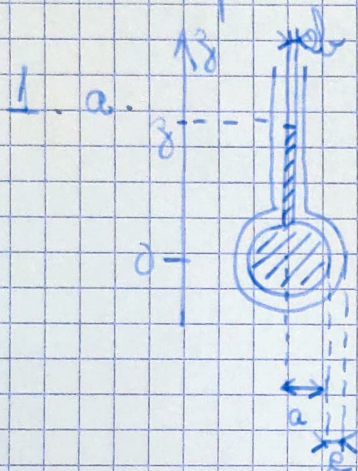


Corrigé - TD 7

Thermodynamique des systèmes ouverts

I - Principes infinitésimaux

1 - Temps de réponse d'un thermomètre



Lorsque le mercure chauffe, il se dilate et le niveau augmente dans le cylindre.

b. On a : $\Delta V = V \times \alpha \cdot \Delta T$

Or : $\Delta V = \pi b^2 \Delta z$ et $V = \frac{4}{3} \pi a^3$
(on considère que $V_{\text{cylindre}} \ll V_{\text{sphère}}$)

D'où : $\Delta z = \frac{4 \alpha \Delta T a^3}{3 b^2} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot (5 \cdot 10^{-3})^3}{3 \cdot (10^{-4})^2}$

$\Delta z = 3,3 \text{ mm}$

c. En Guadeloupe, $\Delta T_{\text{max}} = 34,2 - 13,0 = 21,2 \text{ K}$

Et : $h = \Delta z \times \Delta T_{\text{max}} = \boxed{7,0 \text{ cm}}$

2. a. On choisit le système $\Sigma = \{\text{verre} + \text{mercure}\}$

On peut supposer que le système $\{\text{cylindre}\}$ atteint très vite l'équilibre, ce qui compte c'est ce qui se passe dans la sphère.

Alors la capacité thermique est :

$$C = \rho C_p \times \frac{4}{3} \pi a^3 + \rho_v C_{p,v} \times 4 \pi a^2 \times e$$

Sait $C = 4\pi a^2 \left(\frac{\rho_{cp} a}{3} + \rho_v c_{pv} e \right)$

De plus: $P = k \times 4\pi a^2 (T_{ext} - T(t))$ où $T(t)$ est la température du thermomètre.

Entre t et $t+dt$ le thermomètre ne subit pas de travail donc $dU = \delta Q = P dt$

Or $dU = C \cdot dT$

D'où: $C dT = P dt \Rightarrow C \frac{dT}{dt} = P$

$\Rightarrow 4\pi a^2 \left(\frac{\rho_{cp} a}{3} + \rho_v c_{pv} e \right) \frac{dT}{dt} + k \cdot 4\pi a^2 (T - T_{ext}) = 0$

$\Rightarrow \tau \frac{dT}{dt} + T = T_{ext}$

C'est une équation d'ordre 1, l'équilibre est atteint au bout de

$t_{eq} = 3\tau = \frac{\rho_{cp} a + 3\rho_v c_{pv} e}{k}$

AN: $\tau = \frac{(13,5 \cdot 10^3) \times 139 \times 5 \cdot 10^{-3} + 3 \times (2,5 \cdot 10^{-3}) \times 840 \times 2 \cdot 10^{-3}}{50}$

$\tau = 440 s = 7 \text{ min } 20 s$ avec du vent

$\tau = 4400 s = 1 \text{ h } 13 \text{ min}$ sans vent

3. Tête de mort $\Leftrightarrow$ mortel par inhalation (en quelques minutes, mais, au jour après l'exposition)

2^e pictogramme $\Rightarrow$ peut nuire au fœtus et effets graves pour les organes (ex: cancérogène)

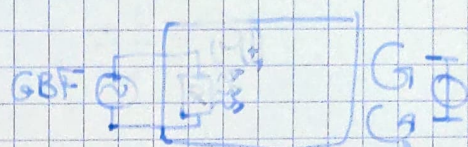
3^e pictogramme $\Rightarrow$ très toxique pour les organismes aquatiques

* Il y a un risque d'exposition ponctuelle au produit si le thermomètre se casse, ce qui peut être mortel pour des enfants s'ils inhalent ensuite le mercure.

* Il y a un risque que les consommateurs jettent leur thermomètre dans une poubelle, électrique, ce qui a des effets graves sur la biodiversité.

2 - Mesure d'une capacité thermique

On a un échantillon :



1. Si on soumet l'échantillon à une tension alternative $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ à travers une résistance R :
- $$P(t) = \frac{U^2}{R} = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = \frac{U_0^2}{2R} (1 + \cos(2\omega t))$$

On obtient bien la forme souhaitée en choisissant $\omega = \frac{\omega}{4\pi}$.

2. On applique le 1^{er} principe infinitésimal à l'échantillon entre t et $t+dt$:
- $$dU = \delta W + \delta Q$$
- $$\text{Or } dU = C dT \quad \delta W = P(t) dt \quad \delta Q = -\Phi dt$$

D'où :

$$C \frac{dT}{dt} = P(t) - \Phi(t)$$
$$= P_0(1 + \cos \omega t) - K(T - T_0)$$

3. On note $\Theta = T - T_0$, alors $C \frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = P_0(1 + \cos \omega t)$

On écrit $\Theta(t) = F(t) e^{-t/\tau}$ où $\tau = \frac{C}{K}$.

Alors : $\frac{C}{K} \frac{d\Theta}{dt} = \tau F'(t) e^{-t/\tau} - F(t) e^{-t/\tau}$

D'où : $\frac{C}{K} \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = \tau F'(t) e^{-t/\tau} = \frac{P_0}{K} (1 + \cos \omega t)$

Soit $F'(t) = \frac{P_0}{K\tau} (1 + \cos \omega t) e^{t/\tau}$

Or $F(t=0) = 0$.

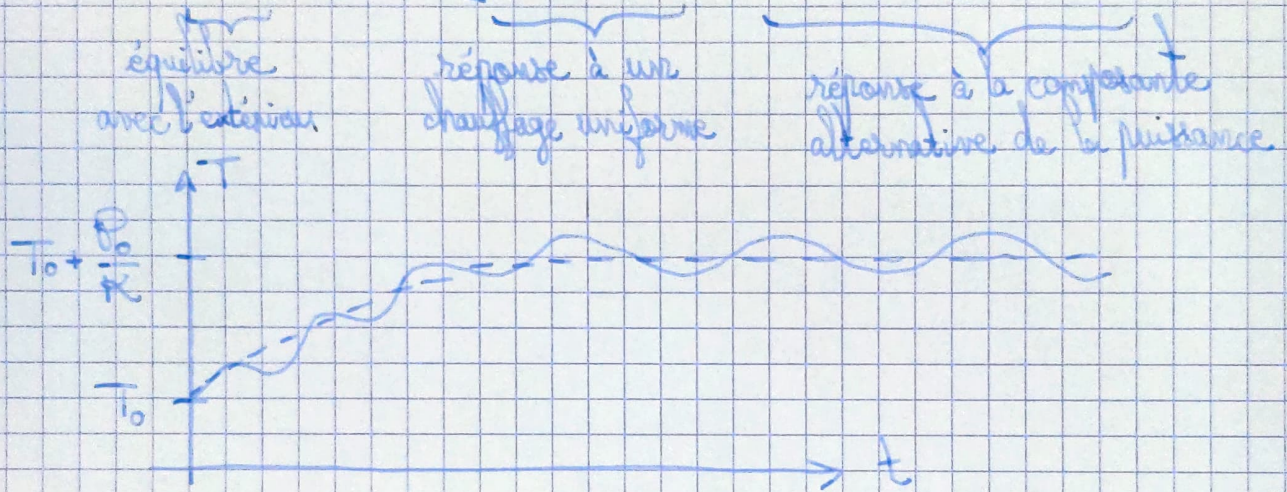
Donc $F(t) = \int_0^t \frac{P_0}{K\tau} (1 + \cos \omega t') e^{t'/\tau} dt'$

$$= \frac{P_0}{K} (e^{t/\tau} - 1) + \int_0^t \frac{P_0}{K\tau} \operatorname{Re} \left[e^{t'(\frac{1}{\tau} + i\omega)} \right] dt'$$
$$= \frac{P_0}{K} (e^{t/\tau} - 1) + \frac{P_0}{K} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{t(\frac{1}{\tau} + i\omega)} - 1}{\frac{1}{\tau} + i\omega} \right]$$

$$\text{Et } \Theta(t) = \frac{P_0}{K} \left(1 + \frac{\cos(\omega t) + \omega C \sin(\omega t)}{1 + (\omega C)^2} \right) - \frac{P_0}{K} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(1 + \frac{1}{1 + (\omega C)^2} \right)$$

On a bien $\Theta(t=0) = 0$ et :

$$T(t) = T_0 + \frac{P_0}{K} \left[\underbrace{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}}_{\text{réponse à un chauffage uniforme}} + \underbrace{\frac{\cos(\omega t) + \omega C \sin(\omega t) - e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + (\omega C)^2}}_{\text{réponse à la composante alternative de la puissance}} \right]$$



4. $\tau = \frac{C}{K}$ d'après les calculs précédents.

5. En régime permanent ($t \gg \tau$):

$$T(t) = T_0 + \frac{P_0}{K} \left(\frac{1 + \cos(\omega t) + \omega C \sin(\omega t)}{1 + (\omega C)^2} \right)$$

La composante alternative a une amplitude A telle que:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{2} &= \langle (T - \langle T \rangle)^2 \rangle = \left\langle \left(\frac{P_0}{K} \right)^2 \frac{\cos^2(\omega t) + \omega^2 C^2 \sin^2(\omega t) + 2\omega C \cos \sin}{(1 + (\omega C)^2)^2} \right\rangle \\ &= \left(\frac{P_0}{K} \right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1 + \omega^2 C^2}{(1 + (\omega C)^2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Soit } A = \frac{P_0}{K} \times \frac{\sqrt{1 + \omega^2 C^2}}{1 + \omega^2 C^2} = \frac{P_0}{K \sqrt{1 + \omega^2 C^2}}$$

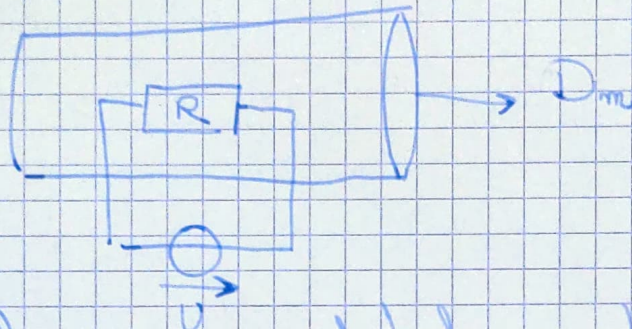
$$\text{D'où : } 1 + \omega^2 \cdot \left(\frac{C}{K} \right)^2 = \left(\frac{P_0}{KA} \right)^2$$

Si on trace $\left(\frac{P_0}{KA} \right)^2$ en fonction de ω^2 on trouve C par un ajustement linéaire.

II - Machines thermiques et systèmes ouverts

3 - Calorimétrie par effet Joule

1.



On applique le 1^{er} principe industriel au système ouvert {tube + résistance} : $\Delta h = w + q$

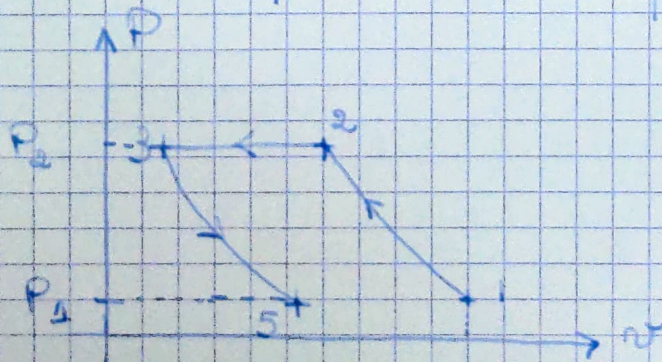
$$w = \frac{\delta W / \delta t}{\delta m} = \frac{P_{elec}}{D_m} = \frac{U^2}{R D_m} \quad (q = 0 \text{ (on suppose le cylindre calorifugé)})$$

$$\text{Et } \Delta h = C \Delta T \text{ (phase condensée)} \\ \Rightarrow C \Delta T = \frac{U^2}{R D_m} \Rightarrow C = \frac{U^2}{R D_m \Delta T}$$

2. Pour améliorer la précision de la mesure, il faut augmenter ΔT donc choisir D_m faible (mais pas trop faible pour qu'on puisse toujours négliger les transferts thermiques à travers les parois).

4 - Moteur à réaction

1. Phase 1 $\rightarrow$ 2 : compression adiabatique $P v^\gamma = c^{ste}$
 2 $\rightarrow$ 3 : isobare $P = c^{ste}$
 3 $\rightarrow$ 5 : détente adiabatique $P v^\gamma = c^{ste}$ (si réversible)



2. La vitesse du gaz est négligeable en 4.

On applique le 1^{er} principe industriel entre 4 et 5:

$$e_c + h_5 - h_4 = \underbrace{w_{4 \rightarrow 5}}_{=0 \text{ (pas de particulaire)}} + \underbrace{q_{4 \rightarrow 5}}_{=0 \text{ (adiabatique)}}$$

Or: $h_5 - h_4 = \frac{1}{m} \times C_p (T_5 - T_4)$ capacité thermique totale $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}$

masse de gaz $\rightarrow$

$$= \frac{1}{m} \times \frac{nR\gamma}{\gamma-1} (T_5 - T_4)$$

$$= \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_5 - T_4)$$

D'où:

$$e_c = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_4 - T_5)$$

3. La transformation $3 \rightarrow 5$ est adiabatique réversible donc $PV^\gamma = c^{ste}$ or $PV \propto T \propto V \propto \frac{1}{P}$ et: $P^{1-\gamma} T^\gamma = c^{ste}$

Ainsi: $P_3^{1-\gamma} T_3^\gamma = P_5^{1-\gamma} T_5^\gamma$

Soit $T_5 = T_3 \times \left(\frac{P_5}{P_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \times \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \boxed{820 \text{ K}}$

De même $1 \rightarrow 2$ est adiabatique réversible

$$T_2 = T_1 \times \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \boxed{459 \text{ K}}$$

4. On a $w_{12} = -w_{34}$ (compensation exacte)

Donc, comme les deux étapes sont adiabatiques:

$$h_2 - h_1 = w_{1 \rightarrow 2} = -w_{3 \rightarrow 4} = h_3 - h_4$$

(on applique à faire le 1^{er} principe industriel)

Or pour un gaz parfait: $\Delta h = C_p \Delta T$ et C_p est une constante

Ainsi: $C_p(T_2 - T_1) = C_p(T_3 - T_4)$

Donc: $T_4 = T_3 + T_1 - T_2 = \boxed{1130 \text{ K}}$

5. $e_c = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_4 - T_5) \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2R\gamma}{M(\gamma-1)} (T_4 - T_5)} = \boxed{570 \text{ m.s}^{-1}}$

5 - Cyclane tropical

1. a. le cycle est composé de :

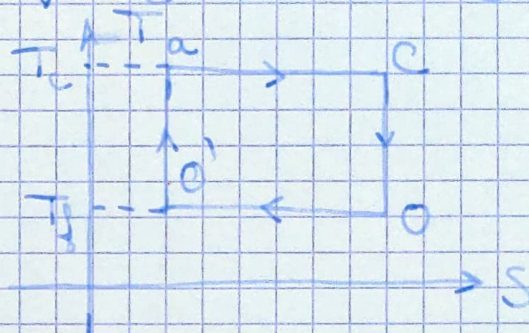
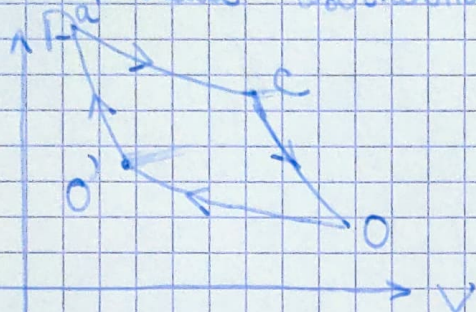
* deux adiabatiques réversibles

$$PV^\gamma = c^{ste} \quad S = c^{ste}$$

* deux isothermes

$$PV = c^{ste}$$

$$T = c^{ste}$$



C'est un cycle de Carnot.

b. On a $Q_c \geq 0$, $Q_f \leq 0$: le cyclane transporte de l'énergie de la source chaude vers la source froide. Il la convertit en énergie mécanique qui produit les vagues.

Efficacité : on a $\eta = \frac{|W|}{Q_c}$

Calculons W : le long d'une isotherme de P_1 à P_2 :

$$W = - \int p_{ext} dV = - \int p dV = - \int nRT \frac{dV}{V}$$

↑
pression statique

$$= - nRT \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Le long d'une adiabatique réversible : $pV^\gamma = p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$

$$W = - \int p dV = - \int p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = - p_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right]_1^2$$

$$= \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}) = \frac{1}{1-\gamma} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

$$= \frac{nR}{1-\gamma} (T_1 - T_2) \quad (\text{on a utilisé } p_2 V_2^\gamma = p_1 V_1^\gamma)$$

Ainsi $W_{da} = -W_{cb}$ et :

$$W_{tot} = nR \left[T_c \ln \left(\frac{V_b}{V_a} \right) + T_a \ln \left(\frac{V_d}{V_c} \right) \right]$$

De plus Q_c s'obtient par le 1^{er} principe :

$$Q_c = Q_{ac} = \underbrace{\Delta U_{ac}}_{=0 \text{ (loi de Joule)}} - W_{ac} = -nRT_c \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$$

$$= \frac{nR}{\gamma-1}$$

Or on peut remarquer que :

$$nRT_c \cdot V_c^{\gamma-1} = P_c V_c^\gamma = P_o V_o^\gamma = nRT_o V_o^{\gamma-1} \quad (1)$$

et $nRT_c V_a^{\gamma-1} = P_a V_a^\gamma = P_o V_o^\gamma = nRT_o V_o^{\gamma-1} \quad (2)$

(1) donne : $\left(\frac{V_c}{V_a}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_o}{V_o'}\right)^{\gamma-1}$ soit $\frac{V_c}{V_a} = \frac{V_o}{V_o'}$

Où encore : $\ln\left(\frac{V_o}{V_o'}\right) = -\ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$

D'où $W_{tot} = nR(T_c - T_o) \ln\left(\frac{V_a}{V_c}\right)$

Ainsi : $\eta = \frac{W_{tot}}{Q_c} = \frac{T_c - T_o}{T_c} = \left[1 - \frac{T_o}{T_c}\right]$

c. On décrit le rendement de Carnot ce qui n'est pas surprenant car le cycle est supposé réversible.

2. a. $D_m^{eau} = \frac{dm_{eau}}{dt}$ et $D_m^{air} = \frac{dm_{air}}{dt}$

Or au point C, on a une fraction massique α_v d'eau dans l'air soit $\frac{m_{eau}}{m_{air}} = \alpha_v$ ($\alpha_v \ll 1$)

D'où : $D_m = \alpha_v D_m^{air}$

b. On considère le système Σ constitué de l'air qui circule en circuit fermé dans le cyclone, et l'eau contenu dans le cyclone, qui y pénètre sous forme de vapeur et ressort sous forme de pluie. Alors :

$$\Delta h + \Delta e_p + \Delta e_f = \dot{m}_v + q$$

Ici $\Delta h = -\alpha_v \times \Delta h_{vap}$ et $q = q_g$
 proportion d'eau enthalpie de vaporisation

De plus : $\Delta e_p = 0$ pour l'eau (entre et sort à $z=0$)
 Et on peut négliger Δe_c (la vitesse de chute des gouttes de pluie est faible).

Alors : $\alpha_v \Delta h_{\text{vap}} + w + q_f = 0$.

c. le second principe industriel donne :

$$\begin{aligned} \Delta s &= s_{\text{éch}} + s_{\text{crée}} \\ &= s_{\text{éch}} \\ &= \frac{q_f}{T_c} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= 0 \text{ car les transformations sont réversibles} \end{aligned}$$

De plus : $\Delta s = -\alpha_v \times \Delta s_{\text{vap}} = -\alpha_v \times \frac{\Delta h_{\text{vap}}}{T_c}$.

Ainsi : $\frac{q_f}{T_c} = -\alpha_v \cdot \frac{\Delta h_{\text{vap}}}{T_c}$

On encaisse : $q_f = -\alpha_v \Delta h_{\text{vap}} \cdot \frac{T_f}{T_c}$.

d. Alors $-w = \alpha_v \Delta h_{\text{vap}} \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)$

Soit : $w = -\eta \cdot \alpha_v \cdot \Delta h_{\text{vap}}$ avec $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c}$.

d. On retrouve le résultat de Q1 en supprimant le cycle fermé, si on considère que la source chaude correspond à la liquéfaction de l'eau : $q_c = \alpha_v \cdot \Delta h_{\text{vap}}$.

3. a. $P_{\text{tot}} = \int \vec{F} \cdot \vec{v} dS = - \underbrace{\rho C_d v_0^3}_{\text{puissance surfacique}} \times \underbrace{\pi r_a^2}_{\text{surface d'action}}$

b. L'air qui rentre par le bord du cyclone en $r = r_a$ traverse une section $S' = 2\pi r_a \times h$

D'où : $\overline{D_m}_{\text{air}} = \rho v_0 \times 2\pi r_a h$

c. On a $w = \frac{S_w}{\dot{m}_m} = \frac{P_{\text{tot}}}{D_m} = - \frac{\rho C_d v_0^3 \pi r_a^2}{\rho v_0 \cdot 2\pi r_a h}$

On encaisse : $w = - \frac{C_d r_a v_0^2}{2h}$

2. Or on a vu que $w = -\eta \alpha_v \Delta h_{vap}$

D'où : $\frac{C_d \rho_a v_0^2}{2h} = \eta \alpha_v \Delta h_{vap}$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\eta \alpha_v \Delta h_{vap} \cdot h}{C_d \rho_a}} = \left(\frac{2 \cdot \left(1 - \frac{235}{300}\right) \cdot 3 \cdot 10^{-2} \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 50^{1/2}}{10^{-3} \cdot 10^6} \right)^{1/2}$$

AN : $v_0 = 120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 434 \text{ km} \cdot \text{hr}^{-1}$

On obtient une vitesse qui a bien l'ordre de grandeur des vents maximaux mesurés dans une cyclone.

4. a- La quantité totale d'eau qui précipite est tout simplement égale à D_m^{eau} (en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$) ainsi :

$$P = \frac{D_m^{\text{eau}}}{\pi r_a^2} = \frac{4 D_m^{\text{eau}}}{\pi r_a^2}$$

b. Or $D_m^{\text{eau}} = \alpha_v D_m^{\text{air}} = \alpha_v \cdot \rho v_0 \cdot 2\pi r_a h$

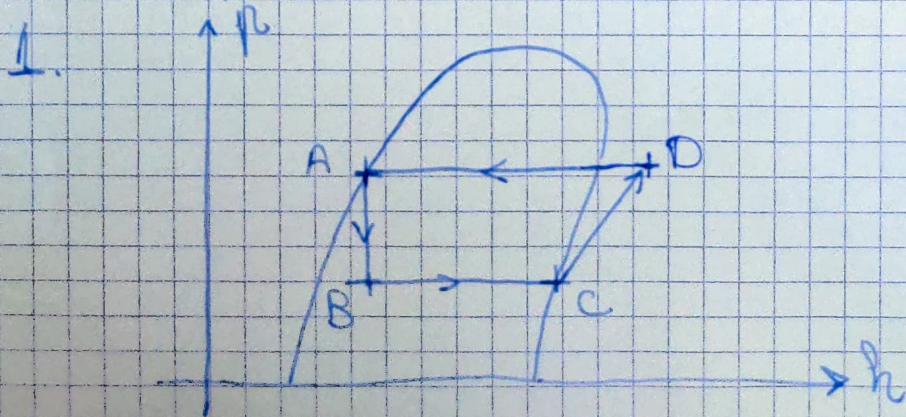
D'où : $P = \frac{8 \alpha_v \rho v_0 h}{r_a}$

c. AN : $P = 8 \times 3 \cdot 10^{-2} \times 1,2 \times 120 \times \frac{500}{10^6} = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

Soit : $P = 62 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = 62 \text{ mm} \cdot \text{hr}^{-1}$

Cette valeur est faible par rapport à ce qui a pu être mesuré même si c'est le bon ordre de grandeur, probablement parce que les précipitations les plus intenses sont très localisées.

6 - Pompe à chaleur



A : fin de l'échange avec la source chaude à $T = T_c = 20^\circ\text{C}$

A $\rightarrow$ B : détente avec $w = 0$ et $q = 0 \Rightarrow \Delta h = 0$
La détente est isenthalpe.

B $\rightarrow$ C : échange avec la source froide, vaporisation du fluide

C $\rightarrow$ D : compression jusqu'au point D repéré par les coordonnées $T = 30^\circ\text{C}$ et $p = 5,8 \text{ bar}$

D $\rightarrow$ A : échange avec la source chaude : refroidissement puis liquéfaction.

2. Oui en B $\rightarrow$ C car $T = T_f$. En D $\rightarrow$ A non car au début de la transformation $T > T_c$.

3. On a $\eta = -\frac{q_{DA}}{w_{co}}$ $\leftarrow$ chaleur apportée au logement
 $w_{co} \leftarrow$ travail fourni

Or : $\Delta h_{DA} = q_{DA} + w_{DA} = q_{DA}$
 $\leftarrow$ pas de travail sur cette partie

$\Delta h_{co} = q_{co} + w_{co} = w_{co}$
 $\leftarrow$ transformation adiabatique

D'où $\eta = -\frac{\Delta h_{DA}}{\Delta h_{co}} = 7,7$

4. Pour une pompe réversible diatherme :

$$\Delta h = w + q_c + q_f = 0 \quad (\text{circuit fermé})$$

$$\Delta s = \frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} + \underbrace{\Delta s_{crée}}_{=0 \text{ (réversible)}} = 0$$

Donc : $q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) + w = 0$ d'où $\eta_c = \frac{T_c}{T_c - T_f}$

On trouve $\eta_c = 11,7$

On a bien $\eta < \eta_c$ car il y a une phase non réversible.

7 - Chauffe-eau

Pour avoir 1L d'eau tiède il faut α L d'eau chaude et $1-\alpha$ d'eau

faible avec $\alpha T_c + (1-\alpha)T_f = T_{\text{tiède}}$

Soit $\alpha(T_c - T_f) = T_{\text{tiède}} - T_f$

$\Rightarrow \alpha = \frac{T_{\text{tiède}} - T_f}{T_c - T_f} = 0,49$

De plus on consomme un débit massique par personne :

$D_m = \underbrace{365}_{\text{j an}^{-1}} \times \underbrace{\rho_{\text{eau}}}_{10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \times (49+6+8)\alpha \times 10^{-3} \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$

$= 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{an}^{-1}$

Or : $D_m \times \Delta h = D_m(q + w_u) = q D_m = P_{\text{th}}$ nul dans un chauffe-eau (pas de partie mobile)

D'aut : $P_{\text{th}} = D_m \times \Delta h = 11,3 \times 10^3 \times c(T_c - T_f)$

Et l'énergie totale dépensée est :

$E = P_{\text{th}} \cdot \underbrace{\Delta t}_{=1 \text{ an}} = D_m \Delta t c(T_c - T_f) = 2,5 \cdot 10^9 \text{ J}$

Or $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = 1000 \times 3600 \text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$

D'aut $E = \frac{2,5 \cdot 10^9}{3,6 \cdot 10^6} = 698 \text{ kWh}$

Soit un coût de 104 €/pers/an

8 - Étude d'une tuyère

1. On choisit le système situé entre $x=0$ et x :

$\Delta h = h(x) - h(0) \quad \Delta e_c = \frac{1}{2} c(x)^2 - \frac{1}{2} c(0)^2$

$\Delta e_p = 0 \quad w = 0$ (pas de partie mobile)

et $q = 0$ (adiabatique)

Le 1^{er} principe industriel donne :

$\boxed{h(x) - h(0) = -\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2)}$

2. On a $dh = du + p dv + v dp$ au cours du mouvement du fluide

Par le premier principe : $du = \delta w + \delta q$
 $= \delta w = -p dv$

D'où : $dh = v dp$

Ainsi : $\Delta h = \int_{p(0)}^{p(x)} v dp = h(x) - h(0)$

Et : $\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) = - \int_{p(0)}^{p(x)} v dp$

3. Le gaz étant parfait, en écoulement adiabatique réversible, on a $p v^\gamma = c^{ste} = p(0) v(0)^\gamma$

D'où $v = \left(\frac{p(0)}{p} \right)^{\frac{1}{\gamma}} v(0)$

Et donc $\frac{1}{2}(c(x)^2 - c(0)^2) = - \int_{p(0)}^{p(L)} v(0) p(0)^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{dp}{p^{1/\gamma}}$

$= v(0) p(0)^{1/\gamma} \left[\frac{\gamma p^{\frac{1}{\gamma}+1}}{1-\gamma} \right]_{p(0)}^{p(L)}$

$= \frac{\gamma}{1-\gamma} [p(0) v(0) - p(L) v(L)]$

on a réutilisé $p v^\gamma = c^{ste}$

Or $p(0) v(0) = \frac{RT(0)}{M}$

$p(L) v(L) = \frac{RT(L)}{M}$

Mais $p^{-\gamma} T = c^{ste} \Rightarrow T(L) = T(0) \left(\frac{p(L)}{p(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

Et : $c(L)^2 = c(0)^2 - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \cdot \frac{RT(0)}{M} \left[\left(\frac{p(L)}{p(0)} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$

4. En régime permanent la masse contenue entre 0 et x est constante :

$\frac{dm}{dt} = D_m(x) - D_m(0) = 0$

Or : $D_m = \rho S(x) c(x) = \frac{S(x) c(x)}{v(x)}$

D'où : $\frac{dS}{S} + \frac{dc}{c} = \frac{dv}{v}$

5. On différentie le résultat de Q2 : $c dc = -v dp$

Et $p v^\gamma = c^{ste}$: $\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dv}{v} = 0$ (gaz parfait)

D'où $\frac{dv}{v} = -\gamma \frac{dp}{p} = + \frac{1}{\gamma} \frac{c dc}{p} = \frac{M c dc}{\gamma R T} = \frac{c dc}{c_{son}^2}$

D'où $\frac{dS}{S} + (1-m^2) \frac{dc}{c} = 0$

6. Il faut $\frac{dc}{c} > 0$ donc une tuyère convergente si $q < c_{son}$ ($dS < 0$) et divergente sinon.