Modèle scalaire des ondes lumineuses

Chapitre 8

Incontournables	CCINP/E3A	Mines/Centrale	X/ENS
2 - 4 - 5 - 7 - 8 - 9 - 12 - 15	1 - 6 - 10 - 16	3 - 11 - 13 - 16	3 - 13 - 14 - 16

I - Dioptres et miroirs

1 Piscine et effet loupe ★★

On considère une piscine, de profondeur h. De la brume présente au-dessus de la piscine diffuse la lumière.

1. On place une source lumineuse au fond de la piscine. On constate que la brume n'est éclairée qu'au-dessus d'un cercle centré sur la source.
   (a) Expliquer le phénomène.
   (b) Déterminer le rayon R du cercle élairé par la source.
2. On place maintenant un objet de taille L au fond de la piscine. Une personne, dont les yeux sont situés à une hauteur H au-dessus de l'eau, voit l'objet avec une taille apparente $L' > L$.
   (a) Expliquer le phénomène.
   (b) Déterminer L' dans le cadre de l'approximation des petits angles.

Données : $n_{eau} = 1.33$

2 Fibre à saut d'indice ♥★

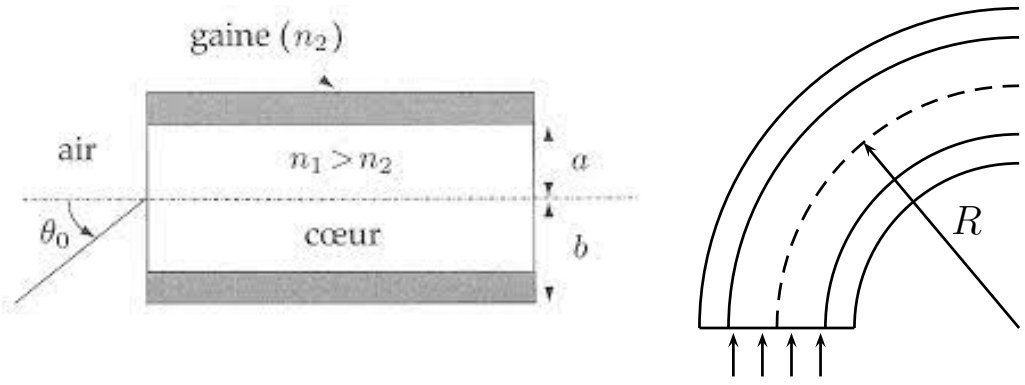
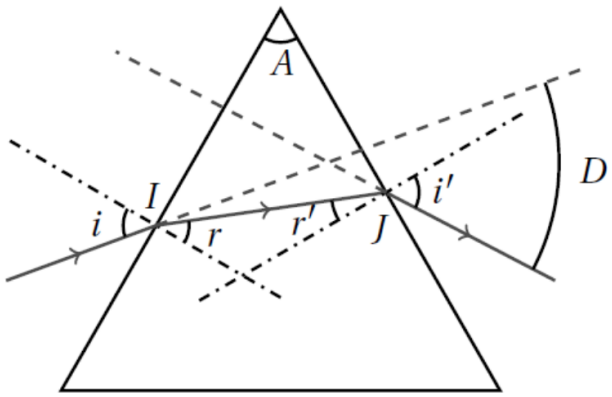


Figure 1: A gauche : fibre non courbée. A droite : fibre courbée.

On considère une fibre à saut d'indice, constituée d'un coeur en verre d'indice $n_1 = 1,66$ et de diamètre $d = 0.05\,\text{mm}$ entourée d'une gaine en verre d'indice $n_2 = 1,52$.

1. On veut savoir à quel angle maximal les rayons qui pénètrent dans la fibre y sont guidés.
   (a) Quelle condition doit vérifier l'angle d'incidence i à la surface de séparation cœur-gaine pour qu'un rayon lumineux se propage en restant confiné dans le cœur ? On note i_{lim} l'angle d'incidence limite et $\alpha_{lim} = \frac{\pi}{2} - i_{lim}$.
   (b) Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ_0 sur la face d'entrée de la fibre est inférieur à une valeur limite θ_{lim} que l'on déterminera.
2. En réalité, la fibre n'est pas toujours droite. On courbe la fibre comme sur la partie droite de la figure : elle forme une portion d'anneau de rayon de courbure R. (Ici, le rayon de courbure correspond au rayon du cercle formé par les pointillés). La fibre est éclairée par un faisceau parallèle d'angle d'incidence nul.
   (a) Une fois dans la fibre, quel est le rayon lumineux qui arrive sur l'interface cœur-gaine avec le plus petit angle d'incidence ?
   (b) Quel doit être le rayon de courbure R minimal pour que l'ensemble du faisceau lumineux soit guidé dans la fibre optique (c'est-à-dire pour qu'il y ait réflexion totale pour chacun des rayons) ?
   (c) Au vu de ce résultat, le guidage vous semble-t-il assuré dans la fibre ?

3 Prisme ★★



Un rayon incident arrivant sur un prisme d'indice n et d'angle au sommet A émerge en étant dévié d'un angle D. Le prisme est plongé dans l'air d'indice pris égal à 1.

1. Ecrire les lois de la réfraction en I et J.
2. Déterminer une relation entre r, r' et A.

3. Montrer que $D = i + i' - A$

4. La fonction $D(i)$ possède un unique minimum D_m appelé minimum de déviation du prisme. Justifier qu'au minimum de déviation $i = i'$.

5. En déduire l'expression de D_m en fonction de i et de A.

6. Montrer que :
$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \tag{1}$$

7. Le verre qui constitue le prisme est un milieu dispersif. Son indice optique dépend de la longueur d'onde suivant la loi de Cauchy : $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$ où A et B sont deux constantes positives qui dépendent du matériau. Quelle est la couleur la plus déviée par le prisme ? La moins déviée ?

4 Démonstration ondulatoire de la loi de réfraction ♥★

Une onde plane arrive avec une incidence θ sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n et n'. L'onde transmise est plane également et réfractée selon un angle θ'. On suppose $n' > n$.

1. Faire un schéma représentant deux rayons incidents, les rayons réfractés associés, et des surfaces d'onde dans chacun des milieux. On note I_1 et I_2 les points d'incidence sur le dioptre.

2. On note M_2 le point d'intersection de la surface d'onde passant par I_1 avec le rayon 2, et M_1 le point d'intersection de la surface d'onde passant par I_2 avec le rayon 1. Que dire des chemins optiques (I_1M_1) et (I_2M_2) ?

3. En déduire la loi de Snell-Descartes pour la réfraction.

II - Instruments d'optique

5 Relations de conjugaison ♥★

On considère une lentille mince.

1. Rappeler la définition des termes suivants : stigmatisme, aplanétisme, stigmatisme rigoureux, stigmatisme approché.

2. Dans quelles conditions peut-on considérer qu'une lentille mince est stigmatique ?

3. En s'appuyant sur un schéma, démontrer la relation de conjugaison de Newton (avec origine aux foyers).

4. En déduire la relation de conjugaison de Descartes (avec origine au centre optique de la lentille).

6 Appareil photographique ★

On a pris en photographie la cascade de Yellowstone. Les documents suivants indiquent le cliché, le schéma de l'appareil photo choisi, et la carte de l'emplacement d'où la photographie a été prise.

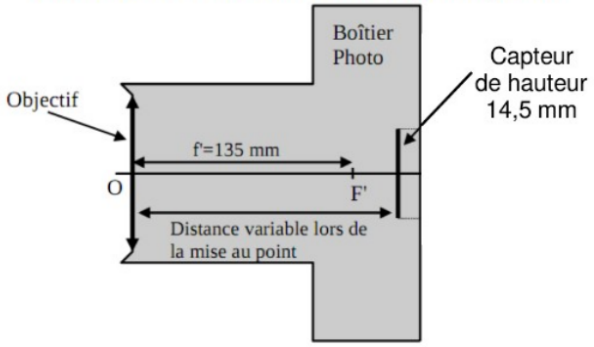
1. Estimer la hauteur de la cascade en faisant des hypothèses appropriées.

2. On note C la position du capteur pour avoir une image nette. Déterminer la distance $\Delta = \overline{F'C}$ et commenter vis-à-vis des hypothèses faites précédemment.

Document 1 : la photo !



Document 2 : modélisation de l'appareil photo.



Document 3 : capture d'écran GoogleMaps.



7 Observation de Mars ♥★

On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif (L_1) de distance focale $f'_1 = 80\,\text{cm}$, et l'oculaire (L_2) de distance focale $f'_2 = 6.0\,\text{mm}$. La lunette est réglée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

1. Déterminez la distance h entre (L_1) et (L_2). Quel est l'intérêt de cette lunette pour l'utilisateur ?

2. Représentez sur un schéma (sans respecter l'échelle) la trajectoire d'un rayon arrivant sur l'objectif avec un angle α par rapport à l'axe optique. On note α' l'angle sous lequel il émerge du système.

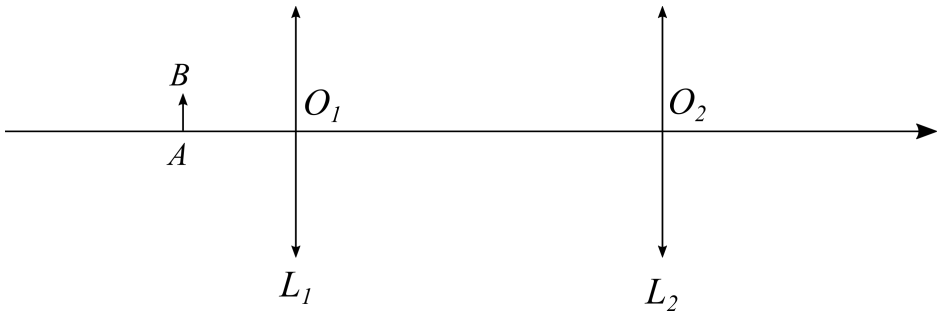
3. Déterminez le grossissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f'_1 et f'_2.

4. On estime à 30° l'angle maximal sous lequel l'observateur peut voir l'image. L'observateur peut-il voir Mars en entier dans la lunette ? Même question pour la Lune.

Données : distance Terre-Mars $D_{TM} = 7.0 \times 10^7\,\text{km}$, diamètre de Mars $d_M = 6800\,\text{km}$; distance Terre-Lune $D_{TL} = 3.8 \times 10^5\,\text{km}$, diamètre de la Lune $d_L = 3400\,\text{km}$.

8 Etude d'un microscope ♥★★

Un microscope est modélisé par un système de deux lentilles minces convergentes (voir figure ci-dessous), l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image $f'_1 = 5.0\,\text{mm}$), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2, de centre O_2 et de distance focale image $f'_2 = 5.0\,\text{mm}$). On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120\,\text{mm}$. On choisit le sens positif dans le sens



de propagation de la lumière. On rappelle enfin la relation de conjugaison d'une lentille de centre O et de focale f': $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$

1. A quelle(s) condition(s) cette relation de conjugaison est-elle valable ?

2. Si F'_1 est le foyer image de L_1 et F'_2 le foyer image de L_2, on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F'_1F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f'_1, f'_2 et D_0, puis calculer sa valeur.

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de L_1, à sa gauche, de façon que l'image $A'B'$ donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

3. En justifiant votre construction, réaliser le schéma optique du microscope en représentant un objet, son image par le microscope, l'image intermédiaire et les rayons lumineux correspondants.

4. Exprimer d en fonction de f_1' et Δ, puis calculer sa valeur.

5. Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f_1' et Δ, puis calculer sa valeur.

6. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet?

7. Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|$ où α' et l'angle sous lequel est vu l'objet après l'oculaire, et α l'angle maximum sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu à la distance D_m la plus courte possible de l'œil garantissant une vision nette.
   (a) Quelle est la valeur approximative de D_m pour un œil normal? Comment s'appelle le point correspondant?
   (b) En supposant que l'on reste dans les conditions de Gauss, exprimer G en fonction de Δ, f_1', f_2' et D_m, puis calculer sa valeur.

8. On considère comme objet un réseau constitué de fines graduations séparées de 5 μm. Peut-on distinguer ces graduations à l'œil nu ? Peut-on les observer au microscope ? Justifier les réponses à l'aide de valeurs numériques. On donne $1\,\text{rad} \approx 57°$ et $1° \approx, 7 \cdot 10^{-2}\,\text{rad}$.

III - Surfaces d'onde

9 Actions d'une lentille sur les surfaces d'onde ♥★

Pour toutes les questions suivantes, indiquer quel type de lentille utiliser, et le cas échéant où se trouve le centre de l'onde sphérique. Tracer un schéma sur lequel apparaissent les rayons lumineux et les surfaces d'onde :

1. Comment transformer une onde sphérique en onde plane ?

2. Comment transformer une onde plane en onde sphérique convergente ?

3. Comment transformer une onde sphérique divergente en onde sphérique convergente ?
4. Comment transformer une onde plane en une onde sphérique divergente ?

IV - Superposition de deux ondes

10 Flaque d'essence ♥★

Une goutte d'essence déposée sur une flaque d'eau s'étale en surface et forme une mince couche d'épaisseur e supposée uniforme. Un observateur regarde un reflet du soleil en incidence normale sur la flaque, et en se plaçant à la quasi-verticale de la flaque, il observe une teinte magenta. On rappelle que le magenta est la couleur complémentaire du vert.

1. En considérant uniquement les interférences entre une onde réfléchie sur l'interface air-huile et l'autre sur l'interface huile-eau, montrer que la condition d'interférences destructives s'écrit :
$$2n_{essence} \times e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda \tag{2}$$
avec k un entier et λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide.
2. En déduire pourquoi le reflet est coloré.
3. Estimer l'épaisseur minimale de la tache donnance cette teinte. Peut-on déterminer l'épaisseur sans ambiguïté ?

Données : $n_{\text{eau}} = 1.33$; $n_{\text{essence}} = 1.5$, $\lambda_{\text{vert}} = 500\,\text{nm}$.

11 Radar sur une falaise ★★



Figure 2: Le Barbados Cloud Observatory. Source : Institut Max-Planck de Météorologie.

Le *Barbados Cloud Observatory* est un observatoire unique au monde : situé à la pointe la plus orientale des Antilles, au sommet de la falaise de Deebles Point, il permet d'observer

les nuages d'alizé après leur longue traversée de l'Atlantique alors qu'ils ne sont pas encore perturbés par l'effet thermodynamique des îles. Nous nous intéressons à la détection d'un nuage par le radar situé à cet observatoire.

On note R la position de l'antenne, au sommet d'une falaise de hauteur $h = 30\,\text{m}$. L'antenne émet et reçoit des signaux de longueur d'onde $\lambda = 10\,\text{cm}$. Lorsqu'un nuage apparaît au-dessus de l'horizon, il réfléchit l'onde radar et peut donc être repéré par l'antenne.

Une réflexion produit une inversion du signe correspondant au signal radar, et donc un déphasage $\Delta\varphi_{\text{reflexion}} = \pi$.

La base des nuages se trouve typiquement à l'altitude $H = 500\,\text{m}$.

1. Sachant que le signal radar renvoyé par le nuage peut être réfléchi par la surface de l'océan, quel phénomène peut-on observer au niveau du radar? Faire un schéma de la situation en représentant deux rayons provenant du nuage : le premier direct et le deuxième subissant une réflexion sur l'océan.

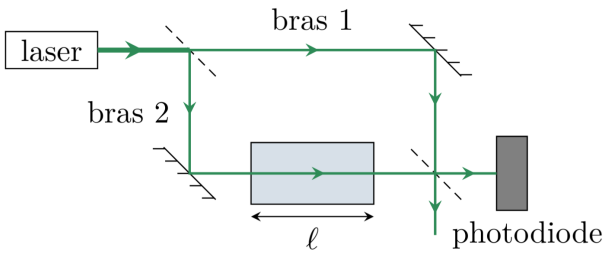
2. Exprimer la différence de marche entre les deux rayons en fonction de h, H et la distance horizontale d entre le nuage et le radar. Le radar ayant une portée de 500 km, on pourra faire une hypothèse simplificatrice.

3. Le nuage, initialement très éloigné, se rapproche de l'observatoire en raison de l'alizé. A quelles distances va-t-on enregistrer les premiers minima de signal liés à la réflexion ?

4. En réalité, en raison de processus physiques liés à la diffusion des ondes par les gouttes de pluie, l'amplitude du signal de retour direct est nettement plus importante que celle du signal de retour réfléchi : $I_{\text{direct}} \gg I_{\text{reflechi}}$. Que peut-on en déduire sur le contraste des interférences ? Les observations seront-elles perturbées ?

12 Interféromètre de Mach-Zender ♥★

Un interféromètre de Mach-Zehnder, schématisé ci-contre, est composé de deux miroirs et de deux lames semi-réfléchissantes 1, qui transmettent la moitié de l'intensité lumineuse et réfléchissent l'autre moitié. L'interféromètre est éclairé par un laser de longueur d'onde $\lambda = 532\,\text{nm}$, et une photodiode mesure l'intensité dans l'une des voies de sortie de l'interféromètre.



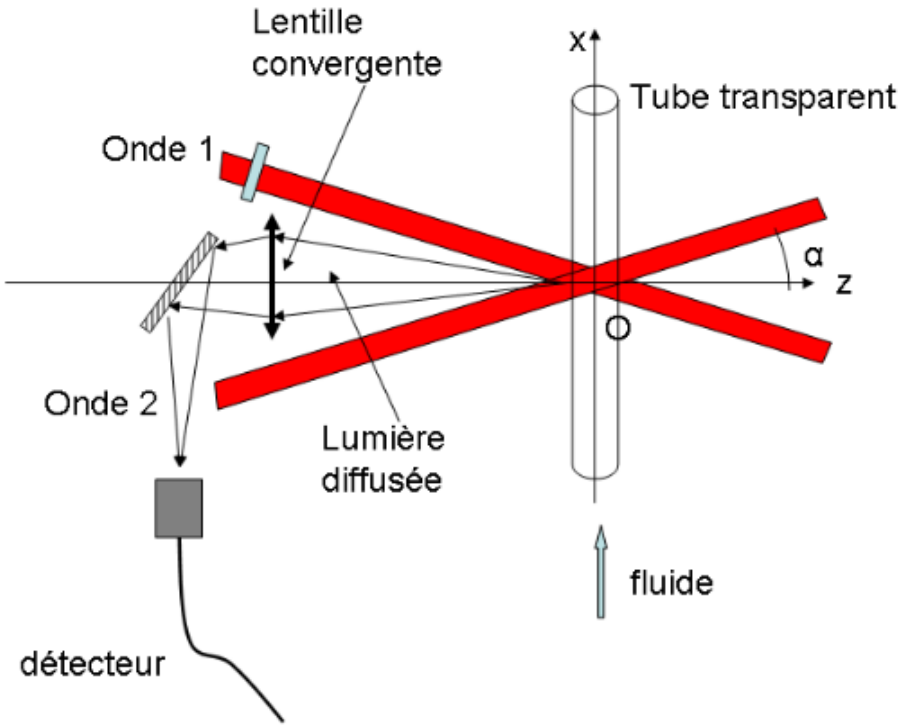
Une cuve fermée de longueur $\ell = 10.0\,\text{cm}$ est placée dans l'un des bras. Cette cuve contient initialement de l'air, d'indice optique n_{air}, progressivement remplacé par du méthane d'indice $n_{CH_4} > n_{air}$. Au cours de l'opération, la photodiode permet d'observer 32 variations successives d'intensité (clair/sombre).

1. Exprimer la différence de marche entre les deux faisceaux lorsque la cuve est remplie d'air, puis l'orsqu'elle est remplie de méthane, en fonction des longueurs géométriques L_1 et L_2 des bras de l'interféromètre.

2. En déduire l'indice optique du méthane, sachant que $n_{air} = 1 + 2.78 \times 10^{-4}$

13 Vélocimètre laser ★★

On souhaite mesurer la vitesse locale d'un fluide qui s'écoule dans un tuyau transparent. On ensemence l'écoulement avec des petites particules capables de diffuser la lumière (bulles, poussières...). Ces dernières sont emportées par l'écoulement et on pourra assimiler leur vitesse à celle du fluide. Afin de mesurer cette vitesse, on éclaire un point de l'écoulement à l'aide du dispositif représenté dans la figure ci-dessous.



La puissance de la lumière diffusée par la particule est proportionnelle à l'intensité lumineuse locale incidente. Les ondes (1) et (2) seront assimilées à des ondes planes au niveau du point de croisement O. Elles ont la même fréquence ν et leurs intensités sont égales (notées I_0). On cherche ici à calculer l'intensité lumineuse résultante dans la zone de croisement des faisceaux.

1. (a) Rappeler la forme générale de l'amplitude complexe $\underline{s}(\vec{r}, t)$ d'une onde plane.
   (b) Écrire les composantes des vecteurs d'onde $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ des ondes (1) et (2).
   (c) Donner les amplitudes $\underline{s_1}$ et $\underline{s_2}$ en fonction des coordonnées x, y, z.
   (d) En déduire l'amplitude totale $\underline{s}_{\text{tot}}(\vec{r}, t)$.

2. En déduire l'intensité totale $I(x, y, z)$ en un point $M(x, y, z)$ de la zone de croisement. Montrer que I est invariante dans la direction z et sinusoïdale dans la direction x, déterminer l'interfrange i.

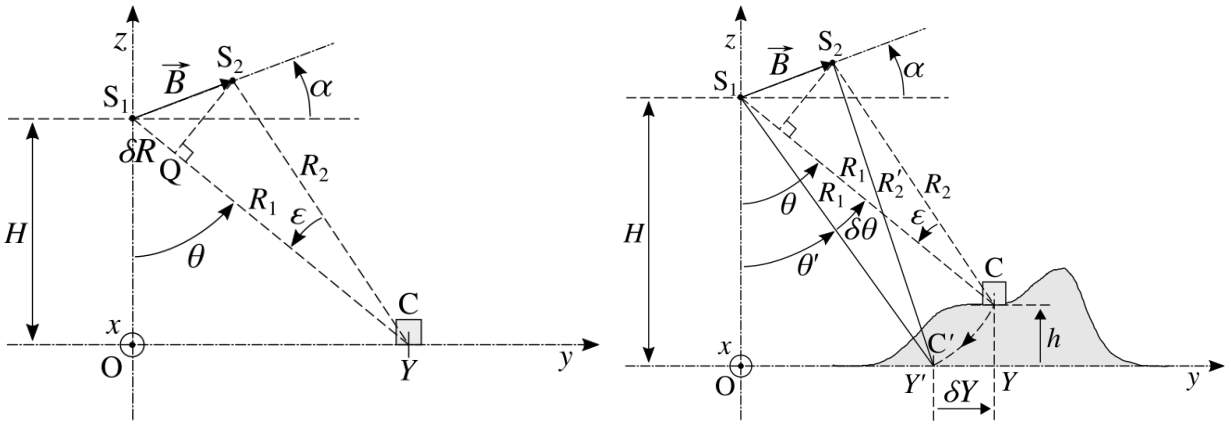
3. Supposons qu'une particule passe à travers le champ d'interférence avec une vitesse uniforme $\vec{v}$. Notons $v_{\parallel}$ la composante de cette vitesse dans la direction de modulation de l'intensité.
   (a) Quelle est la période T du signal lumineux enregistré par le détecteur ?
   (b) Expliquer le principe de la mesure de vitesse.
   (c) Est-il possible d'en déduire le sens de l'écoulement ?

4. Le résultat de la question précédente repose sur un raisonnement physique discutable. A cause de l'effet Doppler, les ondes diffusées par les particules et reçues par le détecteur n'ont pas la même fréquence. Tout au long de son parcours, la particule reçoit l'onde (1) et la diffuse sous la forme d'une onde de fréquence ν_1 dans la direction du détecteur. Dans le même temps elle reçoit l'onde (2) et la diffuse également vers le détecteur sous la forme d'une onde de fréquence ν_2. Le détecteur reçoit les deux ondes diffusées.
   (a) Justifier que l'effet Doppler appliqué à cette situation donne une différence de fréquence :
   $$\nu_1 - \nu_2 = 2\nu \frac{v_{\parallel}}{c} \sin \alpha \tag{3}$$
   (b) Prévoir la structure de l'amplitude complexe du champ résultant de la superposition des ondes diffusées sur le détecteur.
   (c) Le détecteur n'étant sensible qu'aux variations lentes de l'intensité (cf cours), montrer que le signal mesuré est sinusoïdal et a bien la période T trouvée à la question précédente.

14 Méthode InSAR pour la détection des séismes ★★★

La méthode InSAR consiste à faire interférer deux signaux enregistrés durant deux observations de la même cible par un satellite, en exploitant les légères imprécisions du contrôle de sa trajectoire orbitale. Le satellite est en orbite à une altitude $H = 700\,\text{km}$. Une première image radar, à la longueur d'onde $\lambda = 3\,\text{cm}$, est réalisée lorsque le satellite est en position S_1

: il envoie un signal vers la cible C et mesure le signal réfléchi lorsqu'il arrive à nouveau sur le satellite. Après avoir parcouru un ou plusieurs cycle orbitaux, celui-ci se retrouve presque à la même position, en S_2. Il prend alors une seconde image radar. La partie gauche de la figure suivante illustre cette situation.



Nous situons la position du point S_2 par rapport au point S_1 par le vecteur $\vec{B} = \overrightarrow{S_1S_2}$. Nous notons $\alpha = (\vec{e_y}, \vec{B})$ et $\epsilon = (\overrightarrow{CS_2}, \overrightarrow{CS_1})$. Le point Q, défini sur la figure, est le projeté orthogonal du point S_2 sur l'axe (S_1C). Nous notons $\delta R = (S_1Q)$. Il s'agit d'une grandeur algébrique. Nous conduisons cette étude dans la situation telle que $B = 100\,\text{m}$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$.

1. Nous commençons par étudier le signal observé par le satellite sur un sol plat.

   (a) Le satellite observe une zone de la surface terrestre d'extension $\Delta y = 30\,\text{km}$, délimitée angulairement par les angles $\theta_0 = 30°$ et θ_1 ($\theta_1 > \theta_0$). Vérifier que toute cible située dans cette zone est vue selon un angle $\theta = \theta_0 + \beta$ tel que $\beta \ll 1$.

   (b) Exprimer, en fonction de B, θ et α, la projection δR définie sur la figure.

   (c) Justifier que $|\epsilon| \ll 1$. En conséquence, nous considérerons que les directions (S_1C) et (S_2C) sont parallèles et donc que $R_2 = R_1 - \delta R$.

   (d) Exprimer, en fonction de B, λ, θ et α, la différence de phase $\Delta\phi_{\text{tp}} = \phi_1 - \phi_2$ des deux signaux réceptionnés.

   (e) Caractériser l'angle de vue $\theta_n = \theta_0 + \beta_n$ d'une cible C_n qui conduit à des interférences constructives entre les signaux reçus par le satellite successivement dans les positions S_1 et S_2.

   (f) Quelle est la figure d'interférences obtenue ? Montrer que l'interfrange w s'exprime selon la relation suivante :

$$w = Y_{n+1} - Y_n = \frac{\lambda H}{2B} Q(\theta_0, \alpha) \tag{4}$$

   où la fonction Q est à déterminer.

(g) Justifier que l'abscisse Y peut être déduite de la mesure du temps de parcours. La composante de phase $\Delta\phi_{\text{tp}}(Y')$ peut donc être calculée théoriquement et soustraite du déphasage mesuré.

2. La présence d'un relief modifie la géométrie des franges par rapport à la situation de terrain plat. Considérons à présent une cible située à une altitude h ($h \ll H$), comme le représente la partie droite de la figure. La mesure du délai émission-réception ne donnant accès qu'à une distance, il est impossible de connaître la position exacte de la cible et le signal reçu de la cible C de coordonnées (Y, h) est attribué à une cible apparente C' située dans le plan (O, x, y), de coordonnées $(Y' = Y - \delta Y, 0)$, correspondant à l'angle de visée $\theta' = \theta - \delta\theta$ et telle que $||\overrightarrow{S_1C}|| = ||\overrightarrow{S_1C'}||$.

   (a) Établir, qu'au premier ordre : $\delta Y \approx \dfrac{H}{Y} h$.

   (b) Établir que le déphasage total du signal reçu par le satellite en position S_1, par rapport à celui reçu en position S_2 , attribué à la cible apparente C, s'exprime par la relation suivante :

$$\Delta\phi(Y') = \Delta\phi_{\text{tp}}(Y') + \Delta\phi_{\text{topo}}(Y') \qquad \text{avec} \qquad \Delta\phi_{\text{topo}}(Y') = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{hB}{Y'}\cos(\theta' - \alpha) \quad (5)$$

   (c) En raison notamment des perturbations atmosphériques, la précision de la mesure du déphasage est de l'ordre de $\Delta\phi_{\text{bruit}} \approx \dfrac{\pi}{4}$. Estimer la précision attendue d'une mesure d'altitude basée sur la mesure de $\Delta\phi_{\text{topo}}$ pour une visée à $\theta' = 30°$ et $\alpha = 0$.

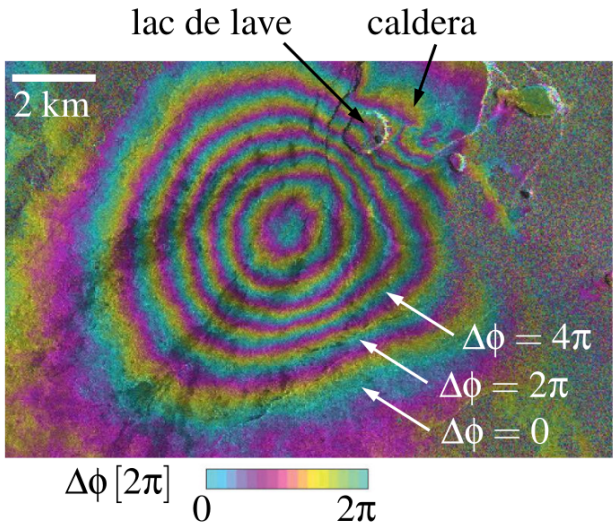
   En pratique, on utilise des mesures faites par d'autres méthodes pour accéder au profil $h = h(y)$ du relief. Il est alors possible de rectifier les positions sur les images et de soustraire la composante $\Delta\phi_{\text{topo}}$ au déphasage.

3. Nous supposons, qu'entre les deux prises d'image par le satellite depuis les points S_1 et S_2 , la cible C a subi un petit déplacement vertical η (soit $h \to h + \eta$). Nous avons vu que nous pouvons calculer et corriger le déphasage $\Delta\phi_{\text{tp}}$ et $\Delta\phi_{\text{topo}}$. Ainsi, le seul déphasage à considérer est celui lié à la variation de distance $||\overrightarrow{S_2C}(h+\eta)|| - ||\overrightarrow{S_2C}(h)||$.

   (a) Établir que ce déplacement induit le déphasage supplémentaire $\Delta\phi_d = \dfrac{4\pi}{\lambda}\eta\cos\theta$. On se souviendra que les direction (CS_1) et (CS_2) sont quasi-parallèles.

   (b) Estimer la valeur du déplacement minimal η_{min} décelable.

   (c) La figure suivante représente les franges d'interférences résultant de la somme de deux images du volcan Kilauea (cratère Halema'uma'u) à Hawaii. Elles ont été prises à un mois d'intervalle, sous un angle de visée $\theta = 44°$. Estimer la surrection (ou soulèvement) η_s du volcan.



V - Notion de cohérence

15 Largeur naturelle et largeur Doppler ♥★

1. Quelle est la fréquence centrale ν_0 d'une raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$? Quelle est sa couleur ?

2. La longueur de cohérence d'une telle raie de lampe spectrale liée à la seule largeur naturelle serait de $L_c = 3\,\text{m}$. Expliquer cette notion et en déduire la durée τ_0 des trains d'onde émis ainsi que la largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ de la raie. Quelle est la largeur $\Delta\lambda$ associée ?

3. En réalité, en raison de l'agitation thermique des molécules emettrices, la fréquence perçue est $\nu = \nu_0(1 \pm \frac{v}{c})$ où $\pm v$ est la vitesse des molécules le long de l'axe optique par rapport à l'observateur.
   (a) Quel est l'effet physique qui cause ce décalage de fréquence ?
   (b) Quelle est la largeur $\Delta\nu$ de la raie si on assimile la vitesse v à la vitesse quadratique moyenne lorsque la température est $T = 320\,\text{K}$, pour un gaz de masse molaire $M = 44\,\text{g/mol}$?

16 Écholocation par les chauve-souris ★★

Document 1 : Extrait de *Irremplaçables chauve-souris*, Parc National de la Guadeloupe Les chauves souris, scientifiquement nommées chiroptères (littéralement les mains-ailes), sont les uniques mammifères indigènes de Guadeloupe, c'est-à-dire les seuls présents naturellement sur l'archipel. Il existerait dans le monde environ 1 400 espèces de chauves-souris, soit un cinquième des 6 500 espèces de mammifères connues.

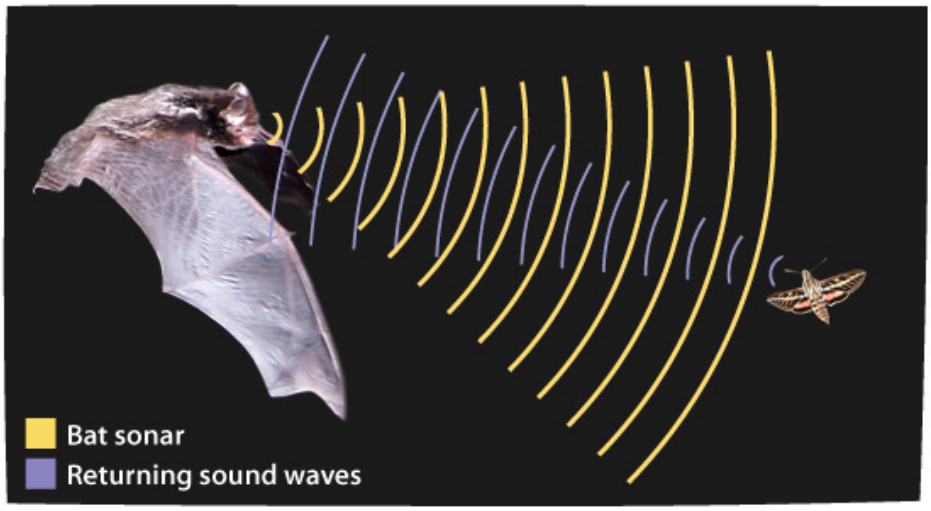
Bien qu'elles soient toutes des animaux nocturnes volants, les espèces de chauves-souris n'ont pas toutes le même régime alimentaire ni le même habitat ; certaines se retrouvent plutôt en mangrove, en forêt humide ou en zone urbaine.

Certaines espèces sont insectivores (Eptesicus guadeloupensis, Molossus molossus, Myotis dominicensis, Natalus stramineus, Pteronotus davyi, Tadarida brasiliensis) et vont donc déguster à la nuit venue : moustiques, moucherons, papillons, fourmis volantes, termites etc. Elles ont un rôle dans la régulation des insectes notamment des moustiques. En consommant de grandes quantité d'insectes (le molosse commun par exemple consommerait chaque nuit entre 200 et 600), les chauves-souris s'apparentent donc à un insecticide géant naturel et gratuit.

Les chiroptères peuvent également pêcher, c'est le cas de la piscivore Noctilio leporinus, qui est la plus grande des chauves-souris de Guadeloupe.

Document 2 : *What is Echolocation ?*, Arizona State University Echolocation is the use of sound waves and echoes to determine where objects are in space. Bats use echolocation to navigate and find food in the dark. To echolocate, bats send out sound waves from the mouth or nose. When the sound waves hit an object they produce echoes. The echo bounces off the object and returns to the bats' ears. Bats listen to the echoes to figure out where the object is, how big it is, and its shape.

Using echolocation, bats can detect objects as thin as a human hair in complete darkness. Echolocation allows bats to find insects the size of mosquitoes, which many bats like to eat. Bats aren't blind, but they can use echolocation to find their way around very quickly in total darkness.



Document 3 : *Son émis par les chauve-souris*, adapté de Arizona State University et Weizmann Institute of Science Pour chasser, les différentes espèces de

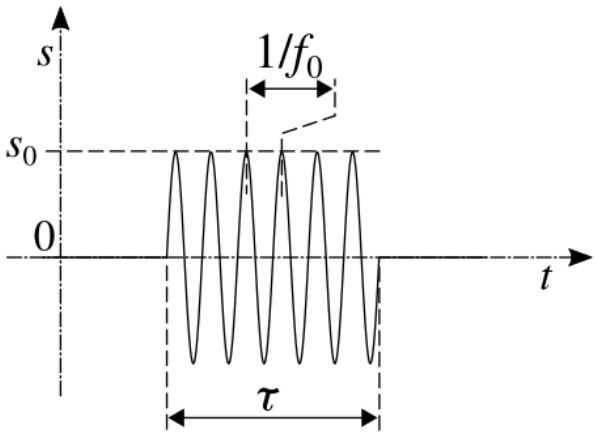


Figure 3: Allure du signal CF-FM émis par la chauve-souris *Rhinolophus*.

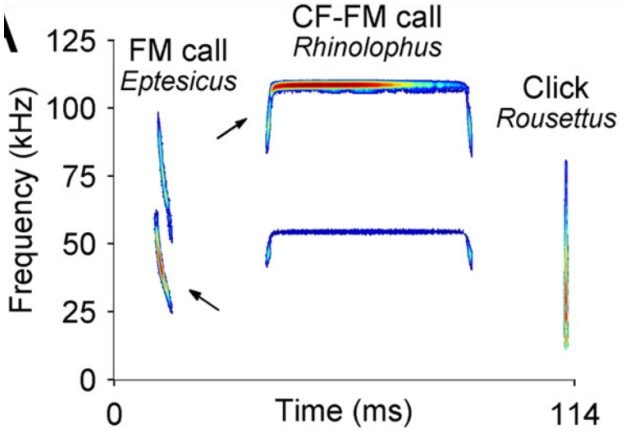


Figure 4: Evolution de la fréquence en fonction du temps pour plusieurs espèces de chauve-souris. Nous nous intéressons au cas FM et CF-FM dans cet exercice. Source : Ulanovski&Moss, *What the bat's voice tells the bat's brain* (2008)

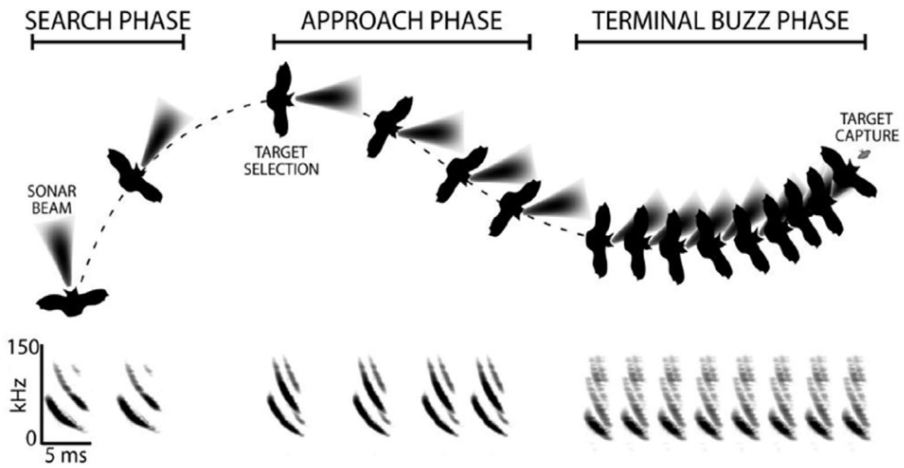


Figure 5: Evolution de la fréquence des sons émis lors de la chasse de la chauve-souris. Source : Moss&Surlykke, *Probing the natural scene by echolocation in bats* (2010)

chauve-souris émettent des sons variés. Les chauve-souris de genre *Rhinolophus* émettent un signal relativement long de durée τ à une fréquence constante f_0 (CF-FM call) :

$$s(t) = s_0 \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f_0 t) \tag{6}$$

où $\Pi(x) = 1$ si $0 < x < 1$ et $\Pi(x) = 0$ sinon. Ces chauve-souris sont capables de détecter la vitesse de vol des insectes qu'elles chassent mais ne peuvent pas mesurer déterminer leur position avec précision.

D'autres chauve-souris de genre *Eptesicus* émettent un signal communément appelé "Chirp" avec une fréquence modulée (FM) qui diminue avec le temps :

$$s(t) = s_0 \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f(t) t) \tag{7}$$

Avec $f(t) = f_0\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$ une fonction décroissante qui varie entre $f_{\max} = 100\,\text{kHz}$ et $f_{\min} = 50\,\text{kHz}$. Un tel signal peut être entendu dans l'enregistrement MP3 sur Cahier de Prépa (source : Arizona State University).

Enfin, les chauve-souris de genre *Rousettus* émettent un son appelé "Click" qui est très court et contient toutes les fréquences entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$.

Lorsque la chauve-souris s'approche de sa proie, elle augmente la fréquence à laquelle elle émet les sons pour la localiser plus souvent.

1. Expliquer le principe de l'écholocation. Relier l'écart temporel Δt entre le signal émis et le signal reçu par la chauve-souris à la distance R de la cible. On notera c la célérité du son dans l'air.

2. On s'intéresse désormais à la perte d'énergie associée à la propagation de l'onde. L'onde est émise avec une puissance totale $\mathcal{P}_e$ et on note $\mathcal{P}_r$ la puissance reçue par la chauve-souris. On note S_i la section de l'insecte (dans la direction perpendiculaire à la chauve souris) et S_c la section des oreilles de la chauve-souris. L'insecte est toujours situé à une distance R de la chauve souris.
   (a) Quelle est la nature des surfaces d'onde autour de la chauve-souris ? Déterminer la puissance par unité de surface lorsque l'onde arrive sur l'insecte.
   (b) En déduire la puissance de l'onde réfléchie par l'insecte.
   (c) En déduire le rapport $\frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e}$ en fonction de S_i, S_c et R. Proposer une application numérique avec des ordres de grandeur cohérents.
   (d) Expliquer alors pourquoi il est nécessaire pour la chauve-souris d'émettre un signal de durée τ suffisamment longue.

3. On étudie la chauve-souris de genre *Rhinolophus*, qui émet un pulse de fréquence unique.

(a) Comment qualifier le signal $s(t)$ émis par la chauve-souris ? Quel est son temps de cohérence ?

(b) Déterminer la précision Δx de la mesure de la position de l'insecte en fonction du temps τ. Proposer une application numérique. La vitesse du son dans l'air est de $340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

(c) Rappeler ce qu'est l'effet Doppler et montrer que le mesure de la fréquence f_r du signal reçu permet de déterminer la composante $v_\parallel$ de la vitesse de l'insecte le long de la ligne de visée de la chauve souris. Exprimer f_r en fonction de f_0, c et $v_\parallel$.

4. On s'intéresse maintenant aux chouve-souris de genre *Rousettus* qui émettent un click contenant de nombreuses fréquences. On note $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$.

   (a) Quel est le temps de cohérence du signal ?

   (b) Par des méthodes de traitement du signal et d'interférométrie, il est alors possible pour la chauve-souris de déterminer le temps de vol Δt avec une précision τ_c. En déduire la précision de la mesure de position de l'insecte. Commenter.

   (c) Est-il possible de déterminer la vitesse de l'insecte avec cette méthode ? Expliquer.

   (d) Comparer la durée du signal émis à celle du signal émis par la chauve-souris *Rhinolophus*. Quel inconvénient cette méthode présente-t-elle vis-à-vis de l'analyse faite en question 2 ?

5. On s'intéresse finalement aux chauve-souris du genre *Eptesicus* qui adoptent un compromis entre les deux options, et émettent un signal de fréquence variable. Pour détecter le signal retour, la chauve-souris fait interférer le signal retour (reçu par les oreilles) avec un signal sinusoïdal de fréquence $f_0 = f_{\max}$.

   (a) Représenter l'allure du signal $s(t)$.

   (b) En déduire que le signal reçu peut être localisé dans le temps avec une précision τ_0 très inférieure à τ. Exprimer τ_0 en fonction de τ et β. On pourra pour cela remarquer qu'après un temps τ_0, le signal reçu et le signal de fréquence constante f_0 se sont décalés de plus d'une période et n'interfèrent donc plus. Représenter l'allure de l'intensité sonore en fonction du temps après interférences.

   (c) En déduire la précision de la mesure $u(x)$ sur la position de l'insecte. Faire l'application numérique et comparer à la méthode utilisée par les chauve-souris *Rhinolophus* et *Rousettus*.