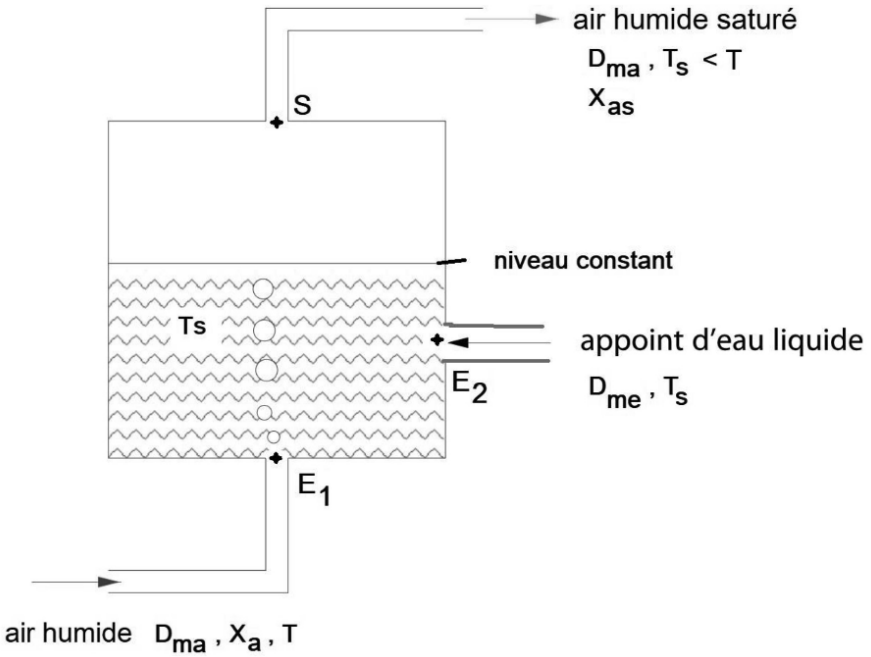
(a) Exprimer q_v en fonction de P, P_v et δ.

(b) En déduire que le taux d'humidité absolu de l'air saturé est donné par :

$$q_{v,\text{sat}} = \frac{\delta}{\frac{P}{P_{\text{sat}}} - 1} \tag{10}$$

(c) Exprimer x en fonction de q_v, P, P_{sat} et δ.

Dans toute la suite, on modélise l'appareil de mesure par le système simplifié et idéalisé de la Figure 4. Toutes les transformations sont supposées être isobares, à la même pression P. De l'air humide, au taux absolu q_v, à la température T est injecté dans un récipient calorifugé contenant de l'eau pure à température constante T_s : ce récipient modélise le bulbe du thermomètre recouvert d'un tissu humide.



Cet air humide va par conséquent se saturer en eau et aura un taux d'humidité absolu $q_{v,\text{sat}}$ en sortie.

Pour maintenir constant le niveau d'eau, on injecte de l'eau liquide pure à la même température T_s avec un débit massique $D_{m,e}$. On note $D_{m,a}$ le débit massique d'air sec à l'entrée qui sera donc identique au débit massique d'air sec en sortie du système, par conservation de la quantité d'air sec.

3. (a) Exprimer le débit massique de vapeur d'eau entrant en A, noté par $D_{m,v,e}$ en fonction de q_v et de $D_{m,a}$.

   (b) Effectuer ensuite un bilan de matière, uniquement sur l'eau, en régime permanent, et en déduire une relation simple entre $q_v, q_{v,\text{sat}}, D_{m,a}$ et $D_{m,e}$.

4. On cherche désormais à établir la relation qui permet de mesurer le taux d'humidité en fonction de la différence de température.

   (a) A partir du premier principe industriel, et sous des hypothèses à justifier, montrer que l'humidité de l'air peut se mettre sous la forme :

   $$q_v = \frac{Aq_{v,\text{sat}} - B(T - T_s)}{A + D(T - T_s)} \tag{11}$$

   où l'on explicitera les constantes A, B et D en fonction de T_s, des capacités thermiques massiques de l'air c_a, de l'eau c_l et de la vapeur d'eau c_v, et de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau ℓ_v.

   (b) En prenant par exemple $T = 30°\text{C}$ et $T - T_s = 10°\text{C}$, comparer les ordres de grandeur des différents termes et justifier que :

   $$q_v \approx q_{v,\text{sat}} - \frac{c_a}{\ell_v}(T - T_s) \tag{12}$$

5. (a) Faites désormais l'expérience chez vous : relevez la température T avec un thermomètre, puis enveloppez le bulbe du thermomètre dans une chaussette humide. Assurez-vous que le thermomètre est à l'ombre, dans un lieu exposé au vent (ou à défaut devant un ventilateur). Bien attendre que l'équilibre thermique s'établisse (cela peut prendre dix à vingt minutes) et relever la température T_m.

   (b) Réaliser une estimation de $q_{v,\text{sat}}$. Pour cela, on pourra calculer la pression de vapeur saturante à partir de la température T ici : `www.engineeringtoolbox.com/water-vapor-saturation-pressure-d_599.html`

   (c) En déduire une mesure de q_v puis de x.

   (d) Comparer à la valeur mesurée en direct par Météo-France sur `https://www.meteociel.fr/temps-reel/obs_villes.php?code2=97101015`. Vous pouvez sélectionner la station la plus proche de chez vous dans le menu déroulant et regarder la dernière mesure d'humidité dans le tableau de valeurs. Attention, l'heure indiquée est en UTC (4 heures de décalage horaire avec la Guadeloupe). Commenter.

11 Fonctionnement d'une centrale thermique ★★★

La centrale électrique DK6, sur le site du port industriel de Dunkerque (Hauts-de-France), produit de l'énergie électrique à partir de gaz naturel. De par sa conception et sa situation géographique, la centrale DK6 a la particularité de pouvoir revaloriser les fumées issues de la production d'acier, émises par l'usine sidérurgique voisine Arcelor-Mittal.

On réalise la combustion de gaz naturel avec de l'air sous pression dans une turbine à gaz reliée mécaniquement à un générateur électrique de 165 MW. La chambre de combustion de la turbine à gaz est alimentée par un gazoduc qui fournit du gaz naturel avec un débit massique constant $D_{m,gn} = 10\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, sous une pression de 12 bar et une température $T_0 = 298\,\mathrm{K}$. On assimile dans la suite le gaz naturel à du méthane pur (CH_4). Le dioxygène nécessaire à la combustion est apporté par de l'air atmosphérique, comprimé sous une pression de 12 bar à la température de 298 K par un compresseur solidaire de l'axe de la turbine, avec un débit massique réglable noté $D_{m,air}$.

Le réacteur, parfaitement calorifugé, permet ainsi la combustion en continu et en régime stationnaire du méthane par le dioxygène de l'air à la pression constante de 12 bar. Les gaz issus de cette combustion sortent du réacteur à température élevée pour pouvoir faire tourner une turbine, dont le principe de fonctionnement sera étudié dans la partie suivante. Les aubes de la turbine sont recouvertes d'une fine couche de traitement en céramique qui les protège jusqu'à des températures de l'ordre de 1600°C.

1. (a) Ecrire l'équation bilan de la combustion du méthane par le dioxygène, sachant que la réaction ne produit que de l'eau et du dioxyde de carbone sous forme gazeuse. On prendra un coefficient stoechiométrique unitaire pour le méthane.

   (b) Montrer que cette réaction est quantitative à 298 K.

   (c) Calculer le pouvoir calorifique inférieur (PCI) du méthane, noté q_{gn}, défini comme l'énergie thermique par unité de masse de méthane libérée par la combustion du méthane sous pression constante à 298 K.

2. Déterminer le débit massique d'air D_{m0} permettant de réaliser la réaction dans des conditions stoechiométriques, puis la puissance thermique $\mathcal{P}_{th0}$ libérée par la réaction dans ces conditions.

3. Effectuer un bilan détaillé d'enthalpie et exprimer, en fonction de q_{gn} et des données, la température des gaz en sortie de la chambre de combustion pour un débit massique d'air D_m0. Commenter la valeur obtenue.

   Lorsque la température de la chambre de combustion dépasse 1300°C, les constituants de l'air commencent à réagir entre eux pour produire des oxydes d'azote. Ces oxydes

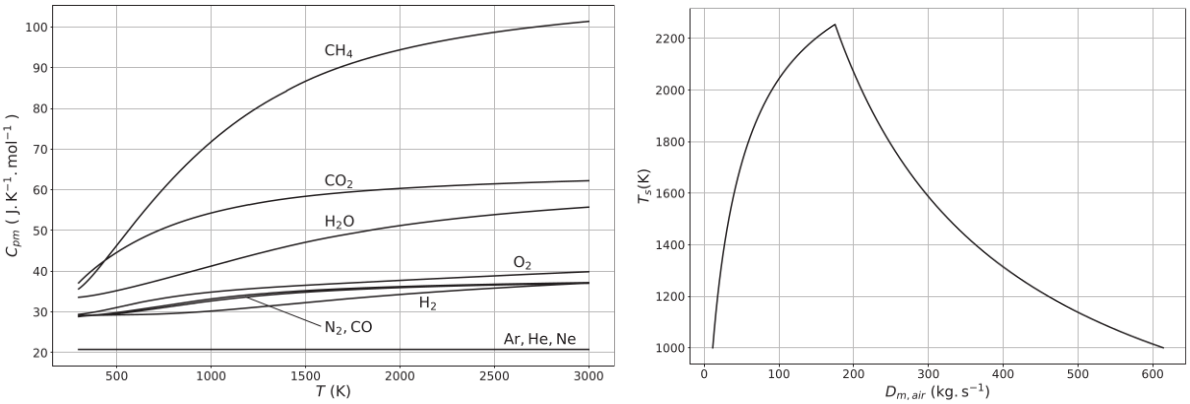


Figure 5: A gauche : capacités thermiques en fonction de la température. A droite : température de sortie T_s en fonction du débit massique d'air $D_{m,air}$ à l'entrée

d'azote, essentiellement NO et NO_2, couramment appelés NOx, sont à l'origine de graves problèmes pour l'environnement et la santé.

4. On souhaite éviter la production et le rejet de NOx dans l'atmosphère.
   (a) Justifier qualitativement que l'on peut diminuer la température de sortie en modifiant le débit d'air en entrée. Expliquer pourquoi, en pratique, le débit massique $D_{m,air}$ est choisi supérieur à D_{m0}.
   (b) Exprimer le débit molaire de chaque espèce en sortie en fonction de $D_{m,air}$, D_{m0} et des masses molaires dans le cas $D_{m,air} > D_{m0}$. On présentera les résultats dans un tableau. Les débits molaires des différentes espèces seront notés $F_{\mathrm{CH_4}}, F_{\mathrm{O_2}}$ ...
   (c) Exprimer, puis calculer, le débit massique d'air D_{m1} permettant à la turbine à gaz de fonctionner à sa température maximale tout en évitant la production de NOx.

5. Étant donné l'échauffement important des gaz dans la chambre de combustion, il faut tenir compte dans le calcul précédent de la dépendance avec la température de la capacité thermique molaire à pression constante des différents gaz (cf figure suivante). Un programme python permet de tracer le graphe de la température de sortie des gaz en fonction du débit d'air d'entrée en tenant compte de la dépendance avec la température des capacités thermiques molaires à pression constante des différents gaz.
   (a) Décrire précisément le graphe obtenu en mettant en évidence des valeurs particulières pertinentes dont on commentera le sens physique.
   (b) Déterminer la valeur réelle du débit massique d'air permettant de faire fonctionner la turbine à gaz à sa température maximale sans production de NOx et comparer cette valeur au débit massique D_{m1} trouvé précédemment.