Thermodynamique des systèmes ouverts

Chapitre 7

Avec solutions

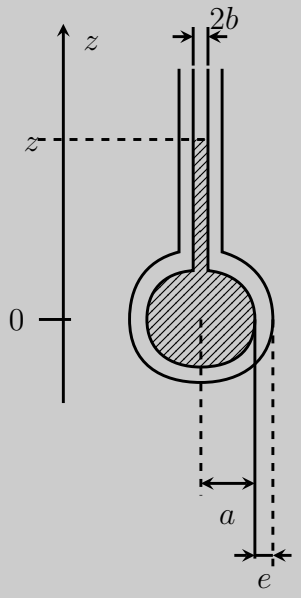
Incontournables	CCINP/E3A	Mines/Centrale/X/ENS
1 - 3 - 6	4 - 7 - 9 - 10	2 - 5 - 8 - 9 - 10 - 11

I - Principes infinitésimaux

1 Temps de réponse d'un thermomètre ♥★

On considère un thermomètre à mercure. Le mercure se trouve dans une sphère de rayon $a = 5\,\text{mm}$, à laquelle est rattaché un cylindre de rayon $b = 0.1\,\text{mm}$. La sphère et le cylindre sont délimités par une couche de verre d'épaisseur $e = 2\,\text{mm}$. On note $\rho = 13.5\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ la masse volumique du mercure et $c_p = 139\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ sa capacité thermique massique à pression constante, ainsi que $\rho_v = 2.5\,\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ et $c_{p,v} = 840\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ les mêmes quantités pour le verre.

1. (a) Faire un schéma est expliquer le principe de fonctionnement du thermomètre.



Lorsque le mercure chauffe, il se dilate et le niveau augmente dans le cylindre.

(b) Pour le mercure, le coefficient de dilatation α est donné par :

$$\alpha = \left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_p = 2 \cdot 10^{-4}\,\text{K}^{-1} \tag{1}$$

Déterminer la variation de hauteur du niveau de mercure dans le cylindre pour une augmentation de température de 1°C.

On a $\Delta V = V \times \alpha \Delta T$.
Or : $\Delta V = \pi b^2 \Delta z$ et $V \approx \frac{4}{3}\pi a^3$ si on néglige le volume du cylindre par rapport à celui de la sphère. On en déduit :

$$\Delta z = \frac{4\alpha \Delta T a^3}{3b^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{3 \cdot (10^{-4})^2}$$

Ou encore $\boxed{z = 3.3\,\text{mm}}$.

(c) Déterminer la hauteur minimale h du thermomètre pour que l'on puisse mesurer toutes les températures possibles à Pointe-à-Pitre. Les records enregistrés par la station Météo-France du Raizet sont de 13.0°C (4 février 1958) et 34.2°C (24 juillet 2001).

En Guadeloupe, on a donc $\Delta T_{\max} = 34.2 - 13.0 = 21.2\,\text{K}$
Alors : $\boxed{h = \Delta z \times \Delta T_{\max} = 7.0\,\text{cm}}$

2. On constate que le thermomètre était au soleil. On le met à l'ombre et on voudrait savoir au bout de combien de temps on pourra lire la température. On modélise la puissance thermique reçue par le thermomètre par une loi de Newton :

$$\mathcal{P} = kS(T_{ext} - T_{thermometre}) \tag{2}$$

où S est la surface de contact entre l'air et la sphère en bas du thermomètre (la variation de température du fluide dans le cylindre influe très peu sur le volume total). On a en général $k \approx 5\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il n'y a pas de vent, et $k \approx 50\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ s'il y a du vent.

(a) Appliquer le premier principe infinitésimal au mercure contenu dans la sphère entre t et $t + \mathrm{d}t$

(b) En déduire une équation différentielle sur la température du fluide dans le thermomètre.

(c) Combien de temps faut-il attendre en l'absence de vent ? Et avec du vent ?

On choisit le système {verre+mercure}. On peut supposer que le cylindre atteint très vite l'équilibre, et c'est donc surtout ce qui se passe dans la sphère qui est important. La capacité thermique du système est donnée par :

$$C = \rho c_p \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 + \rho_v c_{p,v} \cdot 4\pi a^2 e = 4\pi a^2 \left(\frac{\rho c_p a}{3} + \rho_v c_{p,v} e\right)$$

De plus la puissance reçue par le thermomètre est :

$$\mathcal{P} = k \times 4\pi a^2 (T_{\text{ext}} - T(t))$$

où $T(t)$ est la température du thermomètre. Entre t et $t+\mathrm{d}t$ le thermomètre ne subit pas de travail donc :

$$\mathrm{d}U = \delta Q = \mathcal{P}\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$C\mathrm{d}T = \mathcal{P}\mathrm{d}t \Rightarrow C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}$$

En réinjectant les expressions et après simplification on trouve :

$$\left(\frac{\rho c_p a}{3} + \rho_v c_{p,v} e\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + k(T - T_{\text{ext}}) = 0$$

Ou encore :

$$\boxed{\tau\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + T = T_{\text{ext}}}$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, l'équilibre est atteint au bout de :

$$t_{\text{eq}} = 3\tau = \frac{1}{k}(\rho c_p a + 3\rho_v c_{p,v} e)$$

Une application numérique donne $\tau = 440\,\text{s} = 7\,\text{min}\,20\,\text{s}$ avec du vent et $\tau = 4400\,\text{s} = 1\,\text{h}\,13\,\text{mn}$ sans vent.

3. Le mercure présente les mentions de sécurité suivantes :

Mention d'avertissement **Danger**

Pictogrammes

GHS06, GHS08, GHS09



Mentions de danger

H330	Mortel par inhalation
H360D	Peut nuire au fœtus
H372	Risque avéré d'effets graves pour les organes à la suite d'expositions répétées ou d'une exposition prolongée
H410	Très toxique pour les organismes aquatiques, entraîne des effets néfastes à long terme

Associer chaque pictogramme aux mentions de danger qui lui correspondent, et expliquer pourquoi les thermomètres à mercure ont été retirés du commerce en 1998.

La tête de mort indique un composé mortel par inhalation (en quelques minutes, heures, ou jours après l'exposition).
Le second pictogramme indique que le produit peut nuire au foetus et a des effets graves sur les organes. C'est typiquement le cas des produits cancérogènes.
Le troisième pictogramme indique un produit très toxique pour les organismes aquatiques.

Le mercure a été interdit dans les thermomètres car :

- Il y a un risque d'exposition ponctuelle au produit si le thermomètre se casse ce qui peut être mortel pour des enfants, par exemple s'ils inhalent le mercure ;
- Il y a un risque que les consommateurs jettent le thermomètre dans une poubelle classique ce qui a des effets graves sur la biodiversité.

2 Mesure d'une capacité thermique ★★★

On considère un échantillon de capacité thermique massique C supposée indépendante de la température. Les échanges thermiques de cet échantillon sont, d'une part, l'apport par une source électrique de puissance $\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos \omega t)$ et d'autre part une déperdition thermique telle que le flux thermique perdu est $\Phi = K(T - T_0)$ où K est une contante, T_0 la température d'un bain thermostaté, et T la température de l'échantillon supposé uniforme à tout instant dans son volume.

1. Expliquer comment réaliser expérimentalement la puissance alternative $\mathcal{P}(t)$. Quelle fréquence électrique faut-il imposer avec le GBF ?

Si on soumet l'échantillon à une tension alternative $U(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$ à travers une résistance R :

$$\mathcal{P}(t) = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R}(1 + \cos(4\pi f t))$$

On obtient bien la forme souhaitée en choisissant $\boxed{f = \frac{\omega}{4\pi}}$.

2. Ecrire l'équation différentielle régissant l'évolution de la température $T(t)$.

On applique le premier principe à l'échantillon entre t et $t + \mathrm{d}t$: $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$.
Or $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}T$; $\delta W = \mathcal{P}(t)\mathrm{d}t$ et $\delta Q = -\Phi \mathrm{d}t$. Ainsi :

$$C\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(t) - \Phi(t) = \mathcal{P}_0(1 + \cos \omega t) - K(T - T_0)$$

3. Résoudre l'équation en considérant que $T(t = 0) = T_0$. Exprimer la solution comme somme de trois contributions que l'on qualifiera physiquement. Donner l'allure de $T(t)$ sur un graphe.

On note $\theta = T - T_0$, alors :

$$C\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + K\theta = \mathcal{P}_0(1+\cos\omega t)$$

On utilise la méthode de la variation de la constante et on écrit $\theta(t) = F(t)e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{C}{K}$. Alors en réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$F'(t) = \frac{\mathcal{P}_0}{K\tau}(1+\cos\omega t)e^{-t/\tau}$$

Or $F(t=0) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \frac{\mathcal{P}_0}{K\tau}(1+\cos\omega t')e^{-t'/\tau}\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\mathcal{P}_0}{K}(e^{t/\tau}-1) + \int_0^t \frac{\mathcal{P}_0}{K\tau}\Re\left[e^{t'\left(\frac{1}{\tau}+i\omega\right)}\right]\mathrm{d}t' \\ &= \frac{\mathcal{P}_0}{K}(e^{t/\tau}-1) + \frac{\mathcal{P}_0}{K}\Re\left[\frac{e^{t/\tau}e^{i\omega t}-1}{1+i\omega\tau}\right] \end{aligned}$$

On en déduit que :

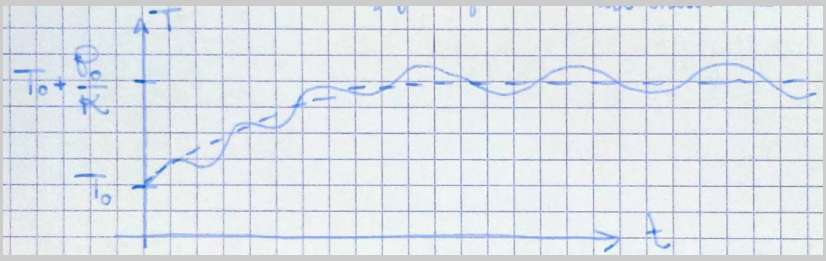
$$\theta(t) = \frac{\mathcal{P}_0}{K}\left(1+\frac{\cos\omega t+\omega\tau\sin\omega t}{1+(\omega\tau)^2}\right) - \frac{\mathcal{P}_0}{K}e^{-t/\tau}\left(1+\frac{1}{1+(\omega\tau)^2}\right)$$

On a bien $\theta(t=0) = 0$ et $T(t)$ est la somme de trois termes :

- Le premier T_0 correspond à l'équilibre avec l'extérieur ;
- Le second $\dfrac{\mathcal{P}_0}{K}(1-e^{-t/\tau})$ correspond à la réponse à un chauffage uniforme ;
- Le dernier terme (expression en fonction de $\cos\omega t$ et $\sin\omega t$) est la réponse à la composante alternative de la puissance.

$$\boxed{T(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K}\left[(1-e^{-t/\tau}) + \frac{\cos\omega t+\omega\tau\sin\omega t - e^{-t/\tau}}{1+(\omega\tau)^2}\right]}$$

L'allure correspond à une exponentielle à laquelle se superposent des oscillations sinusoïdales :



4. Quel est le temps caractéristique τ de passage du régime transitoire au régime permanent ?

$\tau = \dfrac{C}{K}$ d'après les calculs précédents.

5. Montrer que la mesure de l'amplitude de la composante alternative de la température de l'échantillon à différentes fréquences permet d'accéder à la valeur de sa capacité thermique.

En régime permanent ($t \gg \tau$) on a :

$$T(t) \approx T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{K}\left(1 + \frac{\cos\omega t + \omega\tau \sin\omega t}{1+(\omega\tau)^2}\right)$$

La composante alternative a une amplitude A telle que :

$$\begin{aligned}\frac{A^2}{2} &= \langle (T - \langle T\rangle)^2\rangle \\ &= \left(\frac{\mathcal{P}_0}{K}\right)^2 \langle \frac{\cos^2\omega t + \omega^2\tau^2\sin^2\omega t + 2\omega\tau\sin\omega t\cos\omega t}{(1+(\omega\tau)^2)^2}\rangle \\ &= \left(\frac{\mathcal{P}_0}{K}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}\cdot\frac{1+\omega^2\tau^2}{(1+(\omega\tau)^2)^2}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A = \frac{\mathcal{P}_0}{K\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$$

Ou encore :

$$\left(\frac{\mathcal{P}_0}{KA}\right)^2 = 1 + \omega^2\left(\frac{C}{K}\right)^2$$

Si on trace $\left(\dfrac{\mathcal{P}_0}{KA}\right)^2$ en fonction de ω^2, on peut ainsi déterminer la capcité thermique de l'échantillon par un ajustement linéaire, ce qui permet d'avoir des incertitudes de mesure très faibles.

II - Machines thermiques et systèmes ouverts

3 Calorimétrie par effet Joule ♥★

Un fluide s'écoule lentement en régime permanent avec un débit massique D dans un cylindre horizontal aux parois rigides et calorifugées. Ce fluide est en contact avec une résistance R, soumise à une différence de potentiel U constante. La température du fluide est notée T_1 en amont de la résistance et T_2 en aval.

1. Exprimer la capacité thermique massique c du fluide en fonction des paramètres du problème.

On applique le premier principe industriel au système ouvert {tube+résistance} : $\Delta h = w + q$.
Or si on note δm la masse traversant le système pendant une durée dt :

$$w = \frac{\delta W_{\text{elec}}}{\delta m} = \frac{\mathcal{P}_{\text{elec}}}{D} = \frac{U^2}{RD}$$

Par ailleurs $q = 0$ puisque le cylindre est calorifugé.
Enfin, pour une phase condensée idéale : $\Delta h = c(T_2 - T_1)$.
On en déduit que $c(T_2 - T_1) = \dfrac{U^2}{RD}$ et donc :

$$\boxed{c = \frac{U^2}{RD(T_2 - T_1)}}$$

2. Pour améliorer la sensibilité de la mesure, vaut-il mieux choisir un débit massique faible ou élevé ?

Pour améliorer la précision de la mesure, il faut maximiser l'écart de température ΔT. Il faut donc choisir un débit massique D le plus faible possible. Mais attention, il faut que D reste suffisamment élevé pour que l'on puisse négliger le transfert thermique à travers les parois (le temps de traversée du cylindre doit rester court devant le temps caractéristique d'équilibrage thermique entre le cylindre et l'extérieur).

4 Moteur à réaction ★★

Dans un moteur à réaction, un gaz parcourt un cycle que l'on supposera réversible. Le gaz est l'air, assimilable à un gaz parfait diatomique de rapport $\gamma = 7/5$.

Le gaz entre dans le réacteur à la pression P_1 et à la température T_1 (état (1)). Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression P_2. La température vaut alors T_2 (état (2)). Il rentre alors dans une chambre de combustion où sa température passe de T_2 à T_3, la pression restant égale à P_2 (état (3)). Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans la turbine jusqu'à P_4 et T_4 (état (4)). Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre les états (1) et (2). Enfin le gaz se détend dans une tuyère adiabatique sans parties mobiles jusqu'à P_1 et T_5 (état (5)).

Le gaz est rejeté avec la vitesse c dans l'atmosphère extérieure où il se refroidit à la pression constante P_1 de T_5 à T_1. On considère que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère.

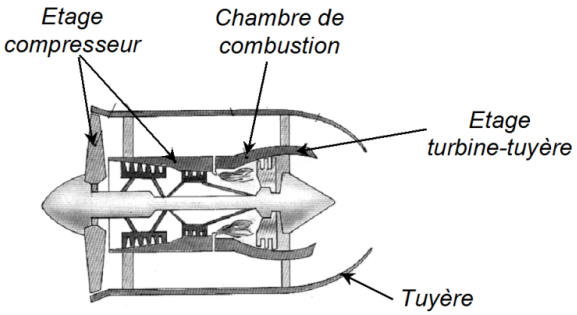
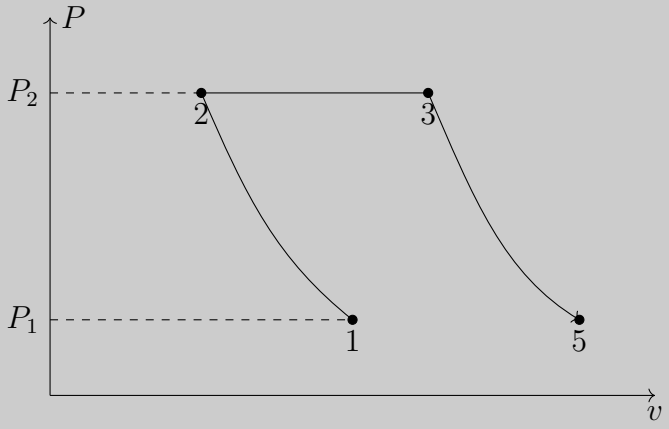


Figure 1: Schéma du moteur à réaction.

On donne $T_1 = 290\,\mathrm{K}$, $P_1 = 1\,\mathrm{bar}$, $P_2/P_1 = 5$, $T_3 = 1300\,\mathrm{K}$. L'air est considéré comme un gaz parfait diatomique de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$.

1. Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron (P, v), où v est le volume massique.

On a des phases adiabatiques que l'on supposera également réversibles lors des phases $1 \to 2$ et $3 \to 4$ donc les courbes associées vérifient la loi de Laplace $Pv^\gamma = \text{cste}$. De plus la phase $2 \to 3$ est une isobare donc la pression y est constante. Enfin la phase $4 \to 5$ ne subit pas de travail utile, on peut donc supposer que le volume massique est constant au cours de cette phase.



2. Exprimer l'énergie cinétique massique e_c à la sortie du moteur en fonction de M, R, γ, T_4 et T_5.

La vitesse du gaz est négligeable en (4). On applique le premier principe industriel entre (4) et (5) :

$$e_c + h_5 - h_4 = w_{4\to5} + q_{4\to5} = 0$$

car il n'y a pas de partie mobile sur cette étape ($w = 0$) et la transformation est adiabatique ($q = 0$). Or on sait que :

$$h_5 - h_4 = \frac{1}{m} C_p (T_5 - T_4)$$

où m est la masse de gaz et $C_p = \dfrac{nR\gamma}{\gamma - 1}$ est la capacité thermique totale du gaz. On en déduite, en combinant ces équations et en remarquant que $\dfrac{n}{m} = \dfrac{1}{M}$, que :

$$\boxed{e_c = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}(T_5 - T_4)}$$

3. Calculer les températures T_5 et T_2.

La transformation $3 \to 5$ est adiabatique réversible donc $PV^\gamma = \text{cste}$. Or, par la loi des gaz parfaits, on sait que $PV \propto T$ et donc $V \propto \dfrac{T}{P}$. On en déduit que $P^{1-\gamma}T^{=}\,\text{cste}$. Ainsi :

$$P_3^{1-\gamma} T_3^\gamma = P_5^{1-\gamma} T_5^\gamma$$

On en déduit :

$$T_5 = T_3 \times \left(\frac{P_5}{P_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \times \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \boxed{820\,\text{K}}$$

De la même manière sur la transformation $1 \to 2$:

$$T_2 = T_1 \times \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \boxed{459\,\mathrm{K}}$$

4. Exprimer la température T_4 en fonction des autres températures. Faire l'application numérique.

Le compresseur réutilise intégralement le travail fourni lors de la détente du gaz, ainsi on a $w_{1\to2} = -w_{3\to4}$. Donc, comme les deux étapes sont adiabatiques, le premier principe industriel fournit :

$$h_2 - h_1 = w_{1\to2} = -w_{3\to4} = h_3 - h_4$$

Or, pour un gaz parfait, par la seconde loi de Joule : $\Delta h = c_p \Delta T$ et c_p est une constante. Ainsi :

$$c_p(T_2 - T_1) = c_p(T_3 - T_4)$$

Ou encore :

$$\boxed{T_4 = T_3 + T_1 - T_2 = 1130\,\mathrm{K}}$$

5. Calculer la vitesse du gaz à la sortie du moteur.

On réutilise le résultat de Q2 :

$$\frac{1}{2}mc^2 = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_4 - T_5)$$

Ou encore :

$$c = \sqrt{\frac{2R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_4 - T_5)} = \boxed{570\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

5 Cyclone tropical ★★

Un cyclone tropical peut être modélisé par un cycle thermodynamique subi par l'air :

Depuis l'œil du cyclone (point C), l'air subit une décompression adiabatique vers les hautes couches de l'atmosphère. Lors de cette décompression, la vapeur d'eau se liquéfie et précipite sous forme de pluie. Lorsque l'air arrive au sommet de l'atmosphère en O, il ne contient plus d'eau. Il subit alors une compression isotherme à la température $T_f = 235\,\mathrm{K}$

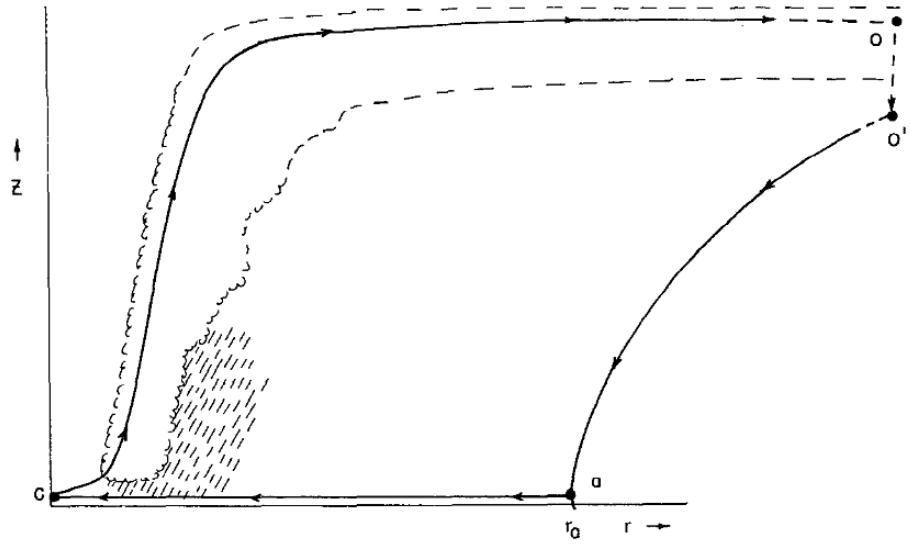


Figure 2: Cyclone tropical. Source : Emanuel (1991). *The theory of hurricanes.*

en perdant de l'énergie vers l'espace par rayonnement. On note q_f l'énergie perdue par rayonnement, par unité de masse d'air.

Puis, l'air subit une compression adiabatique et retourne vers la surface au point noté a. Cet air très sec est à l'origine de larges régions sans nuages autour des cyclones tropicaux.

Enfin, de a à C l'air se charge d'humidité à température constante $T_c = 300\,\mathrm{K}$, par évaporation de l'eau à la surface de l'océan. Le vent, qui peut être très important, forme des vagues à la surface de la mer, ce qui consomme un travail $w < 0$ par unité de masse d'air. On note x_v la fraction massique en vapeur d'eau au point C (généralement appelée *humidité spécifique* en météorologie), on a typiquement $x_v \approx 3 \cdot 10^{-2}$.

L'ensemble du cycle est alimenté par la liquéfaction de l'eau lors de la phase d'ascension : ce processus exothermique contribue à réchauffer l'air.

1. (❤) On fait d'abord l'hypothèse (simplifiée) que le système se comporte comme un système fermé. Notre système est constitué de l'air qui se déplace dans le cyclone, et la condensation de l'eau lors de la phase CO peut être considérée comme un apport d'énergie par transfert thermique q_c.

   (a) Représenter le cycle subi par l'air dans un diagramme (P, V) et dans un diagramme (T, S). Comment s'appelle ce cycle ?

   Le cycle est composé de deux adiabatiques réversibles (PV^γ et S constantes) et de deux isothermes (PV et T constantes). Il s'agit du cycle de Carnot. On obtient les graphiques suivantes :

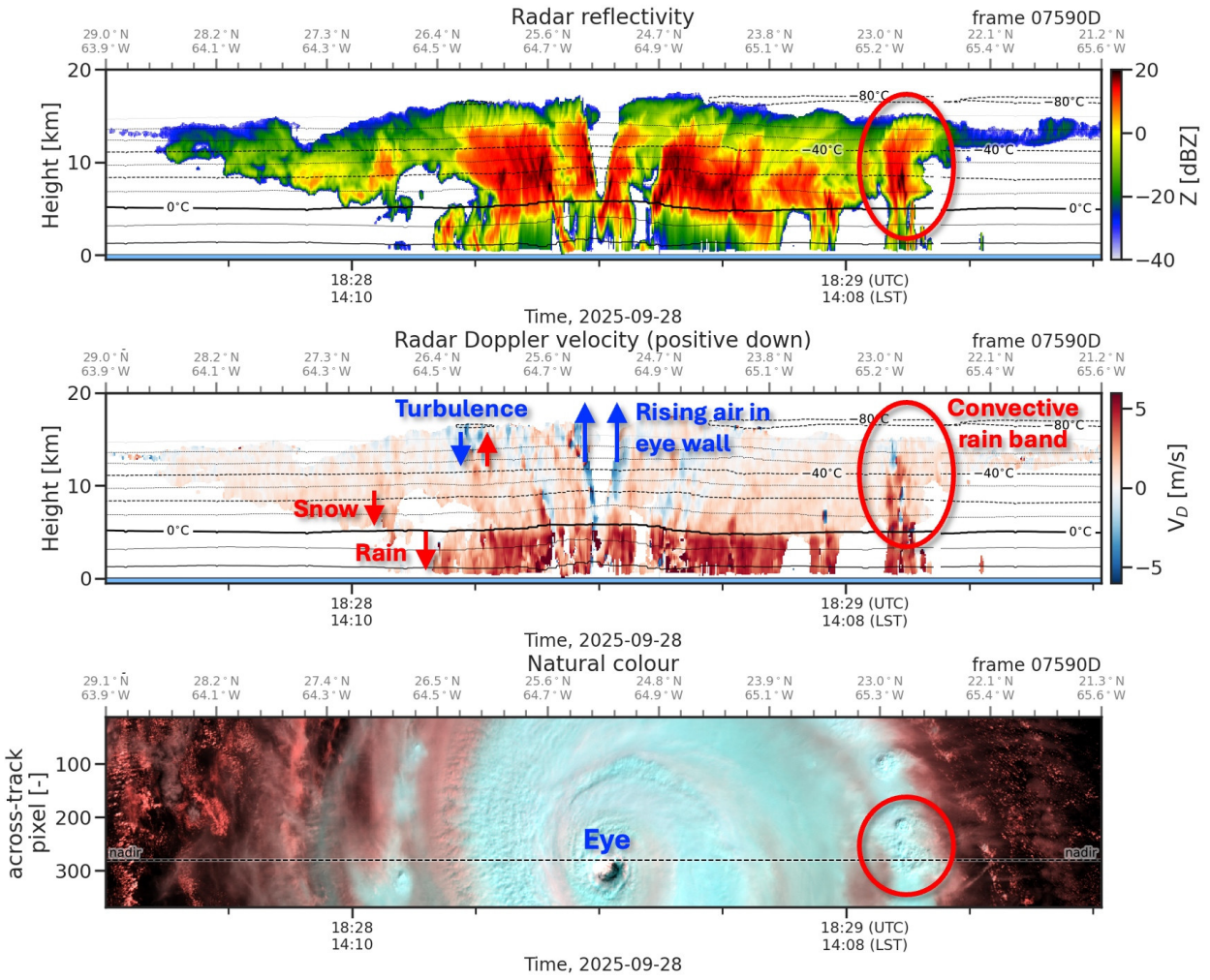
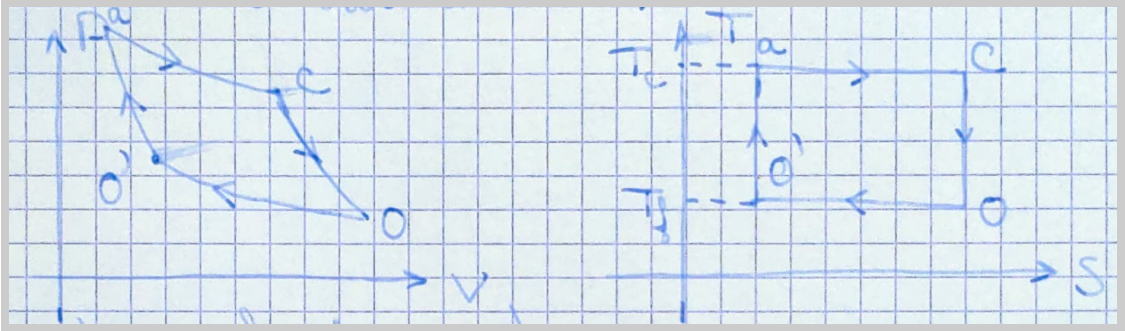


Figure 3: Vue en coupe du cyclone tropical Humberto par le satellite EarthCare au large des Antilles le 28 septembre 2025. En haut : réflectivité radar (reliée à l'intensité des précipitations). Au milieu : composante verticale de la vitesse des gouttes d'eau ou des flocons de neige $\overrightarrow{v_{gouttes}} \cdot \vec{e_z}$, le bleu indique un mouvement vers le haut dans l'oeil du cyclone. En bas : vue de haut du cyclone. La distance de gauche à droite est d'environ 1000 km.



(b) Expliquer pourquoi le cyclone peut être assimilé à un moteur, et calculer son efficacité η_c à partir des deux diagrammes.

On a $Q_c \geq 0$ et $Q_f \leq 0$: le cyclone transporte de l'énergie de la source chaude vers la source froide. Il la convertit en énergie mécanique, et produit ainsi du vent et des vagues à la surface de l'océan.
L'efficactié est définie par : $\eta = \dfrac{|W|}{Q_c}$. Calculons W :
Le long d'une isotherme de P_1 à P_2 on a :

$$W = -\int p_{\text{ext}} \mathrm{d}V = -\int p \mathrm{d}V = -\int nRT \frac{\mathrm{d}V}{V} = -nRT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

où on a utilisé le fait que la transformation est quasi statique, donc $p = p_{\text{ext}}$, ainsi que la loi des gaz parfaits.
Le long d'une adiabatique réversible :

$$\begin{aligned} W &= -\int p \mathrm{d}V = -\int p_1 V_1^\gamma \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma} \\ &= \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{1-\gamma}(p_1 V_1 - p_2 V_2) \\ &= \frac{nR}{1-\gamma}(T_1 - T_2) \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi retrouver ce résultat en appliquant le premier principe et en remarquant que la transformation est adiabatique.
On en déduit que $W_{O'a} = -W_{CO}$ et donc :

$$W = W_{aC} + W_{OO'} = nR\left(T_f \ln\left(\frac{V_O}{V_{O'}}\right) + T_c \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)\right)$$

De plus Q_c s'obtient par le premier principe :

$$Q_c = Q_{aC} = \Delta U_{aC} - W_{aC} = -nRT_c \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$$

où on a utilisé la première loi de Joule qui indique que $\Delta U_{aC} = 0$ (la transformation est en effet isotherme).

Enfin on peut remarquer que :

$$\begin{cases} nRT_cV_c^{\gamma-1} = P_cV_c^{\gamma} = P_OV_O^{\gamma} = nRT_fV_O^{\gamma-1} \\ nRT_cV_a^{\gamma-1} = P_aV_a^{\gamma} = P_{O'}V_{O'}^{\gamma} = nRT_fV_{O'}^{\gamma-1} \end{cases}$$

Ainsi en faisant le quotient des deux équations on obtient $\left(\frac{V_C}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_O}{V_{O'}}\right)^{\gamma-1}$ ce qui implique que :

$$\ln\left(\frac{V_O}{V_{O'}}\right) = -\ln\left(\frac{V_a}{V_C}\right)$$

D'où :

$$W = nR(T_c - T_f)\ln\left(\frac{V_a}{V_C}\right)$$

Alors :

$$\boxed{\eta = \frac{|W|}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c}}$$

(c) Comparer η à l'efficacité de Carnot et commenter.

On obtient le rendement de Carnot, ce qui n'est pas surprenant car le cycle est supposé réversible. Il s'agit du rendement maximal pouvant être obtenu par une machine thermique, le cycle du cyclone tropical permet donc de maximiser la conversion d'énergie thermique en énergie mécanique.

2. En réalité, le système est ouvert, car de l'eau s'évapore à la surface de l'océan et revient à l'océan sous forme de pluie.

(a) Relier le débit massique de l'eau qui rentre et sort du système, D_m^{eau}, au débit massique de l'air qui circule dans le cycle, D_m^{air}.

Le débit massique d'eau se calcule à partir de la masse d'eau $\mathrm{d}m_{\text{eau}}$ qui traverse le syst-me pendant $\mathrm{d}t$: $D_m^{\text{eau}} = \frac{\mathrm{d}m_{\text{eau}}}{\mathrm{d}t}$. De même $D_m^{\text{air}} = \frac{\mathrm{d}m_{\text{air}}}{\mathrm{d}t}$. Or, au point C, on a une fraction massique x_v d'eau dans l'air, si bien que :

$$m_{\text{eau}} = x_v m_{\text{air}}$$

On en déduit que $\boxed{D_m^{\text{eau}} = x_v D_m^{\text{air}}}$.

(b) En appliquant le premier principe industriel au système ouvert, montrer que :

$$x_v\Delta h_{\text{vap}} + w + q_f = 0 \tag{3}$$

où $\Delta h_{\text{vap}} = 2250\,\text{kJ/kg}$ est l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau.

On considère Σ le système constitué de l'air qui circule en circuit fermé dans le cyclone, ainsi que de l'eau contenue dans le cyclone, qui y pénètre sous forme de vapeur et ressort

sous forme de pluie. D'après le premier principe industriel :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p = w_{\text{eau}} + q_{\text{eau}}$$

C'est l'eau qui rentre et sort du système, donc toutes les quantités massiques sont calculées par unité de masse d'eau traversant le système. Ici $\Delta h = -\Delta h_{\text{vap}}$ car l'eau se liquéfie dans le système. L'eau rentre et sort du système à $z = 0$ donc ne subit pas de variation d'énergir potentielle et on négligera l'énergie cinétique des gottes de pluie.
Par ailleurs le seul transfert thermique reçu par le système est le refroidissement radiatife vers l'espace sur l'étape OO' (le transfert thermique qui réchauffe l'air en CO est un transfert interne au système. q est donc l'énergie thermique perdue vers l'espace par unité de masse d'eau traversant le système, ainsi on a $D_m^{\text{air}} q_f = D_m^{\text{eau}} q_{\text{eau}}$ ou encore $q_{\text{eau}} = \dfrac{q_f}{x_v}$.
Enfin, par un calcul similaire, le travail utile reçu par l'eau est relié à celui reçu par l'air via $w_{\text{eau}} = \dfrac{w}{x_v}$.
Le premier principe industriel fournit alors $-\Delta h_{\text{vap}} = \dfrac{q_f + w}{x_v}$ ou encore :

$$x_v \Delta h_{\text{vap}} + w + q_f = 0$$

(c) En appliquant le second principe industriel au système, déterminer q_f. En déduire que :

$$w = -\eta x_v \Delta h_{vap} \tag{4}$$

Le second principe industriel fournit :

$$\Delta s = s_{\text{ech}} + s_{\text{creee}} = s_{\text{ech}}$$

où on a utilisé $s_{\text{creee}} = 0$ car les transformations sont supposées réversibles. Or $\Delta s = -\Delta s_{\text{vap}} = -\frac{\Delta h_{\text{vap}}}{T_c}$ puisque l'eau se liquéfie proche du point C, donc à la température T_c.
De plus $s_{\text{ech}} = \dfrac{q_{\text{eau}}}{T_c} = \dfrac{q_f}{x_v T_c}$ car le transfert thermique se fait au sommet de l'atmosphère ($T = T_c$).
On conclut par le second principe que :

$$q_f = -x_v \Delta h_{\text{vap}} \frac{T_f}{T_c}$$

Alors, en réinjectant dans le premier principe industriel obtenu en question précédente, on trouve :

$$-w = x_v \Delta h_{\text{vap}} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)$$

On reconnaît ici l'expression de l'efficacité de Carnot vue en question 1, et on a bien :

$$\boxed{w = -\eta x_v \Delta h_{\text{vap}}}$$

(d) Commenter ce résultat vis-à-vis de la réponse à la question 1.

On retrouve le résultat de la Q1 en supposant le cycle fermé, si on considère que la source chaude correspond à l'enthalpie libérée lors de la liquéfaction de l'eau : $q_c = x_v \Delta h_{\text{vap}}$. Ce résultat permet donc de justifier l'approximation d'un système fermé faite initialement.

3. On cherche maintenant à déterminer le vent produit par le cyclone. La force de frottement fluide exercée par les vagues sur l'air sur une surface $\mathrm{d}S$ est de la forme :

$$\mathrm{d}\vec{F} = -\rho C_d v \vec{v} \mathrm{d}S \tag{5}$$

où $C_d \approx 10^{-3}$ a été estimé par des études phénoménologiques (Ellison, 1956) et $\rho \approx 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ est la masse volumique de l'air. Pour simplifier le problème, on va supposer que le cyclone crée un vent $\vec{v} = -v_0 \vec{e_r}$ de norme uniforme dans un disque de rayon $r_a = 1000\,\mathrm{km}$, et sur une épaisseur de $h = 500\,\mathrm{m}$ (hauteur de la couche limite atmosphérique).[1]

(a) Déterminer la puissance totale dissipée par les forces de frottement fluide en fonction de v_0 et des constantes du problème.

$$\mathcal{P} = \iint \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = -\rho C_d v_0^3 \times \pi r_a^2$$

où $\rho C_d v_0^3$ est la puissance surfacique dissipée, et πr_a^2 est la surface concernée.

(b) Déterminer, de même, la quantité D_m^{air} en fonction de v_0 et des constantes du problème.

Le flux d'air rentre à travers la surface latérale S_{lat} d'un cylindre de rayon r_a et de hauteur h ainsi $S_{\text{lat}} = 2\pi r_a h$. On a alors :

$$D_m^{air} = \rho v_0 S_{\text{lat}} = 2\pi \rho r_a h v_0$$

(c) En déduire que :

$$w = -\frac{C_d r_a}{2h} v_0^2 \tag{6}$$

On a :

$$w = \frac{\delta W}{\delta m} = \frac{\mathcal{P}\mathrm{d}t}{D_m^{\text{air}}\mathrm{d}t} = \frac{\mathcal{P}}{D_m^{\text{air}}}$$

En réinjectant les résultats précédents on a bien :

$$\boxed{w = -\frac{C_d r_a}{2h} v_0^2}$$

[1] Cette expression du vent pose un certain nombre de problèmes car elle ne conserve pas la masse et ne prend pas en compte la rotation de la Terre via la pseudo-force d'inertie d'entraînement de Coriolis, mais elle nous permettra d'estimer un ordre de grandeur de v_0. Nous expliquerons la forme de l'écoulement autour d'un cyclone dans un chapitre ultérieur.

(d) En utilisant les résultats de la question 2, en déduire une expression de v_0 en fonction de $C_d, r_a, h, x_v, \Delta h_{vap}$ et η. Faire l'application numérique. L'ouragan Hugo passé sur la Guadeloupe en 1989 avait des vents moyens de 220 km/h et des rafales à plus de 300 km/h. Commenter ces valeurs.

On a vu que $w = -\eta x_v \Delta h_{\text{vap}}$, on en déduit que :

$$\frac{C_d r_a}{2h} v_0^2 = \eta x_v \Delta h_{\text{vap}}$$

ou encore :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2\eta x_v \Delta h_{\text{vap}}}{C_d r_a}} = 120\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} = 434\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}}$$

On obtient une vitesse qui a bien l'ordre de grandeur des vitesses de vent mesurées dans un cyclone tropical. Cette vitesse est ici un peu surestimée car on a supposé le cycle complètement réversible, ce qui n'est pas le cas en réalité (irréversibilités lors des changements d'état et de la chute des gouttes de pluie notamment).

4. Nous allons maintenant estimer le taux de précipitations qui tombe dans le cyclone. Pour cela, nous pouvons supposer que l'ensemble de la pluie tombe dans un disque de rayon $r_b = r_a/2$ (la pluie ne se produit que dans la région proche du centre du cyclone où l'air monte). On note P le taux de précipitations, qui se mesure en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ (équivalents à des mm/h)

(a) Relier le débit massique D_m^{eau} à la quantité totale d'eau qui précipite par unité de temps. En déduire que $P = 4D_m^{eau}/(\pi r_a^2)$

La quantité totale d'eau qui précipite est tout simplement égale à D_m^{eau} (en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$). Ainsi :

$$P = \frac{D_m^{\text{eau}}}{\pi r_b^2} = \frac{4D_m^{\text{eau}}}{\pi r_a^2}$$

(b) A partir du résultat des questions 2a et 3b, en déduire une expression de P en fonction de ρ, v_0, h, x_v et r_a.

On a vu que $D_m^{\text{eau}} = x_v D_m^{\text{air}} = 2\pi x_v \rho v_0 r_a h$. Ainsi :

$$\boxed{P = \frac{8 x_v \rho v_0 h}{r_a}}$$

(c) Faire l'application numérique. En Guadeloupe, le record de précipitations en une heure par un cyclone est détenu par le cyclone Helena (1995) avec $125\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{h}^{-1}$ à Saint-Claude. Commenter.

On obtient $P = 1.7 \cdot 10^{-2}\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$, ou encore après avoir converti $P = 62\,\text{mm}\cdot\text{h}^{-1}$. Cette valeur est faible par rapport à ce qui a été mesuré même si c'est le bon ordre de

grandeux, pour plusieurs raisons :

- Les précipitations sont souvent très localisées comme le montre l'image satellite, donc le taux de précipitations est en réalité plus intense mais sur des régions plus restreintes ;
- Dans le cas de la Guadeloupe, le record a été enregistré à Saint-Claude où il existe un effet local de topographie qui amplifie fortement le taux de précipitations.

6 Pompe à chaleur ♥★★

On souhaite réaliser une pompe à chaleur utilisant le fluide caloporteur $R134a$ pour laquelle la source chaude (appartement à réchauffer) est à la température $T_c = 20\,°\text{C}$ et la source froide (air extérieur l'hiver en hexagone) est à la température $T_f = -5\,°\text{C}$.

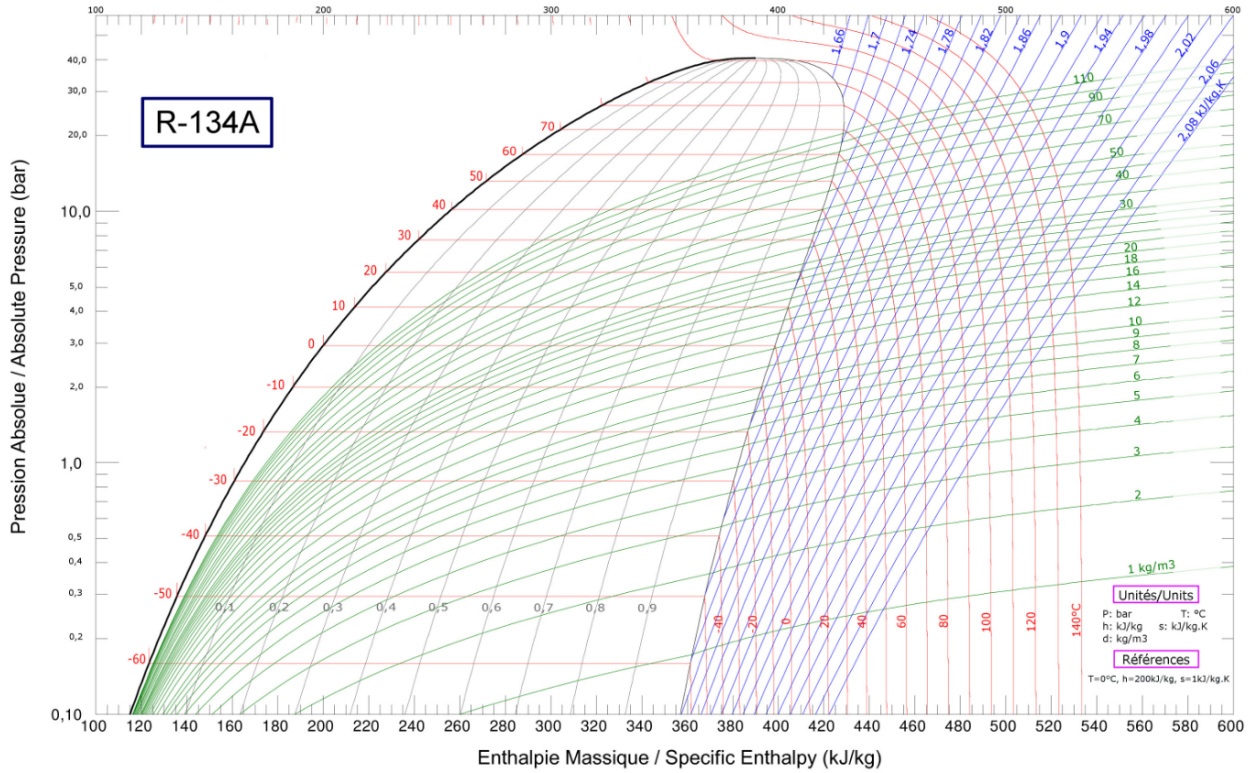


Figure 4: Diagramme enthalpique du fluide R134A.

On supposera pour cela que :

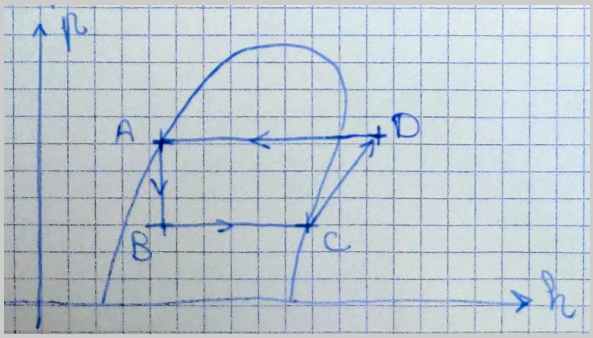
- Les transferts thermiques sont isobares
- L'échange avec la source chaude cesse une fois que la dernière bulle de vapeur s'est condensée.
- L'échange avec la source froide cesse une fois que la dernière goutte de liquide s'est évaporée.

- La détente à lieu en absence de pièce mécanique mobile, dans une enceinte parfaitement calorifugée
- La compression est effectuée à l'aide d'un moteur, Cette dernière est supposée adiabatique et on mesure une température du gaz d'environ 30 °C en fin de compression, pour une pression de 5.8 bar

1. Tracer le cycle correspondant à la pompe à chaleur proposée. Il se compose de 4 états intermédiaires, entre 4 transformations.

On a les étapes suivantes :

- A : fin de l'échange avec la source chaude à $T = T_c = 20°\text{C}$
- $A \to B$: détente avec $w = 0$ et $q = 0$ donc $\Delta h = 0$ par le premier principe industriel. La détente est isenthalpe.
- $B \to C$: échange avec la source froide, vaporisation du fluide à température et pression constantes.
- $C \to D$: compression jusqu'au point D repéré par les coordonnées $T = 30°\text{C}$ et $p = 5.8\,\text{bar}$.
- $D \to A$: échange avec la source chaude : refroidissement puis liquéfaction.



2. Les échanges thermiques sont-ils réversibles ?

Oui en $B \to C$ car le changement d'état se fait à la température constante $T = T_f$. En revanche, ce n'est pas le cas lors de l'étape $D \to A$ car au début de la transformation, on a une température $T > T_c$ et donc on ne se situe pas dans un état d'équilibre à tout moment de la transformation.

3. Définir rigoureusement l'efficacité de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques aux sources, puis la calculer à l'aide d'une lecture graphique.

On a $\eta = -\dfrac{q_{DA}}{w_{CD}}$ car $-q_{DA}$ est le transfert thermique apporté au logement par la pompe à chaleur et w_{CD} est le travail consommé par la pompe à chaleur, qui devra être fourni soir sous forme de travail électrique, soit avec du carburant.
Or par le premier principe industriel appliqué à l'étape DA :

$$_A - h_D = q_{DA} + w_{DA} = q_{DA}$$

car il n'y a pas de travail sur cette partie. De même sur l'étape CD qui est adiabatique :

$$h_D - h_C = q_{CD} + w_{CD} = w_{CD}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\eta = \frac{h_D - h_A}{h_D - h_C} = 7.7}$$

4. Calculer le rendement associé à une pompe à chaleur réversible. Commenter ce résultat.

Pour une pompe à chaleur réversible ditherme, comme on se situe en circuit fermé :

$$\Delta h = w + q_c + q_f = 0$$

De plus le second principe industriel fournit :

$$\Delta s = \frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} + \Delta s_{\text{ech}} = 0$$

avec $\Delta s_{\text{ech}} = 0$ pour un fonctionnement réversible. Donc $q_f = -\dfrac{T_f}{T_c} q_c$ et on conclut que :

$$q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) + w = 0$$

ou encore :

$$\boxed{\eta_c = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 11.7}$$

On a bien $\eta < \eta_c$ car la pompe à chaleur étudiée présente une phase non réversible qui contribue à réduire son efficacité.

7 Chauffe-eau ★

Pour faire de l'eau tiède à 38 °C, un mélangeur domestique utilise de l'eau froide de l'alimentation générale à 12 °C et de l'eau chaude d'un chauffe-eau à 65 °C.

La consommation d'eau des foyers français est répartie comme suit (par personne et par jour) :

- 49 L pour les bains et les douches (*),
- 25 L pour les W.C.,
- 25 L pour le linge,
- 12 L pour la vaisselle (6 L au lave-vaisselle et 6 L à la main (*)),
- 8 L pour le ménage (*),
- 8 L pour l'arrosage des plantes,
- 9 L pour la préparation de la nourriture,
- 1 L pour la boisson.

On considère que les consommations notées avec un astérisque (*) utilisent de l'eau tiède (mélange d'eau chaude et froide à 37°C).

Données : Le prix du kWh est d'environ 0,15€ et la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4.2\,\mathrm{kJ}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$.

Déduire de ces données le coût moyen de la consommation électrique par an et par personne dans l'utilisation du chauffe-eau.

Pour avoir un litre d'eau tiède, on considère qu'il faut α L d'eau chaude et $1-\alpha$ L d'eau froide, avec :

$$\alpha T_c + (1-\alpha)T_f = T_{\text{tiede}}$$

D'où $\alpha = \dfrac{T_{\text{tiede}} - T_f}{T_c - T_f} = 0.49$.
De plus, on consomme un débit massique par personne :

$$D_m = 365 \times \rho_{\text{eau}} \times (49+6+8)\alpha \cdot 10^{-3} = 11.3 \cdot 10^3 \mathrm{kg}\cdot\mathrm{an}^{-1}$$

Or par le premier principe industriel, et en utilisant le fait qu'il n'y a pas de pièce mobile donc pas de travail dans le chauffe-eau :

$$D_m \Delta h = D_m(q + w_u) = D_m q = \mathcal{P}_{\text{th}}$$

où $\mathcal{P}_{\text{th}}$ est la puissance thermique consommée :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = D_m \Delta h = D_m c(T_c - T_f)$$

L'énergie totale dépensé est obtenue en multipliant ce résultat par la durée $\Delta t = 1\,\mathrm{an}$ (pas besoin de conversion car le débit est déjà exprimé en kg/an), on obtient $E = 2.5 \cdot 10^9\,\mathrm{J}$.
Or $1\,\mathrm{kWh} = 1000\,\mathrm{Wh} = 1000 \times 3600\,\mathrm{W} = 3.6 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$. En réalisant la conversion on trouve $E = 698\,\mathrm{kWh}$ soit un coût de 104 euros par personne et par an.

8 Etude d'une tuyère ★★★

Un gaz supposé parfait est en écoulement permanent selon l'axe Ox dans une tuyère rigide horizontale de section $S(x)$. L'écoulement a lieu sans frottement sur les parois, et on suppose qu'il est suffisamment lent pour être considéré comme quasi-statique, mais toutefois suffisamment rapide pour être considéré comme adiabatique. Les particules de gaz situées dans une tranche de gaz d'épaisseur dx située à abscisse x ont une même vitesse $\vec{c} = c(x)\vec{e_x}$. On note $u(x)$ l'énergie interne massique, $h(x)$ l'enthalpie massique, $v(x)$ le volume massique, $P(x)$ la pression et $T(x)$ la température, M la masse molaire du gaz et $\gamma = c_p/c_v$.

1. En appliquant le premier principe industriel à un système ouvert bien choisi, déterminer une relation entre $h(x), h(0), c(x)$ et $c(0)$.

On choisit le système situé entre $x = 0$ et x :

$$\Delta h = h(x) - h(0) \qquad ; \qquad \Delta e_c = \frac{1}{2}c(x)^2 - \frac{1}{2}c(0)^2$$

On a par ailleurs $\Delta e_p = 0$ (la tuyère est horizontale) ; $q = 0$ car la transformation est adiabatique, et $w = 0$ car il n'y a pas de partie mobile.
Le premier principe industriel fournit alors :

$$\boxed{h(x) - h(0) = -\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2)}$$

2. En déduire que :

$$\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) = -\int_{P(0)}^{P(x)} v\mathrm{d}P \tag{7}$$

On a au cours du mouvement du fluide :

$$\mathrm{d}h = \mathrm{d}u + p\mathrm{d}v + v\mathrm{d}p$$

Par le premier principe appliqué à un élément de fluide de masse δm le long de sa trajectoire, qui subit une évolution adiabatique :

$$\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q = \delta W$$

avec $\mathrm{d}U = \delta m \times \mathrm{d}u$ et $\delta W = \delta m \times (-p\mathrm{d}v)$. On en déduit que $\mathrm{d}h = v\mathrm{d}p$. Ainsi :

$$h(x) - h(0) = \int_{p(0)}^{p(x)} v\mathrm{d}p$$

D'où le résultat à démontrer.

3. En déduire l'expression de la vitesse de sortie $c(L)$ du gaz en fonction de $c(0), T(0), \gamma, M, R, P(0)$ et $P(L)$.

Le gaz étant parfait et en écoulement adiabatique réversible, on a $pv^\gamma = \text{cste} = p(0)v(0)^\gamma$. D'où :

$$v = \left(\frac{p(0)}{p}\right)^{\frac{1}{\gamma}} v(0)$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) &= -\int_{P(0)}^{P(L)} v(0)P(0)^{1/\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p^{1/\gamma}} \\ &= v(0)P(0)^{1/\gamma}\left[\frac{\gamma p^{1-1/\gamma}}{1-\gamma}\right]_{P(0)}^{P(L)} \\ &= \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(P(0)v(0) - P(L)v(L)\right)\end{aligned}$$

où on a réutilisé pour la dernière ligne $Pv^\gamma = \text{cste}$.
Or $P(0)v(0) = \dfrac{RT(0)}{M}$ et $P(L)v(L) = \dfrac{RT(L)}{M}$. De plus la loi de Laplace peut se réécrire $p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste}$ donc :

$$T(L) = T(0)\left(\frac{P(L)}{P(0)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Ainsi :

$$\boxed{c(L)^2 = c(0)^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\cdot\frac{RT(0)}{M}\left[\left(\frac{P(L)}{P(0)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}$$

4. En régime stationnaire, justifier que le débit massique est indépendant de x. En déduire une relation entre $\mathrm{d}S/S$, $\mathrm{d}v/v$ et $\mathrm{d}c/c$.

En régime stationnaire, la masse contenue entre 0 et x est constante :

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = D_m(x) - D_m(0) = 0$$

Or :

$$D_m = \rho(x)S(x)c(x) = \frac{S(x)c(x)}{v(x)}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S}{S} + \frac{\mathrm{d}c}{c} = \frac{\mathrm{d}v}{v}}$$

5. On note $c_{son} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ la célérité du son, et $m = c/c_{\text{son}}$ le nombre de Mach. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} + (1 - m^2)\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0 \tag{8}$$

On différentie le résultat de Q2 : $c\mathrm{d}c = -v\mathrm{d}v$.
On différentie également la loi de Laplace : $\dfrac{\mathrm{d}p}{p} + \gamma dfrac\mathrm{d}vv = 0$.
D'où :

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{1}{\gamma}\frac{c\mathrm{d}c}{pv} = \frac{Mc\mathrm{d}c}{\gamma RT} = \frac{c\mathrm{d}c}{c_{\text{son}}^2}$$

où on a utilisé la loi des gaz parfaits qui donne $pv = RT/M$. On obtient alors bien la relation demandée :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S}{S} + (1 - m^2)\frac{\mathrm{d}c}{c} = 0}$$

6. On désire que la vitesse d'écoulement du gaz soit une fonction croissante de x. En déduire la géométrie locale de la tuyère dans les deux cas $c < c_{\text{son}}$ et $c > c_{\text{son}}$.

Il faut $\dfrac{\mathrm{d}c}{c} > 0$ dans le cas où l'écoulement est subsonique ($c < c_{\text{son}}$), donc une tuyère convergente, et au contraire il faut une tuyère divergente si l'écoulement est supersonique.

9 La coulée de lave Kaupulehu ★★

Cet exercice demande une certaine prise d'initiative et une analyse documentaire, il vous appartient notamment de faire des hypothèses et de proposer des valeurs numériques à partir des documents.

La coulée de lave Kaupulehu résulte d'une éruption du volcan hawaïen Hualalai en 1800 ou peut-être quelques années avant cette date. Il n'existe aucun témoignage écrit de première main pour cette éruption et les témoignages de seconde main pour cette coulée ne sont pas complètement fiables. La reconstitution des caractères de la coulée Kaupulehu nécessite donc une étude géologique et l'utilisation de modèles physiques.

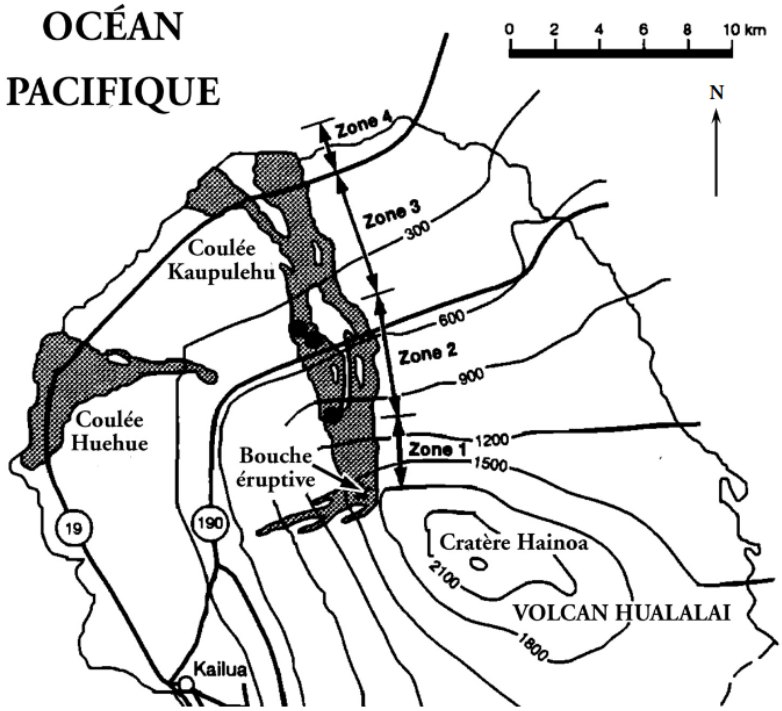
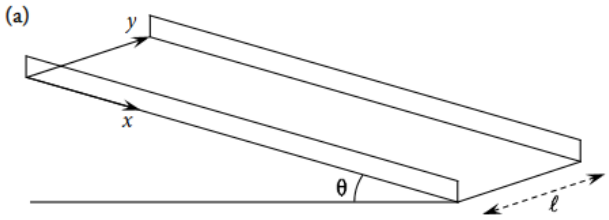


Figure 4. Carte de la coulée de lave Kaupulehu du volcan Hualalai montrant l'emplacement de la bouche éruptive et les quatre zones de la coulée. La coulée Huehue est une autre coulée de lave un peu plus tardive.

La bouche éruptive de la coulée Kaupulehu est une fissure éruptive située un peu au nord-ouest du cratère (Figure 4). La coulée de lave est restée fluide jusqu'à la mer, qui se trouve à environ 15 km de distance de la bouche éruptive, et elle s'est poursuivie sous la mer sur plusieurs kilomètres. La lave est un basalte alcalin à olivine de structure vitreuse incluant de petits cristaux de plagioclases, de pyroxènes et d'olivine.

On pourra considérer la géométrie de la coulée comme rectangulaire comme sur la figure 1.



La lave n'étant pas un corps pur, elle ne se solidifie pas à température constante : le pourcentage de lave solidifiée augmente au fur et a mesure que la température diminue. Lors du refroidissement, les premiers cristaux qui apparaissent sont des cristaux d'olivine. Les cristaux de plagioclase apparaissent vers 1180°C et ceux de pyroxène vers 1150°C. La Figure 3 présente le pourcentage massique du total des phases cristallines en fonction de la température lors du refroidissement de la lave.

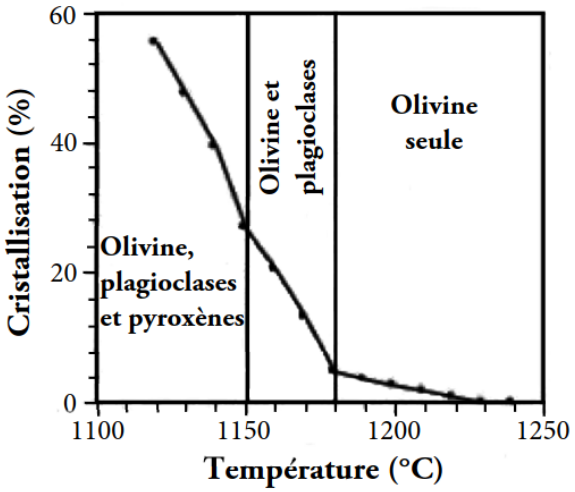


Figure 3. Digramme de phase pour la lave de la coulée Kaupulehu avec le pourcentage en masse de cristallisation en fonction de la température.

L'analyse des fragments de lave solides éjectés à proximité de la bouche éruptive a montré la présence de cristaux d'olivine dans tous les échantillons. La présence de cristaux de plagioclases n'a été observée que dans un petit nombre d'échantillons et aucun cristal de pyroxène n'a été observé.

L'épaisseur de la coulée de lave est d'environ $d = 1.5\,\text{m}$. Par ailleurs, à mi-chemin de la coulée, on constate que dans un virage, la coulée est montée sur le flanc de la montagne situé en face, à une hauteur d'environ $H = 0.8\,\text{m}$.

1. (a) Un point matériel M de masse m et de vitesse initiale v glisse sur un support incurvé (Figure 5). Tous les frottements sont négligés. Ce point matériel monte la pente, atteint une hauteur maximale et redescend en sens inverse. Etablir l'expression de l'élévation maximale L atteinte par le point.

   On applique le théorème de l'énergie mécanique au point M dans le référentiel terrestre galiléen ; le point est soumis à son poids conservatif, et à la réaction du support qui ne travaille pas en l'absence de frottements. L'énergie mécanique E_m est donc conservée. Or à l'instant initial $E_m = \frac{1}{2}mv^2$ et lorsque la particule rebrousse chemin, sa vitesse est nulle, l'énergie est donc purement potentielle : $E_m = mgL$. L'égalité des deux expressions implique que $\boxed{L = \frac{v^2}{2g}}$.

   (b) En déduire la vitesse v de l'écoulement de lave.

   Dans la coulée de lave, si on suppose que l'écoulement était peu visqueux (frottements négligeables), ce phénomène peut être considéré comme responsable de la montée de la lave sur le flanc opposé de la montagne dans un virage. On observe une montée sur une hauteur $H = 0.8\,\text{m}$, alors la vitesse de la lave est donnée par

$\boxed{v = \sqrt{2gH} \approx 4\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$.

(c) Proposer une estimation du débit volumique D_v, puis du débit massique D_m de lave de l'éruption.

On note W la largeur de la coulée de lave, on lit sur la carte $W \approx 2\,\mathrm{km}$. La section de la coulée de lave est donc $W \times d$ et on peut conclure que le débit volumique est donné par :

$$\boxed{D_v = Wdv = 1.2 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

Le débit massique vaut quant à lui :

$$\boxed{D_m = \rho D_v = 3.1 \cdot 10^7\,\mathrm{kg}^3\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

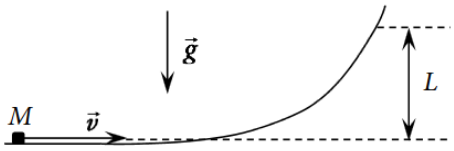


Figure 5. État initial et élévation maximale.

2. Justifier que la température de la lave à l'origine de la coulée est de l'ordre de $T_0 = 1180°\mathrm{C}$.

D'après les documents, on observe au voisinage de la bouche du cratère principalement des olivines, mais quelques échantillons contiennent également des pyroxènes. On se situe donc probablement à la limite de cristallisation du pyroxène, c'est-à-dire, d'après la figure 3, autour de 1180°C.

Le refroidissement de la lave au cours de son écoulement est essentiellement dû aux pertes thermiques radiatives par la surface libre de la lave. La puissance radiative perdue par un élément de surface $\mathrm{d}S$ est donnée par la loi de Stefan :

$$\mathrm{d}P_{\mathrm{th}} = \sigma T^4 \mathrm{d}S \tag{9}$$

où T est la température de la lave et $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-4}$ est la constante de Stefan. On se place dans le cas d'un écoulement stationnaire, bidimensionnel et uniforme. La vitesse, la profondeur, la pression moyenne et la largeur du chenal sont constantes le long de l'écoulement.

3. On suppose pour commencer que la lave reste fluide lors de l'écoulement.

(a) En appliquant le premier principe industriel, déterminer une équation différentielle sur la température $T(x)$ de la lave.

On définit le système ouvert Σ constitué de la partie du chenal située entre x et $x + \mathrm{d}x$. Ce système, en régime permanent, satisfait le premier principe industriel $D_m \Delta h = h(x + \mathrm{d}x) - h(x) = \mathcal{P}_{\text{meca}} + \mathcal{P}_{\text{th}}$. Or la puissance mécanique fournie à la lave est ici nulle (à part les forces de pression qui ne doivent pas être prises en compte dans le premier principe industriel), et on négligera la variation d'énergie potentielle. Enfin la puissance thermique perdue est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \sigma T(x)^4 \times W \mathrm{d}x$$

Et on a :

$$h(x + \mathrm{d}x) - h(x) = c_p(T(x + \mathrm{d}x) - T(x)) = c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x$$

Par ailleurs on a vu que $D_m = \rho W dv$. On conclut que :

$$\boxed{\rho c_p dv \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \sigma T(x)^4 = 0}$$

(b) En déduire la température T_m de la lave au niveau de la mer.

Cette équation se réécrit, après séparation des variables et multiplication par -3 :

$$-3T^{-4}\mathrm{d}T = \frac{3\sigma}{\rho c_p dv} \mathrm{d}x$$

On intègre entre le cratère ($x = 0$) et la mer ($x = L = 15\,\mathrm{km}$) :

$$\frac{1}{T_m^3} - \frac{1}{T_0^3} = \frac{3\sigma L}{\rho c_p dv}$$

Ainsi :

$$T_m = \left(\frac{1}{T_0^3} + \frac{3\sigma L}{\rho c_p dv} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

L'application numérique donne $\boxed{T_m = 986°\mathrm{C}}$. (Attention à bien convertir les Celsius en Kelvins pour appliquer la formule, puis à reconvertir le résultat en Celsius !)

(c) Commenter la validité de l'hypothèse d'une lave qui reste entièrement fluide.

On constate sur la figure 3 que à une température de 1100°C la lave est déjà cristallisée à 60 %, donc une fraction encore bien plus importante est cristallisée à la température de 986°C. Autrement dit, dans le cas de notre modèle, la lave

se solidifie presque complètement avant d'atteindre la mer ce qui signifie que la coulée de lave n'est pas capable d'arriver jusqu'à la mer. L'hypothèse initiale n'est pas valide, et il faut prendre en compte les effets de la solidification de la lave.

4. On souhaite désormais prendre en compte la solidification de la lave au cours de l'écoulement.

   (a) A partir de la figure 3, proposer une loi empirique la plus simple possible qui relie la fraction $\alpha(T)$ de lave cristallisée à la température T de la lave.

   Lors de la solidification de la lave, on constate que le pourcentage de lave semble être linéaire en fonction de la température. Il est nul pour une température proche de T_0 et on a $\alpha \approx 0.5$ pour une diminution de température de 40°C. On pourra donc supposer que :

   $$\boxed{\alpha(T) = \beta(T_0 - T) \qquad \text{avec} \qquad \beta \approx \frac{0.5}{40} = 0.0125\,\mathrm{K}^{-1}}$$

   (b) Reprendre le calcul de la question précédente en prenant en compte l'effet de solidification de la lave.

   Il faut désormais prendre en compte le fait que entre x et $x + \mathrm{d}x$ une partie de la lave se solidifie :

   $$h(x+\mathrm{d}x) - h(x) = (\alpha(T(x+\mathrm{d}x)) - \alpha(T(x)))(h_{\text{solide}} - h_{\text{liquide}}) + c_p(T(x+\mathrm{d}x) - T(x))$$

   Or par définition de l'enthalpie massique de fusion $h_{\text{solide}} - h_{\text{liquide}} = -\ell_f$. Et on a :

   $$\alpha(T(x+\mathrm{d}x)) - \alpha(T(x)) = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}T}(T(x+\mathrm{d}x) - T(x)) = -\beta(T(x+\mathrm{d}x) - T(x))$$

   On retrouve alors :

   $$h(x+\mathrm{d}x) - h(x) = (c_p + \beta\ell_f)(T(x+\mathrm{d}x) - T(x))$$

   Tous les autres phénomènes physiques restent inchangés et on observe que prendre en compte la solidification de la lave revient simplement à remplacer la capacité thermique c_p par une capacité thermique équivalent plus grande $c_p' = c_p + \beta\ell_f$. On obtient donc comme résultat :

   $$T_m = \left(\frac{1}{T_0^3} + \frac{3\sigma L}{\rho(c_p + \beta\ell_f)dv}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

   L'application numérique donne alors $\boxed{T_m = 1095°\mathrm{C}}$. On peut remarquer que désormais, la lave arrive à la mer solidifiée à 60 %, il reste donc 40 % de liquide et la lave peut bien s'écouler jusqu'à la mer (même si l'écoulement est probablement plus lent lors de cette seconde phase, ce que nous n'avons pas pris en compte).

5. En réalité, on observe la formation de tunnels de lave : la lave ne cristallise qu'à la surface de la coulée et forme une croûte protectrice, de température $T_c = 150°\text{C}$ (mesurée sur des coulées de lave contemporaines). Calculer, dans ces conditions la température de la lave lorsque celle-ci arrive au bord de la mer. Expliquer pourquoi, dans un tube de lave où la croûte forme un toit, la lave peut s'écouler sur de longues distances.

Dans ce cas, la puissance thermique perdue par l'élément de surface est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = \sigma T_c^4 \times W \mathrm{d}x$$

Et on a désormais l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\rho(c_p + \beta\ell_f)dv\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} + \sigma T_c^4 = 0}$$

Comme T_c est une constante, l'intégration est bien plus rapide et on trouve :

$$\boxed{T_0 - T_m = \frac{\sigma L T_c^4}{\rho(c_p + \beta\ell_f)dv} = 0.2\,\text{K}}$$

Autrement dit la différence de température de la lave entre le haut et le bas du tunnel de lave est négligeable : ceci s'explique par le fait que la croûte de lave forme une chouche isolante. La lave peut donc s'écouler sur de longues distances. Notre modèle est cependant très simplifié : en réalité, la croissance de la croûte de lave consomme de l'énergie thermique, qui va être prélevée à la coulée de lave à l'intérieur. On aura donc nécessairement une variation de température plus importante que celle que nous avons calculée ici.

Données :

- Masse volumique de la lave $\rho = 2.6 \cdot 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- Capacité thermique massique de la lave $c_p = 10^3\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- Enthalpie massique de fusion de la lave $\ell_f = 200\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

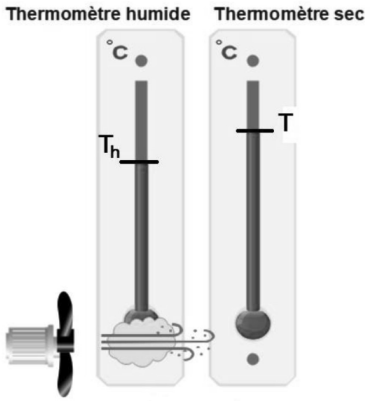
III - Systèmes ouverts et thermochimie

10 Mesure de l'humidité de l'air ★★

Un capteur d'humidité est constitué de deux thermomètres et permet de mesurer :

- la température dite sèche de l'air notée T (température habituelle).
- la température humide de l'air notée T_h obtenue par la mesure, à l'aide d'un bout de tissu enveloppé sur l'élément de mesure (bulbe), imbibé d'eau et ventilé pour provoquer l'évaporation de cette eau.

Ces deux mesures permettent de définir les caractéristiques de l'air humide.



Dans toute la suite, on note P_v la pression partielle en vapeur d'eau. On notera δ le rapport entre les masses molaires de l'eau et de l'air : $\delta = \dfrac{M_{\mathrm{H_2O}}}{M_{\mathrm{air}}}$.

1. On note $K^\circ(T)$ la constante de réaction $\mathrm{H_2O\,(l) = H_2O\,(g)}$.

   (a) Montrer qu'à l'équilibre, la pression partielle en vapeur d'eau est fixée à une valeur $P_{\mathrm{sat}}(T)$ qui ne dépend que de la température. Dans ces conditions, on dit que l'air est saturé en humidité.

   Le quotient réactionnel de cette réaction s'écrit $Q = \dfrac{P_v}{P^\circ}$. A l'équilibre, il est égal à la constante d'équilibre, ainsi :

   $$P_v = P_{\mathrm{sat}}(T) = K^\circ(T)P^\circ$$

   (b) En déduire que dans l'air, la pression partielle en vapeur d'eau ne peut jamais excéder cette valeur : il existe une quantité maximale d'eau que l'air peut contenir.

   Si jamais $P_v > P_{\mathrm{sat}}(T)$, alors $Q > K^\circ(T)$ et la réaction évolue dans le sens indirect ; la vapeur d'eau va se liquéfier et former un nuage (du brouillard si on se trouve près du sol).

   (c) Pourquoi peut-on souvent observer une pression partielle inférieure à $P_{\mathrm{sat}}(T)$? Nommer ce phénomène chimique.

   Lorsqu'il fait beau, il n'y a pas de nuages donc il n'y a plus d'eau disponible pour être évaporée dans l'air. Dans ce cas, on dit qu'il y a rupture d'équilibre : la réaction est totale, toute l'eau liquide a été consommée, mais on est toujours hors équilibre à la fin de la réaction.

On définit le taux d'humidité absolu dans l'atmosphère par $q_v = \dfrac{m_v}{m_{\text{air}}}$ et l'humidité relative $x = \dfrac{m_v}{m_{v,\max}}$ où $m_{v,\max}$ est la masse maximale de vapeur d'eau pouvant être contenue dans une masse m_{air} à la température T. q_v est typiquement de l'ordre de 0.03.

2. On cherche à relier le taux d'humidité aux pressions partielles.

   (a) Exprimer q_v en fonction de P, P_v et δ.

   $$q_v = \frac{m_v}{m_{\text{air}}} = \frac{M_{H_2O}}{M_{\text{air}}} \cdot \frac{n_v}{n_{\text{air}}} = \delta \frac{n_v}{n_{\text{tot,gaz}} - n_v} = \delta \frac{P_v}{P - P_v}$$

   où on a utilisé la loi de Dalton qui relie la pression partielle d'un gaz et sa fraction molaire.

   (b) En déduire que le taux d'humidité absolu de l'air saturé est donné par :

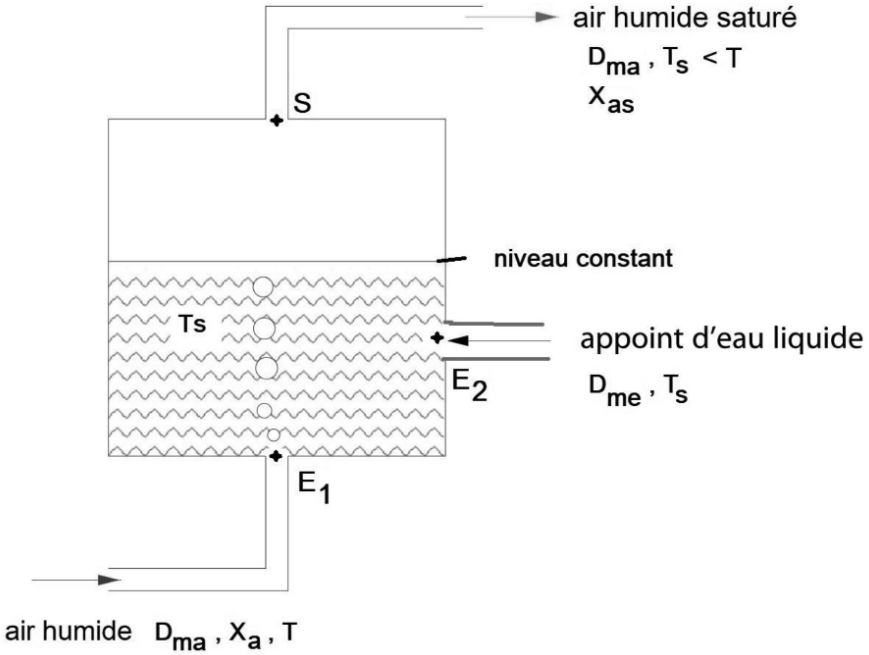
   $$q_{v,\text{sat}} = \frac{\delta}{\frac{P}{P_{\text{sat}}} - 1} \tag{10}$$

   Pour l'air saturé, on a simplement $P_v = P_{\text{sat}}(T)$. On obtient effectivement le résultat demandé en effectuant le remplacement dans la formule obtenue en question précédente.

   (c) Exprimer x en fonction de q_v, P, P_{sat} et δ.

   $$x = \frac{m_c}{m_{\text{air}}} \cdot \frac{m_{\text{air}}}{m_{v,\text{sat}}} = \frac{q_v}{q_v, \text{sat}} = \boxed{\frac{q_v}{\delta}\left(\frac{P}{P_{\text{sat}}} - 1\right)}$$

Dans toute la suite, on modélise l'appareil de mesure par le système simplifié et idéalisé de la Figure 4. Toutes les transformations sont supposées être isobares, à la même pression P. De l'air humide, au taux absolu q_v, à la température T est injecté dans un récipient calorifugé contenant de l'eau pure à température constante T_s : ce récipient modélise le bulbe du thermomètre recouvert d'un tissu humide.



Cet air humide va par conséquent se saturer en eau et aura un taux d'humidité absolu $q_{v,\text{sat}}$ en sortie.

Pour maintenir constant le niveau d'eau, on injecte de l'eau liquide pure à la même température T_s avec un débit massique $D_{m,e}$. On note $D_{m,a}$ le débit massique d'air sec à l'entrée qui sera donc identique au débit massique d'air sec en sortie du système, par conservation de la quantité d'air sec.

3. (a) Exprimer le débit massique de vapeur d'eau entrant en A, noté par $D_{m,v,e}$ en fonction de q_v et de $D_{m,a}$.

On note $\mathrm{d}m_{v,e}$ la masse de vapeur d'eau entrant pendant $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}m_{a,e}$ la masse d'air entrant pendant $\mathrm{d}t$, alors par définition de q_v on a $\mathrm{d}m_{v,e} = \mathrm{d}m_{a,e}$. En divisant par $\mathrm{d}t$ on trouve $\boxed{D_{m,v,e} = q_v D_{m,a}}$.

(b) Effectuer ensuite un bilan de matière, uniquement sur l'eau, en régime permanent, et en déduire une relation simple entre $q_v, q_{v,\text{sat}}, D_{m,a}$ et $D_{m,e}$.

On a de la même manière, en sortie du système $D_{m,s,e} = q_{v,\text{sat}} D_{m,a}$. Or par conservation de la masse d'eau dans le système, et on notant $\mathrm{d}m_{l,e}$ la masse d'eau liquide entrant pendant $\mathrm{d}t$ et $\mathrm{d}m_{v,s}$ la masse de vapeur d'eau sortant pendant $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}m_{v,e} + \mathrm{d}m_{l,e} = \mathrm{d}m_{v,s}$$

On divise par $\mathrm{d}t$:

$$D_{m,v,e} + D_{m,e} = D_{m,v,s}$$

Ou encore, après avoir réinjecté les relations précédentes :

$$\boxed{D_{m,e} = (q_{v,\text{sat}} - q_v) D_{m,a}}$$

4. On cherche désormais à établir la relation qui permet de mesurer le taux d'humidité en fonction de la différence de température.

   (a) A partir du premier principe industriel, et sous des hypothèses à justifier, montrer que l'humidité de l'air peut se mettre sous la forme :

   $$q_v = \frac{A q_{v,\text{sat}} - B(T - T_s)}{A + D(T - T_s)} \tag{11}$$

   où l'on explicitera les constantes A, B et D en fonction de T_s, des capacités thermiques massiques de l'air c_a, de l'eau c_l et de la vapeur d'eau c_v, et de l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau ℓ_v.

On considère le système ouvert constitué du récipient calorifugé. Le récipient étant calorifugé et ne contenant pas de pièce mobile, il n'y a aucun transfert thermique ou travail mécanique utile. Le premier principe industriel s'écrit donc, en séparant bien toutes les entrées et sortie et en utilisant l'écritue en termes de puissance :

$$D_{m,a}(h_{a,s} - h_{a,e}) + D_{m,v,e}(h_{v,s} - h_{v,e}) + D_{m,e}(h_{v,s} - h_{l,e}) = 0$$

Il faut désormais exprimer la variation d'enthalpie massique sue nous allons séparer en trois contributions :

- Celle de l'air sec, qui est refroidi de T à T_s :

$$h_{a,s} - h_{a,e} = c_a(T_s - T)$$

- Celle de la vapeur d'eau entrant en E1, qui est refroidie de T à T_s :

$$h_{v,s} - h_{v,e} = c_v(T_s - T)$$

- Celle de l'eau liquide qui ne change pas de température mais s'évapore :

$$h_{v,s} - h_{l,e} = \ell_v$$

On obtient alors en réutilisant les résultats des deux questions précédentes pour exprimer les débits, puis en simplifiant par $D_{m,a}$:

$$c_a(T_s - T) + q_v c_v(T_s - T) + (q_{v,\text{sat}} - q_v)\ell_v = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{q_v = \frac{\ell_v q_{v,\text{sat}} - c_a(T - T_s)}{\ell_v + c_v(T - T_s)}}$$

Ce qui correspond à la forme demandée par l'énoncé avec $A = \ell_v$, $B = c_a$ et $D = c_v$.

(b) En prenant par exemple $T = 30°\text{C}$ et $T - T_s = 10°\text{C}$, comparer les ordres de grandeur des différents termes et justifier que :

$$q_v \approx q_{v,\text{sat}} - \frac{c_a}{\ell_v}(T - T_s) \tag{12}$$

On peut remarquer que $A \sim 10^6\,\text{J·kg}^{-1}$; $q_v \sim q_{v,\text{sat}} \sim 10^{-2}\,\text{J·kg}^{-1}$ et $D(T-T_s) \sim B(T-T_s) \sim 10^4\,\text{J·kg}^{-1}$. Ainsi les deux termes sont comparables au numérateur, mais au dénominateur on aura $c_v(T-T_s) \ll \ell_v$. On en déduit :

$$\boxed{q_v \approx q_{v,\text{sat}} - \frac{c_a}{\ell_v}(T - T_s)}$$

5. (a) Faites désormais l'expérience chez vous : relevez la température T avec un thermomètre, puis enveloppez le bulbe du thermomètre dans une chaussette humide. Assurez-vous que le thermomètre est à l'ombre, dans un lieu exposé au vent (ou à défaut devant un ventilateur). Bien attendre que l'équilibre thermique s'établisse (cela peut prendre dix à vingt minutes) et relever la température T_m.

Le samedi 6 octobre à 7h30 aux Abymes, je mesure $T = 27.5°\text{C}$ et $T_m = 25°\text{C}$. Météo France indique $T = 27.3°\text{C}$ à l'aéroport, la mesure de température semble donc correcte.

(b) Réaliser une estimation de $q_{v,\text{sat}}$. Pour cela, on pourra calculer la pression de vapeur saturante à partir de la température T ici : `www.engineeringtoolbox.com/water-vapor-saturation-pressure-d_599.html`

Pour $T = 27.5°\text{C}$ on trouve $P_{\text{sat}}(T) = 0.0368\,\text{bar}$. On en déduit $q_{v,\text{sat}} = \dfrac{\frac{18}{29}}{\frac{1}{0.0368} - 1} = 0.0237$.

(c) En déduire une mesure de q_v puis de x.

En appliquant la formule obtenue en question précédente, on trouve $q_v = 0.0226$, alors $x = q_v/q_{v,\text{sat}} = 0.9 = 90\,\%$. (Il est normal de trouver une valeur beaucoup plus faible si vous avez fait la mesure en fin de matinée ou dans l'après midi.)

(d) Comparer à la valeur mesurée en direct par Météo-France sur `https://www.meteociel.fr/temps-reel/obs_villes.php?code2=97101015`. Vous pouvez sélectionner la station la plus proche de chez vous dans le menu déroulant et regarder la dernière mesure d'humidité dans le tableau de valeurs. Attention, l'heure indiquée est en UTC (4 heures de décalage horaire avec la Guadeloupe). Commenter.

Météo-France indique une humidité relative de 83 %, la différence est probablement due aux variations locales d'humidité (en l'occurence, ici, la mesure a été faite dans un lieu couvert avec des arbres à proximité alors que la station Météo-France se situe à l'aéroport).

11 Fonctionnement d'une centrale thermique ★★★

La centrale électrique DK6, sur le site du port industriel de Dunkerque (Hauts-de-France), produit de l'énergie électrique à partir de gaz naturel. De par sa conception et sa situation géographique, la centrale DK6 a la particularité de pouvoir revaloriser les fumées issues de la production d'acier, émises par l'usine sidérurgique voisine Arcelor-Mittal.

On réalise la combustion de gaz naturel avec de l'air sous pression dans une turbine à gaz reliée mécaniquement à un générateur électrique de 165 MW. La chambre de combustion de la turbine à gaz est alimentée par un gazoduc qui fournit du gaz naturel avec un débit massique constant $D_{m,gn} = 10\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, sous une pression de 12 bar et une température $T_0 = 298\,\mathrm{K}$. On assimile dans la suite le gaz naturel à du méthane pur (CH_4). Le dioxygène nécessaire à la combustion est apporté par de l'air atmosphérique, comprimé sous une pression de 12 bar à la température de 298 K par un compresseur solidaire de l'axe de la turbine, avec un débit massique réglable noté $D_{m,air}$.

Le réacteur, parfaitement calorifugé, permet ainsi la combustion en continu et en régime stationnaire du méthane par le dioxygène de l'air à la pression constante de 12 bar. Les gaz issus de cette combustion sortent du réacteur à température élevée pour pouvoir faire tourner une turbine, dont le principe de fonctionnement sera étudié dans la partie suivante. Les aubes de la turbine sont recouvertes d'une fine couche de traitement en céramique qui les protège jusqu'à des températures de l'ordre de 1600°C.

1. (a) Ecrire l'équation bilan de la combustion du méthane par le dioxygène, sachant que la réaction ne produit que de l'eau et du dioxyde de carbone sous forme gazeuse. On prendra un coefficient stoechiométrique unitaire pour le méthane.

$$CH_4(g) + 2\,O_2(g) = CO_2(g) + 2\,H_2O\,(g)$$

   (b) Montrer que cette réaction est quantitative à 298 K.

On applique la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(CO_2) + 2\Delta_f H^\circ(H_2O) - \Delta_f H^\circ(CH_4) = -800\,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$$

De même :

$$\Delta_r S^\circ = S^\circ(CO_2) + 2S^\circ(H_2O) - S^\circ(CH_4) - 2S^\circ(O_2) = -4\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$$

On en déduit :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ = -8 \cdot 10^5 \,\mathrm{kJ \cdot mol^{-1}}$$

Alors :

$$K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \exp(300) \gg 1$$

La réaction est donc bien quantitative.

(c) Calculer le pouvoir calorifique inférieur (PCI) du méthane, noté q_{gn}, défini comme l'énergie thermique par unité de masse de méthane libérée par la combustion du méthane sous pression constante à 298 K.

A pression constante, on a $\Delta H = Q$, ce qui peut se réécrire :

$$Q = \Delta_r H^\circ \times \xi_f = \Delta_r H^\circ \frac{m_{\mathrm{CH_4}}}{M_{\mathrm{CH_4}}}$$

On en déduit l'énergie thermique fournie par unité de masse :

$$q_{gn} = -\frac{Q}{m_{\mathrm{CH_4}}} = -\frac{\Delta_r H^\circ}{M_{\mathrm{CH_4}}} = \boxed{5.0 \cdot 10^7 \,\mathrm{J \cdot kg^{-1}}}$$

2. Déterminer le débit massique d'air D_{m0} permettant de réaliser la réaction dans des conditions stoechiométriques, puis la puissance thermique $\mathcal{P}_{th0}$ libérée par la réaction dans ces conditions.

Pour réaliser la réaction en conditions stoechiométriques, il faut un débit massique de dioxygène $D_{\mathrm{O_2}}$ tel que :

$$\frac{D_{\mathrm{O_2}}}{M_{\mathrm{O_2}}} = 2\frac{D_{m,gn}}{M_{\mathrm{CH_4}}}$$

Cette équation traduit le fait que deux moles de dioxygène doivent entrer dans le réacteur pour une mole de méthane. De plus, l'air contient quatre fois plus de moles de diazote que de dioxygène donc :

$$\frac{D_{\mathrm{N_2}}}{M_{\mathrm{N_2}}} = 4\frac{D_{\mathrm{O_2}}}{M_{\mathrm{O_2}}} \Rightarrow D_{\mathrm{N_2}} = 4\frac{M_{\mathrm{N_2}}}{M_{\mathrm{O_2}}} D_{\mathrm{O_2}}$$

On conclut sur le débit total d'air entrant :

$$\boxed{D_{m0} = D_{\mathrm{O_2}} + D_{\mathrm{N_2}} = 2D_{m,gn}\frac{M_{\mathrm{O_2}} + 4M_{\mathrm{N_2}}}{M_{\mathrm{CH_4}}}}$$

On trouve après application numérique $\boxed{D_{m0} = 180 \,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$.

La puissance libérée est alors :

$$\boxed{\mathcal{P}_{th0} = q_{gn} D_{m,gn} = 500 \,\mathrm{MW}}$$

3. Effectuer un bilan détaillé d'enthalpie et exprimer, en fonction de q_{gn} et des données, la température des gaz en sortie de la chambre de combustion pour un débit massique d'air D_m0. Commenter la valeur obtenue.

On considère le système fermé constitué d'un mélange stoechiométrique entrant dans le réacteur. Comme il n'y a pas de travail utile dans le réacteur, et que celui-ci est calorifugé, le premier principe fournit $\Delta H = Q = 0$. Or l'enthalpie est une fonction d'état et on peut donc décomposer la transformation en deux étapes : la réaction chimique à 298 K puis un chauffage des produits et de l'azote restant. Si on note n_0 la quantité de matière de méthane on a alors :

$$\Delta H_1 = n_0 \Delta_r H^\circ$$
$$\Delta H_2 = (T_f - T_0)\left(n_0 C_{p,m}(CO_2) + 2n_0 C_{p,m}(H_2O) + 8n_0 C_{p,m}(N_2)\right)$$

car on a 8 moles de diazote pour une mole de méthane. Or $\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$ donc :

$$T_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^\circ}{C_{p,m}(CO_2) + 2C_{p,m}(H_2O) + 8C_{p,m}(N_2)}$$

Donc $T_f = 2700$ K. Cette température est bien plus élevée que la température maximale supportée par la chambre de combustion : il va falloir introduire de l'air en excès pour limiter l'augmentation de la température.

Lorsque la température de la chambre de combustion dépasse 1300°C, les constituants de l'air commencent à réagir entre eux pour produire des oxydes d'azote. Ces oxydes d'azote, essentiellement NO et NO_2, couramment appelés NOx, sont à l'origine de graves problèmes pour l'environnement et la santé.

4. On souhaite éviter la production et le rejet de NOx dans l'atmosphère.

   (a) Justifier qualitativement que l'on peut diminuer la température de sortie en modifiant le débit d'air en entrée. Expliquer pourquoi, en pratique, le débit massique $D_{m,air}$ est choisi supérieur à D_{m0}.

   Ceci permet d'augmenter la capacité thermique du mélange gazeux sans changer l'énergie totale libérée par unité de masse de méthane : on va donc réduire la température atteinte et éviter la formation d'oxydes d'azote.

   (b) Exprimer le débit molaire de chaque espèce en sortie en fonction de $D_{m,air}$, D_{m0} et des masses molaires dans le cas $D_{m,air} > D_{m0}$. On présentera les résultats dans un tableau. Les débits molaires des différentes espèces seront notés F_{CH_4}, F_{O_2} ...

On a pendant un temps dt une masse d'air qui entre dans le réacteur :

$$\begin{aligned}\delta m_{air} &= D_{m,air}\mathrm{d}t \\ &= \delta m_{\mathrm{O_2}} + \delta m_{\mathrm{N_2}} \\ &= \delta n_{\mathrm{O_2}} M_{\mathrm{O_2}} + \delta n_{\mathrm{N_2}} M_{\mathrm{N_2}} \\ &= \delta n_{\mathrm{O_2}} (M_{\mathrm{O_2}} + 4M_{\mathrm{N_2}})\end{aligned}$$

car $\delta n_{\mathrm{N_2}} = 4\delta n_{\mathrm{O_2}}$. On en déduit :

$$F_{\mathrm{O_2}}^{\text{entrant}} = \frac{D_{m,air}}{M_{\mathrm{O_2}} + 4M_{\mathrm{N_2}}} \quad ; \quad F_{\mathrm{N_2}}^{\text{entrant}} = \frac{4D_{m,air}}{M_{\mathrm{O_2}} + 4M_{\mathrm{N_2}}}$$

Par ailleurs :

$$F_{\mathrm{CH_4}}^{\text{entrant}} = \frac{D_{m,gn}}{M_{\mathrm{CH_4}}} = \frac{D_{m0}}{2M_{\mathrm{O_2}} + 8M_{\mathrm{N_2}}}$$

Le débit de dioxygène consommé, en raison de la stoechiométrie de la réaction, est alors :

$$F_{\mathrm{O_2}}^{\text{consomme}} = 2F_{\mathrm{CH_4}}^{\text{entrant}}$$

Enfin on sait que :

$$F_{\mathrm{CO_2}} = F_{\mathrm{CH_4}}^{\text{entrant}} \quad ; \quad F_{\mathrm{H_2O}} = 2F_{\mathrm{CH_4}}^{\text{entrant}}$$

et le dioxygène restant qui s'échappe est :

$$F_{\mathrm{O_2}} = F_{\mathrm{O_2}}^{\text{entrant}} - F_{\mathrm{O_2}}^{\text{consomme}}$$

On en déduit les résultats suivants :

Espèce	CO_2	H_{20}	N_2	O_2
F	$\frac{D_{m0}}{2M_{\mathrm{O_2}}+8M_{\mathrm{N_2}}}$	$\frac{D_{m0}}{M_{\mathrm{O_2}}+4M_{\mathrm{N_2}}}$	$\frac{4D_{m,air}}{M_{\mathrm{O_2}}+4M_{\mathrm{N_2}}}$	$\frac{D_{m,air}-D_{m0}}{M_{\mathrm{O_2}}+4M_{\mathrm{N_2}}}$

(c) Exprimer, puis calculer, le débit massique d'air D_{m1} permettant à la turbine à gaz de fonctionner à sa température maximale tout en évitant la production de NOx.

En reprenant les notations precédentes, pour une quantité n_0 de méthane indtruite pendant une durée Δt, on a désormais toujours $\Delta H_1' = \Delta H_1 = -\Delta_r H^\circ n_0$ mais désormais :

$$\Delta H_2' = \sum_i F_i \Delta t \times C_{p,m}(i)(T_f' - T_0)$$

Or on sait que $n_0 = \Delta t \times F_{\mathrm{CH_4}}^{\text{entrant}}$ et donc :

$$\Delta H_2' = \Delta H_3 + n_0 \frac{D_{m,air} - D_{m0}}{D_{m0}} (8C_{p,m}(\mathrm{N_2}) + 2C_{p,m}(\mathrm{O_2}))(T_f' - T_0)$$

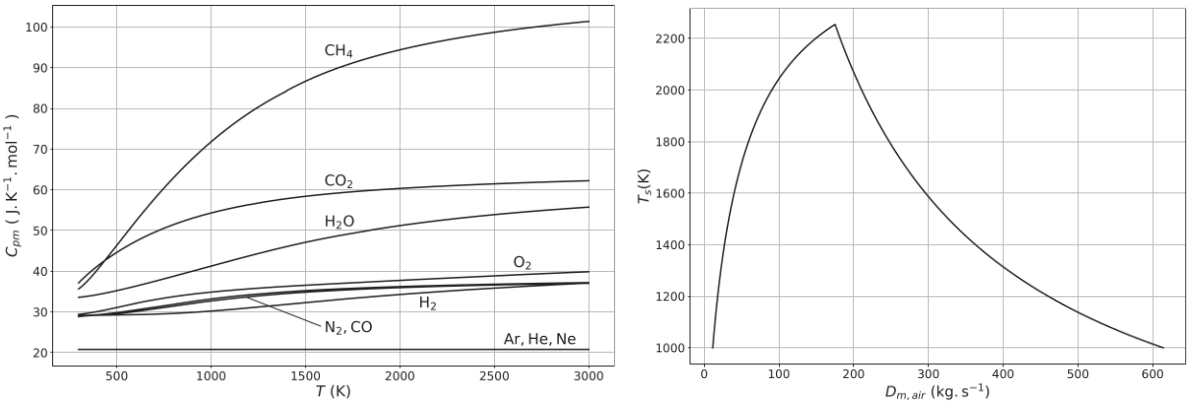


Figure 5: A gauche : capacités thermiques en fonction de la température. A droite : température de sortie T_s en fonction du débit massique d'air $D_{m,air}$ à l'entrée

Ici, ΔH_3 correspond à la variation d'enthalpie du mélange stoechiométrique, atteignant cette fois-ci la température T'_f et non pas $T_f = 2700\,\mathrm{K}$, ainsi :

$$\Delta H_3 = \Delta H_2 \times \frac{T'_f - T_0}{T_f - T_0} = -\Delta H_1 \times \frac{T'_f - T_0}{T_f - T_0}$$

Or $\Delta H'_1 + \Delta H'_2 = 0$ donc :

$$-\Delta_r H^\circ \left(1 - \frac{T'_f - T_0}{T_f - T_0}\right) = \frac{D_{m,air} - D_{m0}}{D_{m0}} (8C_{p,m}(\mathrm{N_2}) + 2C_{p,m}(\mathrm{O_2}))(T'_f - T_0)$$

Ou encore, avec $T'_f = 1600\,\mathrm{K} = 1300°\mathrm{C}$:

$$D_{m1} = D_{m0} \left[1 - \frac{T_f - T'_f}{(T_f - T_0)(T'_f - T_0)} \cdot \frac{\Delta_r H^\circ}{8C_{p,m}(\mathrm{N_2}) + 2C_{p,m}(\mathrm{O_2})}\right]$$

L'application numérique donne :

$$\boxed{D_{m1} = 345\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$$

5. Étant donné l'échauffement important des gaz dans la chambre de combustion, il faut tenir compte dans le calcul précédent de la dépendance avec la température de la capacité thermique molaire à pression constante des différents gaz (cf figure suivante). Un programme python permet de tracer le graphe de la température de sortie des gaz en fonction du débit d'air d'entrée en tenant compte de la dépendance avec la température des capacités thermiques molaires à pression constante des différents gaz.

   (a) Décrire précisément le graphe obtenu en mettant en évidence des valeurs particulières pertinentes dont on commentera le sens physique.

On observe un maximum de température pour $D_{m,air} = D_{m0}$ ce qui correspond à de l'air introduit en proportions stoechiométriques. Au-delà, l'air apporté ne réagit plus et on a une baisse de la température. En dessous de cette valeur, on n'apporte pas assez d'air pour faire réagir tout le méthane. Le maximum de température observé est moins chaud que celui qui avait été prédit en négligeant la dépendance des capacités thermiques à la température ; cela s'explique notamment par le fait que les capacités thermiques augmentent avec la température. A haute température, une même quantité d'énergie correpond donc à une augmentation de température plus faible.

(b) Déterminer la valeur réelle du débit massique d'air permettant de faire fonctionner la turbine à gaz à sa température maximale sans production de NOx et comparer cette valeur au débit massique D_{m1} trouvé précédemment.

Pour faire fonctionner la turbine à 1600 K on trouve $\boxed{D'_{m1} = 295\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}}$. Cette valeur est un peu plus faible que celle calculée précédemment pour la même raison : l'augmentation des capacités thermiques avec la température contribue à limiter la hausse de température dans le réacteur, il n'y a donc pas besoin d'introduire autant d'air que ce qui avait été calculé.