Modèle scalaire des ondes lumineuses

Chapitre 8

Avec solutions

Incontournables	CCINP/E3A	Mines/Centrale	X/ENS
2 - 4 - 5 - 7 - 8 - 9 - 12 - 15	1 - 6 - 10 - 16	3 - 11 - 13 - 16	3 - 13 - 14 - 16

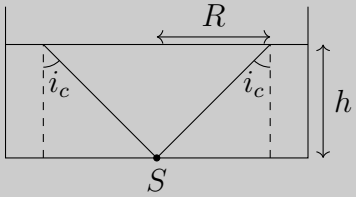
I - Dioptres et miroirs

1 Piscine et effet loupe ★★

On considère une piscine, de profondeur h. De la brume présente au-dessus de la piscine diffuse la lumière.

1. On place une source lumineuse au fond de la piscine. On constate que la brume n'est éclairée qu'au-dessus d'un cercle centré sur la source.

   (a) Expliquer le phénomène.



Lorsque l'incidence des rayons émis par la source dépasse l'angle de réfraction limite i_c, on a réflexion totale sur la paroi et aucun rayon ne traverse le dioptre.

   (b) Déterminer le rayon R du cercle élairé par la source.

On a $n \sin i_c = 1$ et $\tan i_c = \dfrac{R}{h}$. D'où :

$$R = h \tan i_c = h \frac{\sin i_c}{\sqrt{1 - \sin^2 i_c}} = \frac{h}{n\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}}}$$

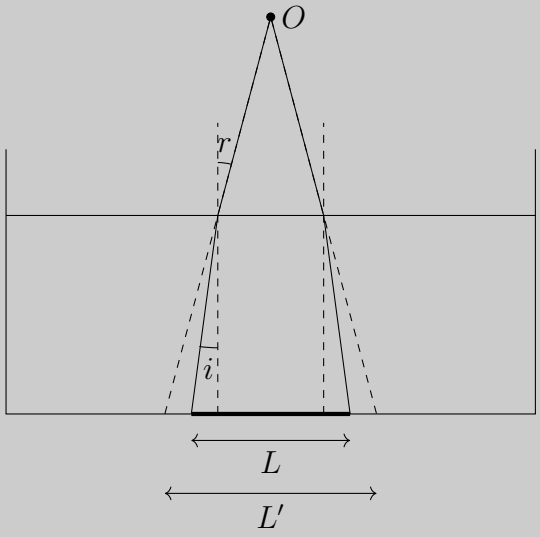
Ainsi :

$$\boxed{R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 1.14h}$$

2. On place maintenant un objet de taille L au fond de la piscine. Une personne, dont les yeux sont situés à une hauteur H au-dessus de l'eau, voit l'objet avec une taille apparente $L' > L$.

(a) Expliquer le phénomène.

Le phénomène est dû à la réfraction à la surface de l'eau : les rayons arrivent vers l'observateur avec un angle supérieur.



(b) Déterminer L' dans le cadre de l'approximation des petits angles.

Par la loi de Descartes $\sin r = n \sin i$.
Or $L' = 2(H+h)\tan r$ et $L = 2H\tan r + 2h\tan i$
Si l'objet est suffisamment petit on peut faire l'approximation des petits angles et alors $r \approx \tan r \approx \sin r$; $i \approx \tan i \approx \sin i$ si bien que :

$$\frac{L'}{L} = \frac{2(H+h)r}{2Hr+2hi} = \frac{n(H+h)}{nH+h}$$

Si $H \gg h$ alors on aura $L' \approx L$ (pas d'effet loupe) ; l'effet loupe sera maximal si on se trouve proche de l'eau, auquel cas $L' \approx nL$.

Données : $n_{eau} = 1.33$

2 Fibre à saut d'indice ♥★

On considère une fibre à saut d'indice, constituée d'un coeur en verre d'indice $n_1 = 1,66$ et de diamètre $d = 0.05\,\text{mm}$ entourée d'une gaine en verre d'indice $n_2 = 1,52$.

1. On veut savoir à quel angle maximal les rayons qui pénètrent dans la fibre y sont guidés.

   (a) Quelle condition doit vérifier l'angle d'incidence i à la surface de séparation cœur-gaine pour qu'un rayon lumineux se propage en restant confiné dans le cœur ? On note i_{lim} l'angle d'incidence limite et $\alpha_{lim} = \frac{\pi}{2} - i_{lim}$.

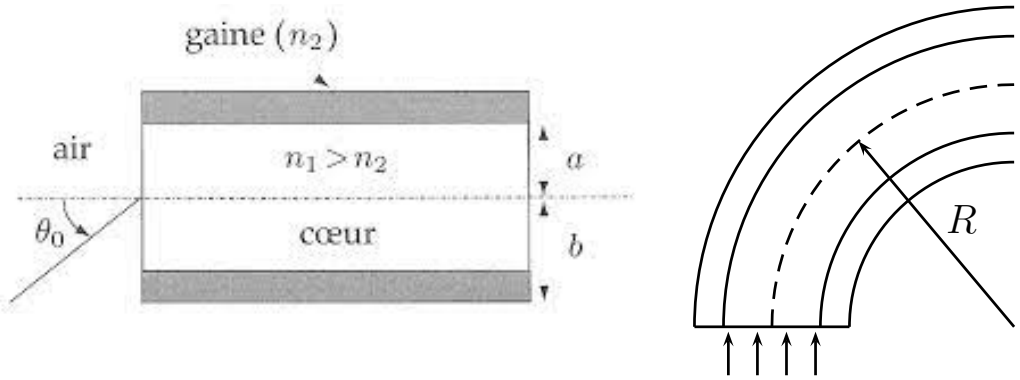
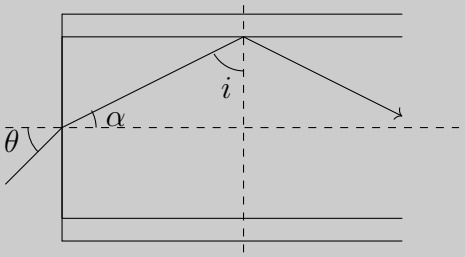


Figure 1: A gauche : fibre non courbée. A droite : fibre courbée.



On veut qu'il y ait réflexion totale, il faut donc que $n_1 \sin i > n_2$. A la limite de la réflexion totale on aura donc $\sin i_{lim} = \dfrac{n_2}{n_1}$.

Et $\sin \alpha_{lim} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n_1}{n_2}\right)^2}$ car $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - i$

(b) Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ_0 sur la face d'entrée de la fibre est inférieur à une valeur limite θ_{lim} que l'on déterminera.

Par la loi de Descartes au niveau du dioptre d'entrée et lorsque l'on est dans le cas limite de propagation :

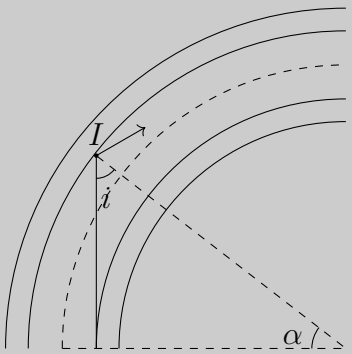
$$\sin \theta_{lim} = n_1 \sin \alpha_{lim}$$

On réinjecte le résultat précédent :

$$\boxed{\theta_{lim} = \arcsin\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$$

2. En réalité, la fibre n'est pas toujours droite. On courbe la fibre comme sur la partie droite de la figure : elle forme une portion d'anneau de rayon de courbure R. (Ici, le rayon de courbure correspond au rayon du cercle formé par les pointillés). La fibre est éclairée par un faisceau parallèle d'angle d'incidence nul.

(a) Une fois dans la fibre, quel est le rayon lumineux qui arrive sur l'interface cœur-gaine avec le plus petit angle d'incidence ?



Il s'agit du rayon qui se trouve le plus à l'intérieur du virage comme cela est visible sur le schéma.

(b) Quel doit être le rayon de courbure R minimal pour que l'ensemble du faisceau lumineux soit guidé dans la fibre optique (c'est-à-dire pour qu'il y ait réflexion totale pour chacun des rayons) ?

On note I le point d'incidence. On voit alors que :

$$x_I = -(R+a)\cos\alpha = -(R+a)\sin i$$

Or $x_I = -(R-a)$ par construction du rayon, donc $\sin i = \dfrac{R-a}{R+a}$. La limite de propagation est atteinte pour :

$$\sin i_{lim} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{R-a}{R+a}$$

On en déduit, après manipulations de cette équation :

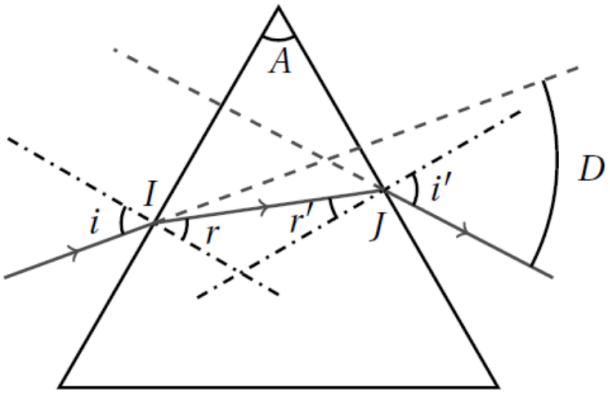
$$\boxed{R_c = \frac{n_1+n_2}{n_1-n_2}a} = 0.57\,\text{mm}$$

(c) Au vu de ce résultat, le guidage vous semble-t-il assuré dans la fibre ?

En pratique, la fibre n'est jamais aussi courbée (ceci casserait la fibre) donc la propagation est bien assurée.

3 Prisme ★★

Un rayon incident arrivant sur un prisme d'indice n et d'angle au sommet A émerge en étant dévié d'un angle D. Le prisme est plongé dans l'air d'indice pris égal à 1.



1. Ecrire les lois de la réfraction en I et J.

$n \sin r = \sin i$ et $n \sin r' = \sin i'$

2. Déterminer une relation entre r, r' et A.

On a en faisant la somme des angles de AIJ :

$$A + \frac{\pi}{2} - r + \pi 2 - r' = \pi \rightarrow \boxed{A = r + r'}$$

3. Montrer que $D = i + i' - A$

On a $D = (i - r) + (i' - r')$ en sommant les deux déviations. D'où :

$$\boxed{D = i + i' - A}$$

4. La fonction $D(i)$ possède un unique minimum D_m appelé minimum de déviation du prisme. Justifier qu'au minimum de déviation $i = i'$.

On considère le rayon réalisant le minimum, il arrive avec un angle d'incidence i. Par principe de retour inverse de la lumière, le rayon allant dans l'autre sens est également un rayon possible. Ce rayon subit la même déviation, c'es-à-dire la déviation minimale. Il arrive donc avec l'incidence critique donnant la déviation minimale. Donc $i' = i$. Et donc $r = r'$.

5. En déduire l'expression de D_m en fonction de i et de A.

$D_m = 2i - A$

6. Montrer que :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m+A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \tag{1}$$

On a vu que $2r = A$ donc $\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin r = \frac{1}{n}\sin i$.
Or $2i = D_m + A$ donc :

$$\boxed{\sin\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}$$

et on obtient la relation à démontrer.

7. Le verre qui constitue le prisme est un milieu dispersif. Son indice optique dépend de la longueur d'onde suivant la loi de Cauchy : $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$ où A et B sont deux constantes positives qui dépendent du matériau. Quelle est la couleur la plus déviée par le prisme ? La moins déviée ?

n est plus important pour le violet qui a une longueur d'onde plus courte. Ceci implique que :

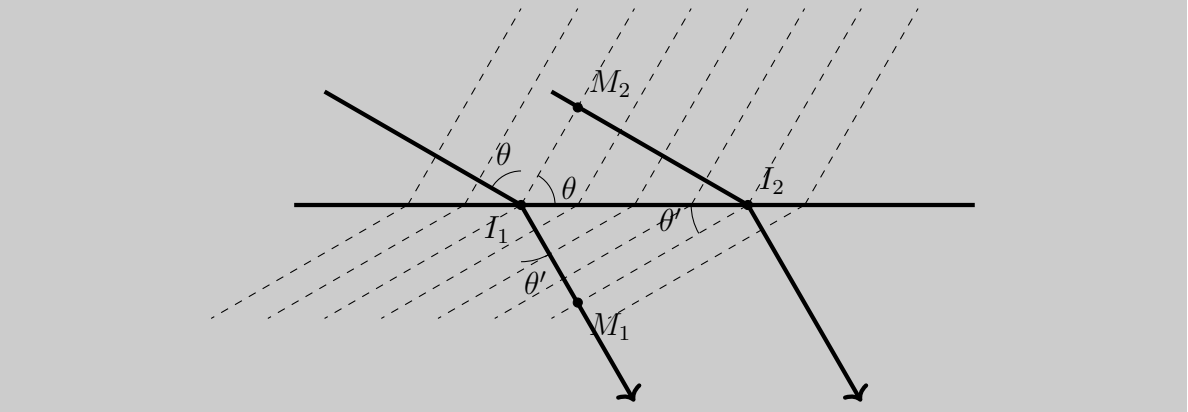
$$\sin\left(\frac{D_m^{\text{violet}} + A}{2}\right) > \sin\left(\frac{D_m^{\text{rouge}} + A}{2}\right) > \sin\frac{A}{2}$$

La couleur la plus déviée est donc le violet.

4 Démonstration ondulatoire de la loi de réfraction ♥★

Une onde plane arrive avec une incidence θ sur un dioptre plan séparant deux milieux d'indices n et n'. L'onde transmise est plane également et réfractée selon un angle θ'. On suppose $n' > n$.

1. Faire un schéma représentant deux rayons incidents, les rayons réfractés associés, et des surfaces d'onde dans chacun des milieux. On note I_1 et I_2 les points d'incidence sur le dioptre.



2. On note M_2 le point d'intersection de la surface d'onde passant par I_1 avec le rayon 2, et M_1 le point d'intersection de la surface d'onde passant par I_2 avec le rayon 1. Que dire des chemins optiques (I_1M_1) et (I_2M_2) ?

Les points I_1 et M_2 sont sur la même surface d'onde donc ils ont la même phase. Il en est de même des points I_2 et M_1. Ainsi :

$$\boxed{(I_1M_1) = (M_2I_2)}$$

3. En déduire la loi de Snell-Descartes pour la réfraction.

On a $I_1M_1 = I_1I_2 \sin\theta'$ et $M_2I_2 = I_1I_2 \sin\theta$
Or $(I_1M_1) = n'I_1M_1$ et $(I_2M_2) = nI_2M_2$ donc :

$$\boxed{n \sin\theta = n' \sin\theta'}$$

II - Instruments d'optique

5 Relations de conjugaison ♥★

On considère une lentille mince.

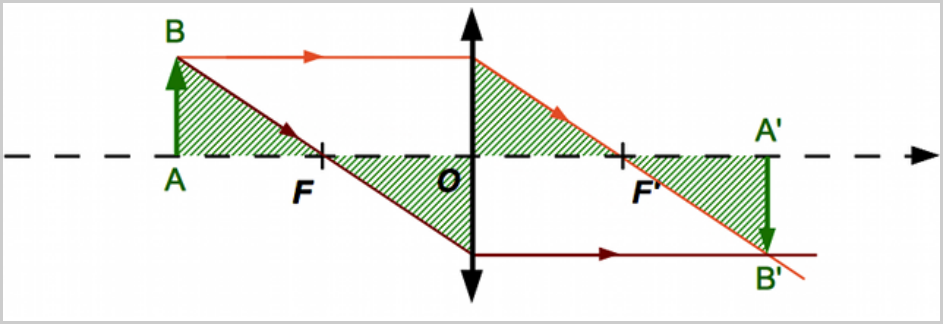
1. Rappeler la définition des termes suivants : stigmatisme, aplanétisme, stigmatisme rigoureux, stigmatisme approché.

On dit qu'on a aplanétisme lorsque l'image d'un objet perpendiculaire à l'axe optique est également perpendiculaire à l'axe optique. On a stigmatisme rigoureux lorsque l'image d'un point est un point. Le stigmatisme est dit approché lorsque les rayons incidents passant par un point émergent en passant tous dans une zone réduite de l'espace, que l'on peut approximer par un point.

2. Dans quelles conditions peut-on considérer qu'une lentille mince est stigmatique ?

On se place dans les conditions de Gauss, dans lesquelles on a des rayons paraxiaux : proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

3. En s'appuyant sur un schéma, démontrer la relation de conjugaison de Newton (avec origine aux foyers).



On applique le théorème de Thalès dans les deux triangles verts :

$$\frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

En combinant ces équations on trouve :

$$\boxed{\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = \overline{F'O} \cdot \overline{F'O'} = -f'^2}$$

4. En déduire la relation de conjugaison de Descartes (avec origine au centre optique de la lentille).

On a $\overline{OA'} = f' + \overline{F'A'}$ et $\overline{OA} = -f' + \overline{FA}$. Donc :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f' + \overline{F'A'}} + \frac{1}{f' - \overline{FA}} = \frac{2f' + \overline{F'A'} - \overline{FA}}{(f' + \overline{F'A'})(f' - \overline{FA})}$$

En utilisant la relation de Newton et en développant, le dénominateur devient :

$$(f' + \overline{F'A'})(f' - \overline{FA}) = 2f'^2 + f'(\overline{F'A'} - \overline{FA})$$

On retrouve alors la relation de conjugaison de Descartes :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}}$$

6 Appareil photographique ★

On a pris en photographie la cascade de Yellowstone. Les documents suivants indiquent le cliché, le schéma de l'appareil photo choisi, et la carte de l'emplacement d'où la photographie a été prise.

1. Estimer la hauteur de la cascade en faisant des hypothèses appropriées.

La casacde a une hauteur correspondant à environ la moitié de la hauteur de la photographie. L'image de la cascade sur le capteur occupe donc la moitié de la hauteur du capteur, soit $\ell = |\overline{A'B'}| = 7.25\,\text{mm}$. Par ailleurs, on lit sur la carte que la cascade se trouve à environ $d = 1200\,\text{m}$ de l'appareil photo. La cascade étant très loin, on peut supposer qu'elle est à l'infini. Dans ce cas, le capteur photographique se situe au foyer image de la lentille : $\overline{OA'} = \overline{OF'} = f'$. Enfin, l'angle α sous lequel est vu la cascade de hauteur h est donné par $\tan\alpha = \dfrac{h}{d}$. Or on a également (en considérant le rayon non dévié qui passe par le centre de la lentille) : $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{f'}$. On conclut que :

$$\boxed{h = \frac{d\ell}{f'} = 64\,\text{m}}$$

2. On note C la position du capteur pour avoir une image nette. Déterminer la distance $\Delta = \overline{F'C}$ et commenter vis-à-vis des hypothèses faites précédemment.

On ne considère plus la cascade comme étant à l'infini puisque l'on doit désormais prendre en compte le décalage entre le capteur et le foyer image. On applique la relation de conjugaison de Newton : $\overline{F'A'} \cdot \overline{FA} = -f'^2$. Or ici on a $\overline{FA} = -d$ et $\overline{F'A'} = \Delta$. Donc :

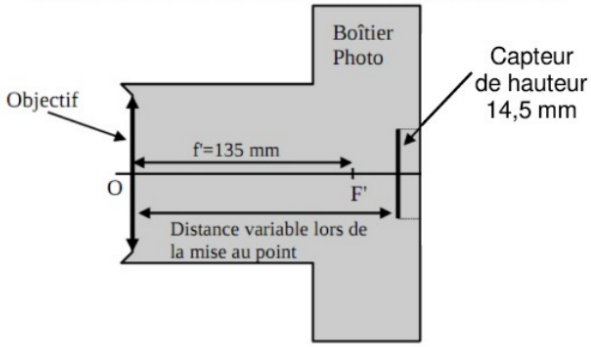
$$\boxed{\Delta = \frac{f'^2}{d} = 1.5 \cdot 10^{-5}\,\text{m}}$$

Cette quantité de quelques micromètres est très faible, l'hypothèse faire en Q1 est donc tout à fait valide pour le calcul.

Document 1 : la photo !



Document 2 : modélisation de l'appareil photo.



Document 3 : capture d'écran GoogleMaps.



7 Observation de Mars ♥★

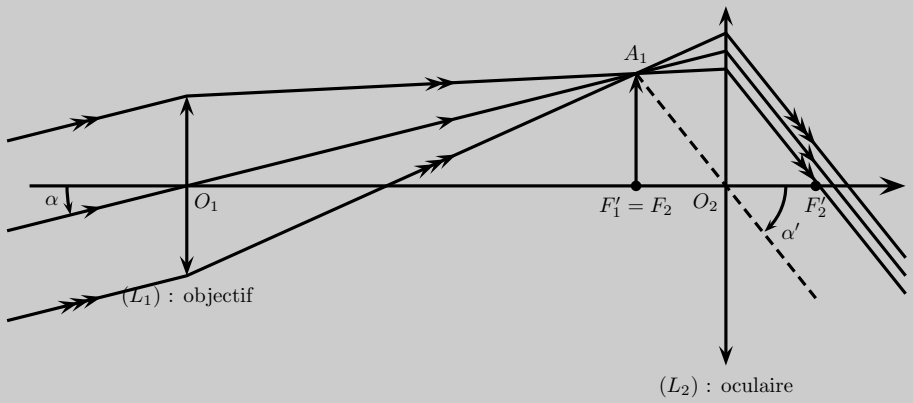
On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif (L_1) de distance focale $f_1' = 80\,\text{cm}$, et l'oculaire (L_2) de distance focale $f_2' = 6.0\,\text{mm}$. La lunette est réglée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

1. Déterminez la distance h entre (L_1) et (L_2). Quel est l'intérêt de cette lunette pour l'utilisateur ?

On a alors $F_1' = F_2$ d'où $h = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_2O_2} = f_1' + f_2' = 80.6\,\text{cm}$. Le système est afocal et l'oeil voit les objets lointains sans accommoder c'est à dire sans fatigue. $A_\infty - (L_1) \to A_1 - (L_2) \to A_\infty'$.

2. Représentez sur un schéma (sans respecter l'échelle) la trajectoire d'un rayon arrivant sur l'objectif avec un angle α par rapport à l'axe optique. On note α' l'angle sous lequel il émerge du système.

Les trois rayons, provenant d'un point A situé à l'infini convergent en A_1 (image intermédiaire) qui appartient au plan focal image de (L_1). Comme A_1 est dans le plan focal objet de (L_2), les trois rayons, issus de A_1 sortent parallèlement de (L_2).



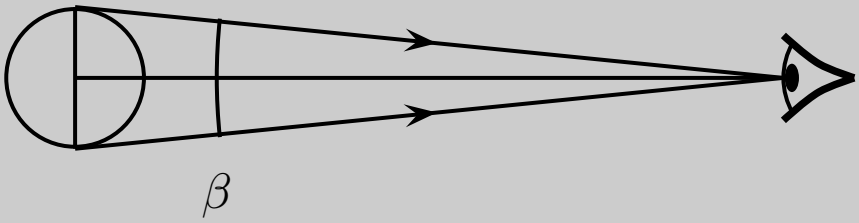
3. Déterminez le grossissement angulaire $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette en fonction de f_1' et f_2'.

Sur la figure, on lit $\alpha \simeq \tan\alpha = \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{O_1F_1'}} > 0$ et $\alpha' \simeq \dfrac{\overline{F_1'A_1}}{\overline{O_2F_2}} < 0$ d'où

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} \simeq \frac{\overline{O_1F_1'}}{\overline{O_2F_2}} = -\frac{f_1'}{f_2'} = -133,3}$$

4. On estime à 30° l'angle maximal sous lequel l'observateur peut voir l'image. L'observateur peut-il voir Mars en entier dans la lunette ? Même question pour la Lune.

Soit β l'angle sous lequel l'observateur voit l'astre sans la lunette (diamètre angulaire). $\tan\dfrac{\beta}{2} = \frac{d_A}{2L_{AT}}$ où d_A est le diamètre de l'astre et L_{AT} la distance qui le sépare de l'observateur terrestre. À travers la lunette, l'observateur observera l'astre sous un diamètre angulaire $\beta' = |G|\beta = 2|G|\arctan\dfrac{d_A}{2L_{AT}}$. Il faut que β' reste inférieur à 30°.



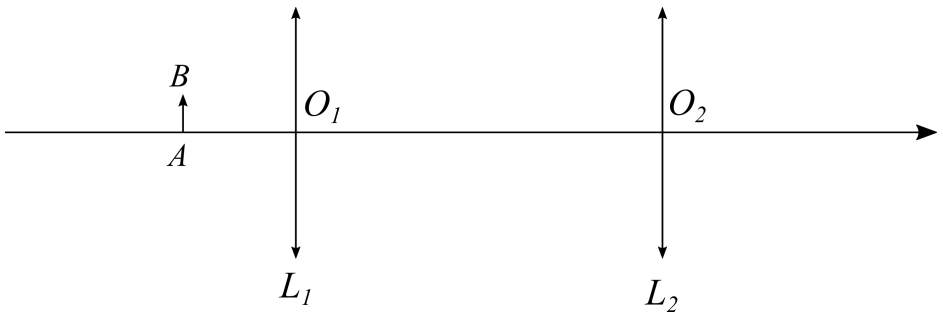
	L_{TA} (km)	d_A (km)	β (rad)	β' (rad)	β (deg)
Mars	$7,0.10^7$	6800	$9,7.10^{-5}$	$1,29.10^{-2}$	0,74
Lune	$3,8.10^5$	3400	$8,9.10^{-3}$	1,19	68,3

Conclusion : on observe Mars en entier mais qu'une partie de la Lune.

Données : distance Terre-Mars $D_{TM} = 7.0 \times 10^7$ km, diamètre de Mars $d_M = 6800$ km ; distance Terre-Lune $D_{TL} = 3.8 \times 10^5$ km, diamètre de la Lune $d_L = 3400$ km.

8 Etude d'un microscope ♥★★

Un microscope est modélisé par un système de deux lentilles minces convergentes (voir figure ci-dessous), l'une constituant l'objectif (lentille L_1 de centre O_1 et de distance focale image $f_1' = 5.0$ mm), et l'autre constituant l'oculaire (lentille L_2, de centre O_2 et de distance focale image $f_2' = 5.0$ mm). On fixe $\overline{O_1O_2} = D_0 = 120$ mm. On choisit le sens positif dans le sens



de propagation de la lumière. On rappelle enfin la relation de conjugaison d'une lentille de centre O et de focale f': $\dfrac{1}{\overline{OA'}} - \dfrac{1}{\overline{OA}} = \dfrac{1}{f'}$

1. A quelle(s) condition(s) cette relation de conjugaison est-elle valable ?

Deux conditions sur les rayons :

- ils sont proches de l'axe optique ;
- ils sont peu inclinés par rapport à l'axe optique.

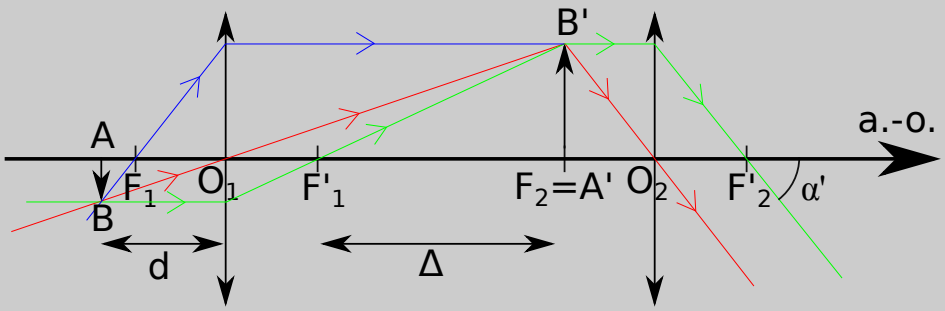
2. Si F_1' est le foyer image de L_1 et F_2' le foyer image de L_2, on définit l'intervalle optique par la grandeur algébrique $\Delta = \overline{F_1'F_2}$. Exprimer Δ en fonction de f_1', f_2' et D_0, puis calculer sa valeur.

$$\Delta = \overline{F_1'F_2} = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = -f_1' + D_0 - f_2' \Leftrightarrow \boxed{\Delta = D_0 - (f_1' + f_2')}$$

Application numérique : $\Delta = 110\,\text{mm}$.

Un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique est éclairé et placé à une distance d de L_1, à sa gauche, de façon que l'image $A'B'$ donnée par l'objectif, appelée image intermédiaire se trouve dans le plan focal objet de l'oculaire. L'observation se fait à l'œil placé au contact de l'oculaire.

3. En justifiant votre construction, réaliser le schéma optique du microscope en représentant un objet, son image par le microscope, l'image intermédiaire et les rayons lumineux correspondants.



Pour construire le schéma, on a d'abord placé l'image intermédiaire $A'B'$ dans le plan focal objet de la lentille L_2, comme l'énoncé l'indique. On a ensuite construit l'objet correspondant, placé un peu en amont du foyer objet de la lentille L_1 et l'image finale, rejetée à l'infini (car dans le plan focal objet de L_2).

Sur la figure, on a représenté :

- En rouge les rayons passant par l'objet, le centre optique des lentilles et l'image. Ils ne sont pas déviés par les lentilles.
- En vert, les rayons passants par les objets et arrivant sur les lentilles parallèles à l'axe optique. Ils émergent en passant par les foyers images des lentilles.
- En bleu le rayon passant par l'objet et le foyer objet de la lentille L_1. Il ressort parallèle à l'axe optique.

4. Exprimer d en fonction de f_1' et Δ, puis calculer sa valeur.

On cherche la distance d (donc une grandeur positive). On sait que $\overline{O_1A} = -d$. Étant donné qu'on connait la position de l'image intermédiaire, les relations de conjugaison appliquées à la lentille L_1 vont nous permettre de calculer la position de l'objet :

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} \quad \text{avec} \quad \overline{O_1A} = -d \quad \text{et} \quad \overline{O_1A'} = f_1' + \Delta$$

Quelques lignes de calcul donnent :

$$\boxed{d = \frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta}}$$

Application numérique : $\boxed{d = 5.2\,\text{mm}}$

5. Exprimer le grandissement γ_1 induit par l'objectif en fonction de f_1' et Δ, puis calculer sa valeur.

On a :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} = \frac{f_1' + \Delta}{-d} = -\frac{(f_1' + \Delta)\Delta}{f_1'(f_1' + \Delta)} \Leftrightarrow \boxed{\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f_1'}}$$

Application numérique : $\boxed{\gamma_1 = -22}$. Le résultat est cohérent avec le fait que l'image est renversée et agrandie.

6. Quel est l'intérêt pour l'observateur de cette position de l'objet?

L'image intermédiaire étant positionnée dans le plan focal objet de la lentille L_2, l'image finale sera renvoyée à l'infini, ce qui est idéal pour une observation à l'oeil qui n'a alors pas besoin d'accommoder.

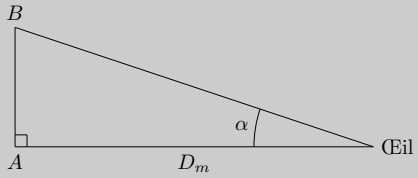
7. Le grossissement commercial du microscope est défini par $G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right|$ où α' et l'angle sous lequel est vu l'objet après l'oculaire, et α l'angle maximum sous lequel serait vu l'objet à l'œil nu à la distance D_m la plus courte possible de l'œil garantissant une vision nette.

   (a) Quelle est la valeur approximative de D_m pour un œil normal? Comment s'appelle le point correspondant?

   La distance la plus courte garantissant une vision nette pour un œil sain est $D_m = 25\,\text{cm}$. Le point correspondant s'appelle le *punctum proximum*.

   (b) En supposant que l'on reste dans les conditions de Gauss, exprimer G en fonction de Δ, f_1', f_2' et D_m, puis calculer sa valeur.

Pour calculer α, on suppose que l'œil est positionné à 25 cm de l'objet, ce qui est la position la plus proche possible permettant de le voir net et donc la position garantissant de voir les graduations selon le plus grand angle possible.



On obtient ainsi $\tan(\alpha) = \dfrac{AB}{D_m} \simeq \alpha$. On calcule maintenant α'. Sur le schéma réalisé précédemment, on constate que le triangle $O_2A'B'$ est rectangle et donne :

$$\tan(\alpha') = \frac{A'B'}{f_2'} \simeq \alpha'$$

Dans les deux cas on a utilisé l'approximation des petits angles, valide car on suppose que les conditions de Gauss sont respectées. On peut calculer G :

$$G = \left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right| = \left|\frac{A'B'D_m}{f_2'AB}\right| = \left|\frac{A'B'}{AB}\right| \frac{D_m}{f_2'}$$

Or, $\dfrac{A'B'}{AB} = \gamma_1 = -\dfrac{\Delta}{f_1'}$, d'où :

$$\boxed{G = \frac{D_m\Delta}{f_1'f_2'}}$$

Application numérique : $\boxed{G = 1100}$

Remarque : cette formule indique qu'on a intérêt à augmenter l'intervalle optique et à diminuer au maximum les focales des lentilles pour obtenir un microscope le plus efficace possible. En pratique cependant, des lentilles de très petites focales sont sujettes à de très fortes aberrations, on ne peut donc pas les choisir aussi petites qu'on veut.

8. On considère comme objet un réseau constitué de fines graduations séparées de 5 μm. Peut-on distinguer ces graduations à l'œil nu ? Peut-on les observer au microscope ? Justifier les réponses à l'aide de valeurs numériques. On donne 1 rad $\approx 57°$ et $1° \approx, 7 \cdot 10^{-2}$ rad.

Lors d'une observation à l'œil nu, on voit une graduation sous un angle $\boxed{\alpha = 2 \times 10^{-5}\,\text{rad}}$. Cet angle est plus petit que la limite de résolution de l'œil qui est d'une minute d'arc, soit environ 3×10^{-4} rad, on ne peut donc pas distinguer les graduations à l'œil nu.

Au microscope, l'angle sous lequel est vu les graduations est donné par $\boxed{\alpha' = G\alpha \sim 2 \times 10^{-2}\,\text{rad}}$,

bien plus grand que la limite de résolution de l'œil. On pourra donc distinguer ces graduations au microscope.

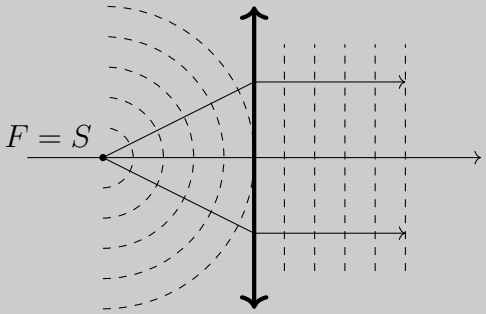
III - Surfaces d'onde

9 Actions d'une lentille sur les surfaces d'onde ♥★

Pour toutes les questions suivantes, indiquer quel type de lentille utiliser, et le cas échéant où se trouve le centre de l'onde sphérique. Tracer un schéma sur lequel apparaissent les rayons lumineux et les surfaces d'onde :

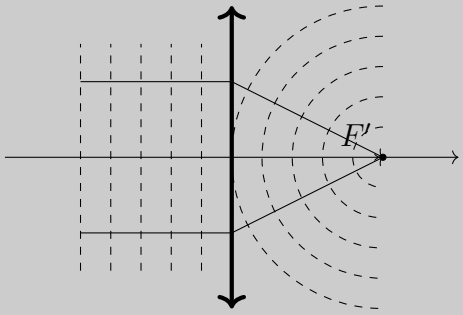
1. Comment transformer une onde sphérique en onde plane ?

On place le foyer objet d'une lentille convergente au centre de l'onde sphérique :



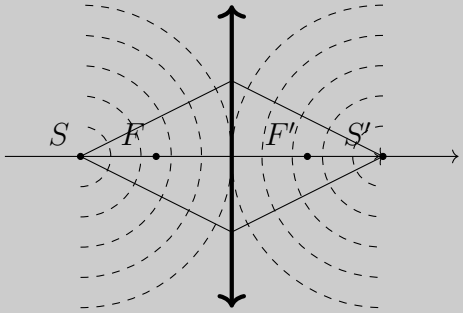
2. Comment transformer une onde plane en onde sphérique convergente ?

On place une lentille convergente :



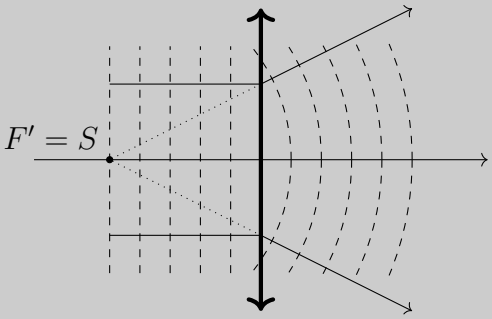
3. Comment transformer une onde sphérique divergente en onde sphérique convergente ?

On place une lentille convergente et on s'assure que le centre de l'onde incidente se trouve en amont du foyer objet :



4. Comment transformer une onde plane en une onde sphérique divergente ?

On place une lentille divergente :

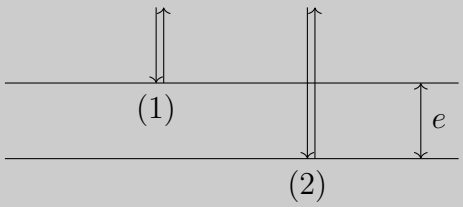


IV - Superposition de deux ondes

10 Flaque d'essence ♥★

Une goutte d'essence déposée sur une flaque d'eau s'étale en surface et forme une mince couche d'épaisseur e supposée uniforme. Un observateur regarde un reflet du soleil en incidence normale sur la flaque, et en se plaçant à la quasi-verticale de la flaque, il observe une teinte magenta. On rappelle que le magenta est la couleur complémentaire du vert.

1. En considérant uniquement les interférences entre une onde réfléchie sur l'interface air-huile et l'autre sur l'interface huile-eau, montrer que la condition d'interférences destructives s'écrit :
$$2n_{essence} \times e = \left(k + \frac{1}{2}\right) \lambda \tag{2}$$
avec k un entier et λ la longueur d'onde de la lumière dans le vide.



On considère un rayon (1) qui est réfléchi à la surface de la nappe d'essence et un rayon (2) réfléchi à l'interface essence-eau. La différence de marche correspond au chemin optique supplémentaire pour le rayon (2) :

$$\delta = 2n_{\text{essence}}e$$

Il y aura des interférences destructives si :

$$\exists k \in \mathbb{N} | \frac{2\pi}{\lambda}\delta = (2k+1)\pi$$

Autrement dit, pour que les interférences soient destructives, il faut qu'il existe un entier naturel k tel que :

$$\delta = 2n_{\text{essence}}e = \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

2. En déduire pourquoi le reflet est coloré.

Cette condition dépend de λ, ainsi seule une partie du spectre de la lumière blanche subit des interférences destructives. Le reflet que l'on observe est constitué des couleurs qui ne subissent pas d'interférences ou qui subissent des interférences constructives ; il est donc coloré.

3. Estimer l'épaisseur minimale de la tache donnance cette teinte. Peut-on déterminer l'épaisseur sans ambiguïté ?

Ici, le vert est éliminé, on observe donc le magenta (couleur complémentaire). En supposant $k = 0$ (épaisseur minimale permettant d'observer le reflet) on aura donc :

$$\boxed{e_{\min} = \frac{\lambda}{4n_{\text{essence}}} = 83\,\text{nm}}$$

On ne peut pas déterminer l'épaisseur sans ambiguïté car on pourrait très bien avoir $k \geq 1$. Cependant, si k est très élevé, il va y avoir des interférences destructives pour de nombreuses longueurs d'onde donc on n'observera pas de couleur marquée.

Données : $n_{\text{eau}} = 1.33$; $n_{\text{essence}} = 1.5$, $\lambda_{\text{vert}} = 500\,\text{nm}$.

11 Radar sur une falaise ★★



Figure 2: Le Barbados Cloud Observatory. Source : Institut Max-Planck de Météorologie.

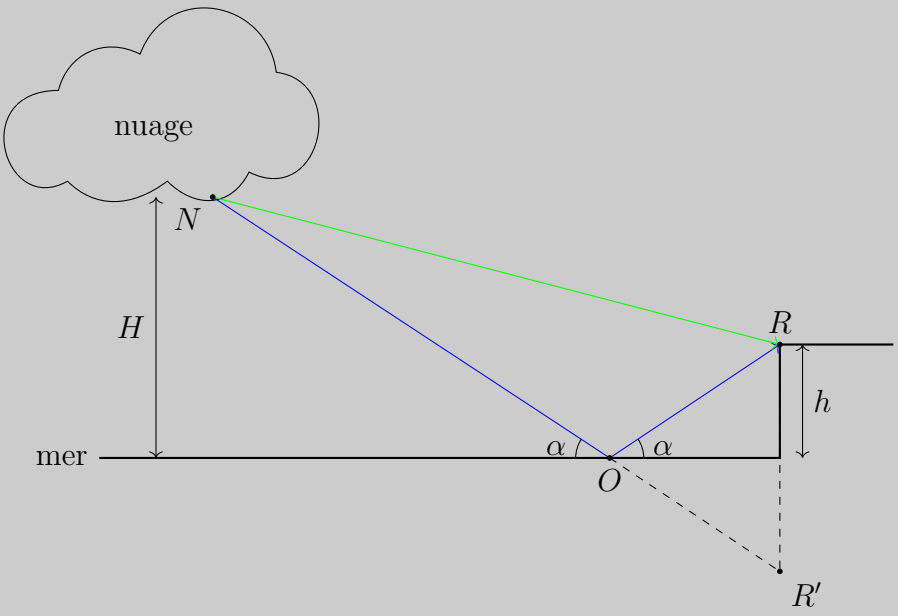
Le *Barbados Cloud Observatory* est un observatoire unique au monde : situé à la pointe la plus orientale des Antilles, au sommet de la falaise de Deebles Point, il permet d'observer les nuages d'alizé après leur longue traversée de l'Atlantique alors qu'ils ne sont pas encore perturbés par l'effet thermodynamique des îles. Nous nous intéressons à la détection d'un nuage par le radar situé à cet observatoire.

On note R la position de l'antenne, au sommet d'une falaise de hauteur $h = 30\,\text{m}$. L'antenne émet et reçoit des signaux de longueur d'onde $\lambda = 10\,\text{cm}$. Lorsqu'un nuage apparaît au-dessus de l'horizon, il réfléchit l'onde radar et peut donc être repéré par l'antenne.

Une réflexion produit une inversion du signe correspondant au signal radar, et donc un déphasage $\Delta\varphi_{\text{reflexion}} = \pi$.

La base des nuages se trouve typiquement à l'altitude $H = 500\,\text{m}$.

1. Sachant que le signal radar renvoyé par le nuage peut être réfléchi par la surface de l'océan, quel phénomène peut-on observer au niveau du radar? Faire un schéma de la situation en représentant deux rayons provenant du nuage : le premier direct et le deuxième subissant une réflexion sur l'océan.



On peut avoir un rayon direct (en vert) mais également un rayon réfléchi du nuage vers le radar R via une réflexion à la surface de l'océan.

2. Exprimer la différence de marche entre les deux rayons en fonction de h, H et la distance horizontale d entre le nuage et le radar. Le radar ayant une portée de 500 km, on pourra faire une hypothèse simplificatrice.

L'indice optique peut être supposé égal à 1 dans l'air ainsi :

$$\begin{cases} (NR)_{\text{direct}} = NR = \sqrt{d^2 + (H-h)^2} \\ (NR)_{\text{reflechi}} = NO + OR + \dfrac{\lambda}{2} = NR' + \dfrac{\lambda}{2} = \sqrt{d^2 + (H+h)^2} + \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\delta = \sqrt{d^2 + (H+h)^2} - \sqrt{d^2 + (H-h)^2} + \frac{\lambda}{2}$$

Or on a $d \approx 500\,\text{km}$ donc $d \gg h, H$ et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \delta &\approx d\left[\sqrt{1 + \left(\frac{H+h}{d}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{H-h}{d}\right)^2}\right] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx d\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{H+h}{d}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{H-h}{d}\right)^2\right] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx \frac{1}{2d}\left[(H+h)^2 - (H-h)^2\right] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx \frac{1}{2d}(2H \times 2h) + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\boxed{\delta = \frac{2hH}{d} + \frac{\lambda}{2}}$$

3. Le nuage, initialement très éloigné, se rapproche de l'observatoire en raison de l'alizé. A quelles distances va-t-on enregistrer les premiers minima de signal liés à la réflexion ?

On aura des interférences destructives si $\delta = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$. Les distances d_k pour lesquelles cette propriété est vérifiée sont données par :

$$d_k = \frac{4hH}{(2k+1)\lambda - \lambda} = \frac{2hH}{k\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

On obtient les valeur suivantes :

k	0	1	2	3	4
d [km]	300	150	100	75	60

On a donc des interférences destructuves de plus en plus fréquentes au fur et à mesure que le nuage se rapproche du radar.

4. En réalité, en raison de processus physiques liés à la diffusion des ondes par les gouttes de pluie, l'amplitude du signal de retour direct est nettement plus importante que celle du signal de retour réfléchi : $I_{\text{direct}} \gg I_{\text{reflechi}}$. Que peut-on en déduire sur le contraste des interférences ? Les observations seront-elles perturbées ?

Par la formule de Fresnel, avec $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$, on a :

$$I_{\text{tot}} = I_{\text{direct}} + I_{\text{reflechi}} + 2\sqrt{I_{\text{direct}} I_{\text{reflechi}}} \cos\left(2\pi\frac{\delta}{\lambda}\right)$$

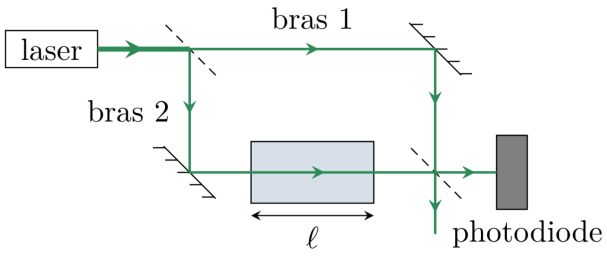
Le contraste vaut donc :

$$C = \frac{2\sqrt{I_{\text{direct}} I_{\text{reflechi}}}}{I_{\text{direct}} + I_{\text{reflechi}}} \approx 2\sqrt{\frac{I_{\text{direct}}}{I_{\text{reflechi}}}} \ll 1$$

Le contraste de ces interférences est très faible, donc elles ne perturbent pas les mesures du radar.

12 Interféromètre de Mach-Zender ♥★

Un interféromètre de Mach-Zehnder, schématisé ci-contre, est composé de deux miroirs et de deux lames semi-réfléchissantes 1, qui transmettent la moitié de l'intensité lumineuse et réfléchissent l'autre moitié. L'interféromètre est éclairé par un laser de longueur d'onde $\lambda = 532\,\text{nm}$, et une photodiode mesure l'intensité dans l'une des voies de sortie de l'interféromètre.



Une cuve fermée de longueur $\ell = 10.0\,\text{cm}$ est placée dans l'un des bras. Cette cuve contient initialement de l'air, d'indice optique n_{air}, progressivement remplacé par du méthane d'indice $n_{\text{CH}_4} > n_{air}$. Au cours de l'opération, la photodiode permet d'observer 32 variations successives d'intensité (clair/sombre).

1. Exprimer la différence de marche entre les deux faisceaux lorsque la cuve est remplie d'air, puis l'orsqu'elle est remplie de méthane, en fonction des longueurs géométriques L_1 et L_2 des bras de l'interféromètre.

Si la cuve est remplie d'air, les deux chemins optiques sont identiques et $\delta = 0$.
Si il y a du méthane les chemins seront différents. On note (C_i) le chemin optique le long du bras i, alors :

$$(C_1) - \ell n_{\text{air}} = (C_2) - \ell n_{\text{CH}_4}$$

D'où $\delta = (C_2) - (C_1) = \ell(n_{\text{CH}_4} - n_{\text{air}})$.

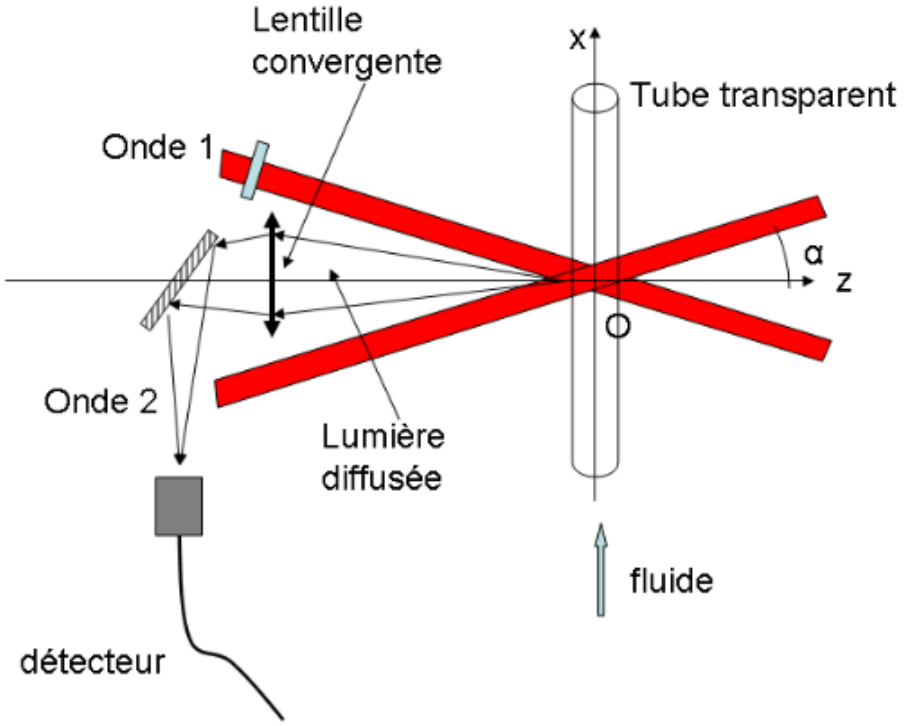
2. En déduire l'indice optique du méthane, sachant que $n_{air} = 1 + 2.78 \times 10^{-4}$

On observe 32 variations successives d'intensité, donc un déphasage entre les signaux de $\Delta\varphi = 32 \times 2\pi$. Or on sait que $\Delta\varphi = \dfrac{2\pi\delta}{\lambda}$. On en déduit que $\delta = 32\lambda$. Ou encore :

$$\boxed{n_{\text{CH}_4} = n_{\text{air}} + 32\frac{\lambda}{\ell} = 1 + 4.48 \cdot 10^{-4}}$$

13 Vélocimètre laser ★★

On souhaite mesurer la vitesse locale d'un fluide qui s'écoule dans un tuyau transparent. On ensemence l'écoulement avec des petites particules capables de diffuser la lumière (bulles, poussières...). Ces dernières sont emportées par l'écoulement et on pourra assimiler leur vitesse à celle du fluide. Afin de mesurer cette vitesse, on éclaire un point de l'écoulement à l'aide du dispositif représenté dans la figure ci-dessous.



La puissance de la lumière diffusée par la particule est proportionnelle à l'intensité lumineuse locale incidente. Les ondes (1) et (2) seront assimilées à des ondes planes au niveau du point de croisement O. Elles ont la même fréquence ν et leurs intensités sont égales (notées I_0). On cherche ici à calculer l'intensité lumineuse résultante dans la zone de croisement des faisceaux.

1. (a) Rappeler la forme générale de l'amplitude complexe $\underline{s}(\vec{r},t)$ d'une onde plane.

   On a $\underline{s}(\vec{r},t) = \underline{s}_0 e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$ où $||\vec{k}|| = \dfrac{\omega}{c}$ et $\omega = 2\pi\nu$.

   (b) Écrire les composantes des vecteurs d'onde $\vec{k_1}$ et $\vec{k_2}$ des ondes (1) et (2).

   Les deux vecteurs d'onde ont une norme $k_0 = n\dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\omega}{c}$ pour une propagation dans l'air. En raison de leur direction on a :

$$\begin{cases} \vec{k_1} = \dfrac{\omega}{c}(\cos\alpha\vec{e_z} - \sin\alpha\vec{e_x}) \\ \vec{k_2} = \dfrac{\omega}{c}(\cos\alpha\vec{e_z} + \sin\alpha\vec{e_x}) \end{cases}$$

(c) Donner les amplitudes $\underline{s_1}$ et $\underline{s_2}$ en fonction des coordonnées x, y, z.

L'amplitude des vibrations lumineuses est donnée par $s_0 = \sqrt{I_0}$, si on note $\Delta\varphi$ le déphasage entre les ondes alors :

$$\underline{s}_1 = s_0 e^{2i\pi\nu\left(t-\frac{1}{c}(\cos\alpha z - \sin\alpha x)\right)}$$

$$\underline{s}_2 = s_0 e^{2i\pi\nu\left(t-\frac{1}{c}(\cos\alpha z + \sin\alpha x)\right)+i\Delta\varphi}$$

Dans toute la suite on supposera $\Delta\varphi = 0$: cela simplifie les calculs et ne modifie pas les conclusions (il est néanmoins possible de faire des calculs avec $\Delta\varphi = 0$).

(d) En déduire l'amplitude totale $\underline{s}_{\text{tot}}(\vec{r}, t)$.

On a, par principe de superposition $\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$. On utilise les formules de Moivre pour obtenir, après factorisation des exponentielles complexes :

$$\underline{s}_{tot} = \sqrt{I_0} e^{2i\pi\nu\left(t-\cos\alpha\frac{z}{c}\right)} \times 2\cos\left(\frac{2\pi\nu x}{c}\sin\alpha\right)$$

2. En déduire l'intensité totale $I(x, y, z)$ en un point $M(x, y, z)$ de la zone de croisement. Montrer que I est invariante dans la direction z et sinusoïdale dans la direction x, déterminer l'interfrange i.

Par définition de l'intensité $I_{tot} = \langle \Re(\underline{s}_{tot})^2 \rangle$, où la moyenne est une moyenne temporelle. Ainsi, la moyenne du carré d'un cosinus donnant $\frac{1}{2}$, on trouve :

$$I(x, y, z) = 4I_0 \times \frac{1}{2} \times \cos^2\left(\frac{2\pi\nu x}{c}\sin\alpha\right) = I_0\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right)\right]$$

où l'interfrange i est donné par :

$$\boxed{i = \frac{c}{\nu \sin\alpha}}$$

On obtient bien une intensité qui forme des franges orientées selon l'axe Oz, ainsi l'intensité varie en fonction de x mais pas de z.

3. Supposons qu'une particule passe à travers le champ d'interférence avec une vitesse uniforme $\vec{v}$. Notons $v_{\parallel}$ la composante de cette vitesse dans la direction de modulation de l'intensité.

(a) Quelle est la période T du signal lumineux enregistré par le détecteur ?

Le détecteur va enregistrer un maximum d'intensité à chaque fois que la particule passe dans une frange brillante, donc pour une période :

$$T = \frac{i}{v_\parallel} = \frac{c}{\nu v_\parallel \sin\alpha} = \frac{\lambda}{v_\parallel \sin\alpha}$$

où $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ est la longueur d'onde des ondes lumineuses utilisées.

(b) Expliquer le principe de la mesure de vitesse.

On peut alors mesurer la fréquence f du signal d'intensité mesuré, typiquement avec un oscilloscope. On en déduit la vitesse par la formule suivante :

$$\boxed{v_\parallel = \frac{\lambda f}{\sin\alpha}}$$

(c) Est-il possible d'en déduire le sens de l'écoulement ?

Ce n'est pas possible avec cette méthode, car la fréquence mesurée est toujours positive et ne dépend pas du sens de l'écoulement. Pour mesurer le sens de l'écoulement, il faudrait connaître précisément la phase des signau envoyés et mesurer le déphasage du signal reçu, ce qui n'est généralement pas possible avec des sources lumineuses, la phase étant aléatoire (modèle des trains d'onde).

4. Le résultat de la question précédente repose sur un raisonnement physique discutable. A cause de l'effet Doppler, les ondes diffusées par les particules et reçues par le détecteur n'ont pas la même fréquence. Tout au long de son parcours, la particule reçoit l'onde (1) et la diffuse sous la forme d'une onde de fréquence ν_1 dans la direction du détecteur. Dans le même temps elle reçoit l'onde (2) et la diffuse également vers le détecteur sous la forme d'une onde de fréquence ν_2. Le détecteur reçoit les deux ondes diffusées.

(a) Justifier que l'effet Doppler appliqué à cette situation donne une différence de fréquence :

$$\nu_1 - \nu_2 = 2\nu\frac{v_\parallel}{c}\sin\alpha \tag{3}$$

Par effet Doppler, lorsque l'onde est réfléchie par la particule, sa fréquence est modifiée selon la relation suivante :

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v_D}{c}\right)$$

où v_D est la composante de la vitesse de la particule prise parallèlement et dans le même sens que le vecteur d'onde $\vec{k}_{\text{incident}}$ de l'onde incidente. Ici, on aura donc

:

$$\begin{cases} \nu_1 = \nu\left(1 + \dfrac{v_\parallel}{c}\sin\alpha\right) \\ \nu_2 = \nu\left(1 - \dfrac{v_\parallel}{c}\sin\alpha\right) \end{cases}$$

Donc on a bien $\nu_1 - \nu_2 = 2\nu\dfrac{v_\parallel}{c}\sin\alpha$.

(b) Prévoir la structure de l'amplitude complexe du champ résultant de la superposition des ondes diffusées sur le détecteur.

On a désormais :

$$\underline{s}_1 = \sqrt{I_0}e^{2i\pi\nu_1\left(t-\cos\alpha\frac{z}{c}+\sin\alpha\frac{x}{c}\right)}$$
$$\underline{s}_2 = \sqrt{I_0}e^{2i\pi\nu_2\left(t-\cos\alpha\frac{z}{c}-\sin\alpha\frac{x}{c}\right)}$$

On somme à nouveau les deux signaux et on factorise par l'angle moitié pour utiliser la formule de Moivre du cosinus. En remarquant que $\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2} = \nu$ et $\dfrac{\nu_1-\nu_2}{2} = \nu\dfrac{v_\parallel}{c}\sin\alpha$, on obtient alors :

$$\underline{s}_{tot} = \sqrt{I_0}e^{2i\pi\nu\left(t-\cos\alpha\frac{z}{c}+\sin^2\alpha\frac{v_\parallel x}{c^2}\right)} \times 2\cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}\sin\alpha(x+v_\parallel t)\right)$$

(c) Le détecteur n'étant sensible qu'aux variations lentes de l'intensité (cf cours), montrer que le signal mesuré est sinusoïdal et a bien la période T trouvée à la question précédente.

On voit apparaître deux fréquences dans le signal $\underline{s}_{tot}$: la fréquence ν qui est très rapide (fréquence des vibrations lumineuses) mais aussi la fréquence $\nu\frac{v_\parallel}{c} = \frac{v_\parallel}{\lambda}$. Si on prend $v_\parallel \approx 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$ on trouve que cette fréquence vaut environ 2000 kHz ce qui est tout à fait mesurable avec un oscilloscope. Ainsi, la moyenne temporelle ne porte que sur les oscillations les plus rapides. L'intensité en fonction du temps sera donc donnée par :

$$I_{tot}(t) = I_0 \times \frac{1}{2} \times 4\cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha(x+v_\parallel t)\right)$$

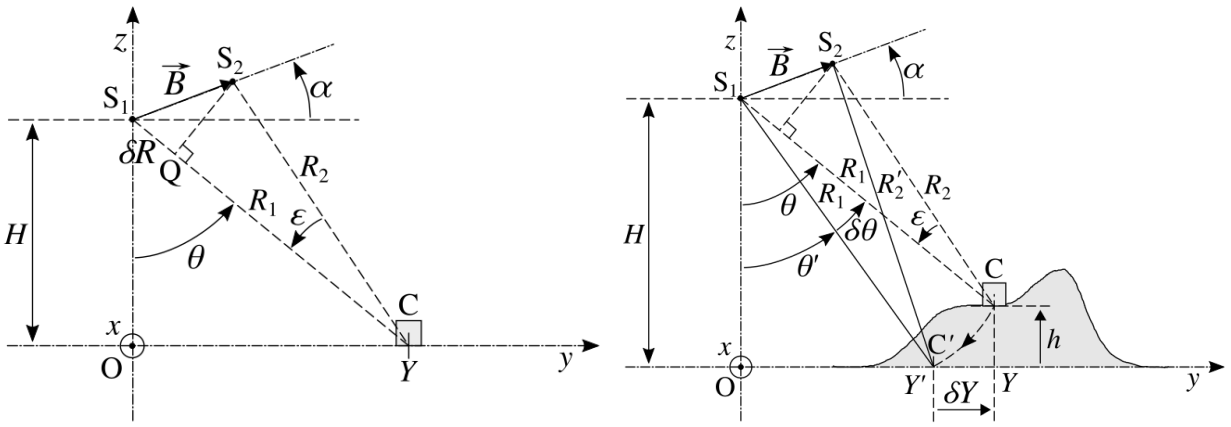
Ou encore :

$$I_{tot}(t) = I_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\sin\alpha(x+v_\parallel t)\right)\right]$$

On retrouve bien un signal sinusoïdal en fonction de temps, de fréquence $f = \dfrac{v_\parallel}{\lambda}\sin\alpha$ comme établi à la question précédente.

14 Méthode InSAR pour la détection des séismes ★★★

La méthode InSAR consiste à faire interférer deux signaux enregistrés durant deux observations de la même cible par un satellite, en exploitant les légères imprécisions du contrôle de sa trajectoire orbitale. Le satellite est en orbite à une altitude $H = 700\,\text{km}$. Une première image radar, à la longueur d'onde $\lambda = 3\,\text{cm}$, est réalisée lorsque le satellite est en position S_1 : il envoie un signal vers la cible C et mesure le signal réfléchi lorsqu'il arrive à nouveau sur le satellite. Après avoir parcouru un ou plusieurs cycle orbitaux, celui-ci se retrouve presque à la même position, en S_2. Il prend alors une seconde image radar. La partie gauche de la figure suivante illustre cette situation.



Nous situons la position du point S_2 par rapport au point S_1 par le vecteur $\vec{B} = \overrightarrow{S_1S_2}$. Nous notons $\alpha = (\vec{e_y}, \vec{B})$ et $\epsilon = (\overrightarrow{CS_2}, \overrightarrow{CS_1})$. Le point Q, défini sur la figure, est le projeté orthogonal du point S_2 sur l'axe (S_1C). Nous notons $\delta R = (S_1Q)$. Il s'agit d'une grandeur algébrique. Nous conduisons cette étude dans la situation telle que $B = 100\,\text{m}$ et $\alpha \in [0, 2\pi]$.

1. Nous commençons par étudier le signal observé par le satellite sur un sol plat.

   (a) Le satellite observe une zone de la surface terrestre d'extension $\Delta y = 30\,\text{km}$, délimitée angulairement par les angles $\theta_0 = 30°$ et θ_1 ($\theta_1 > \theta_0$). Vérifier que toute cible située dans cette zone est vue selon un angle $\theta = \theta_0 + \beta$ tel que $\beta \ll 1$.

   On a $\Delta y = H(\tan\theta_1 - \tan\theta_0)$. On en déduit que :

   $$\theta_1 = \arctan\left(\tan\theta_0 + \frac{\Delta y}{H}\right) = 31.8°$$

   Ainsi : $\theta_1 - \theta_0 = 1.8° = 0.03\,\text{rad} \ll 1$. A fortiori, toute cible dans la zone sera bien vue sous un angle $\theta_0 + \beta$ avec $0 \leq \beta \leq \theta_1 - \theta_0 \ll 1$.

   (b) Exprimer, en fonction de B, θ et α, la projection δR définie sur la figure.

On a $\widehat{YS_1S_2} = \alpha + \dfrac{\pi}{2} - \theta$, ainsi :

$$\delta R = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right) = \boxed{B\sin(\theta - \alpha)}$$

(c) Justifier que $|\epsilon| \ll 1$. En conséquence, nous considérerons que les directions (S_1C) et (S_2C) sont parallèles et donc que $R_2 = R_1 - \delta R$.

$$\sin\varepsilon = \frac{S_2Q}{R_2} = \frac{\sqrt{B^2 - \delta R^2}}{R_2} = \frac{B}{R_2}\cos(\theta - \alpha)$$

Or on sait que $B = 100\,\text{m}$ et $R_2 > H = 700\,\text{km}$. Donc :

$$|\sin\varepsilon| \leq \frac{100}{7 \cdot 10^5} = 1.5 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

(d) Exprimer, en fonction de B, λ, θ et α, la différence de phase $\Delta\phi_{\text{tp}} = \phi_1 - \phi_2$ des deux signaux réceptionnés.

La différence de marche entre les deux chemins est :

$$\delta = (S_1CS_1) - (S_2CS_2) = 2(R_1 - R_2) = 2\delta R = 2B\sin(\theta - \alpha)$$

car le signal fait un aller-retour entre le satellite et la cible dans chaque cas. Ainsi :

$$\Delta\phi_{\text{tp}} = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{4\pi B}{\lambda}\sin(\theta - \alpha)$$

(e) Caractériser l'angle de vue $\theta_n = \theta_0 + \beta_n$ d'une cible C_n qui conduit à des interférences constructives entre les signaux reçus par le satellite successivement dans les positions S_1 et S_2.

Il y a des interférences constructives si $\exists n \in \mathbb{N}, \Delta\phi_{\text{tp}} = 2\pi n$. On note θ_n les angles vérifiant cette condition, alors :

$$\sin(\theta_n - \alpha) = \frac{n\lambda}{2B}$$

Or $\theta_n - \alpha = \theta_0 - \alpha + \beta_n$ avec $\beta_n \ll 1$. Un développement limité à l'ordre 1 en β_n fournit :

$$\sin(\theta_n - \alpha) \approx \sin(\theta_0 - \alpha) + \beta_n\cos(\theta_0 - \alpha)$$

Et donc :

$$\beta_n = \frac{1}{\cos(\theta_0 - \alpha)}\left(\frac{n\lambda}{2B} - \sin(\theta_0 - \alpha)\right)$$

(f) Quelle est la figure d'interférences obtenue ? Montrer que l'interfrange w s'exprime selon la relation suivante :

$$w = Y_{n+1} - Y_n = \frac{\lambda H}{2B} Q(\theta_0, \alpha) \tag{4}$$

où la fonction Q est à déterminer.

Les positions des maxima d'intensité sont obtenues en :

$$Y_n = H \tan\theta_n = H \tan\theta_0 + \frac{H}{\cos^2\theta_0}\beta_n$$

où on a fait un développement limité d'ordre 1 en β_n. On en déduit :

$$Y_n = \frac{H}{\cos^2\theta_0 \cos(\theta_0 - \alpha)} \left(\frac{n\lambda}{2B} - \sin(\theta_0 - \alpha) \right)$$

Y_n varie linéairement en fonction de n : la figure d'interférences correspond donc à des franges réguilèrement espacées. L'interfrange est donné par :

$$\boxed{w = Y_{n+1} - Y_n = \frac{\lambda H}{2B} \times \frac{1}{\cos^2\theta_0 \cos(\theta_0 - \alpha)}}$$

(g) Justifier que l'abscisse Y peut être déduite de la mesure du temps de parcours. La composante de phase $\Delta\phi_{\text{tp}}(Y')$ peut donc être calculée théoriquement et soustraite du déphasage mesuré.

On sait que $Y^2 + H^2 = R_1^2$, or H est connue, et R_1 peut être déduite de la mesure du temps de parcours aller-retour du signal. Il est donc possible de déterminer Y et de calculer la valeur théorique de $\Delta\phi_{\text{tp}}(Y)$ afin de la corriger, pour voir uniquement les effets liés à la topographie.

2. La présence d'un relief modifie la géométrie des franges par rapport à la situation de terrain plat. Considérons à présent une cible située à une altitude h ($h \ll H$), comme le représente la partie droite de la figure. La mesure du délai émission-réception ne donnant accès qu'à une distance, il est impossible de connaître la position exacte de la cible et le signal reçu de la cible C de coordonnées (Y, h) est attribué à une cible apparente C' située dans le plan (O, x, y), de coordonnées $(Y' = Y - \delta Y, 0)$, correspondant à l'angle de visée $\theta' = \theta - \delta\theta$ et telle que $||\overrightarrow{S_1C}|| = ||\overrightarrow{S_1C'}||$.

   (a) Établir, qu'au premier ordre : $\delta Y \approx \dfrac{H}{Y} h$.

On a $Y = R_1 \sin\theta$ et $Y' = R_1 \sin\theta'$. On soustrait ces équations et on fait un développement limité d'ordre 1 :

$$\delta Y = R_1(\sin\theta - \sin\theta') = R_1 \cos\theta \times \delta\theta = H\delta\theta$$

De la même manière $H = R_1 \cos\theta$ et $H_h = R_1 \cos\theta'$ donc :

$$h = R_1(\cos\theta' - \cos\theta) = R_1 \sin\theta \times \delta\theta = Y\delta\theta$$

On en déduit que $\dfrac{\delta Y}{h} = \dfrac{H}{Y}$ et donc que $\delta Y = \dfrac{H}{Y}h$.

(b) Établir que le déphasage total du signal reçu par le satellite en position S_1, par rapport à celui reçu en position S_2 , attribué à la cible apparente C, s'exprime par la relation suivante :

$$\Delta\phi(Y') = \Delta\phi_{\text{tp}}(Y') + \Delta\phi_{\text{topo}}(Y') \qquad \text{avec} \qquad \Delta\phi_{\text{topo}}(Y') = \frac{4\pi}{\lambda}\frac{hB}{Y'}\cos(\theta' - \alpha) \quad (5)$$

La différence de marche vaut toujours $\delta = 2\delta R = 2B\sin(\theta - \alpha)$. Mais on veut l'exprimer en fonction de Y' et H donc en fonction de θ'. On écrit donc $\theta - \alpha = \theta' - \alpha + \delta\theta$ et on développe à l'ordre 1 avec :

$$\sin(\theta - \alpha) = \sin(\theta' - \alpha) + \cos(\theta' - \alpha)\delta\theta$$

Cela fait apparaître deux termes, la différence de marche devient :

$$\delta = \delta_{\text{tp}}(Y') + \delta_{\text{topo}}(Y')$$

Le premier terme est inchangé par rapport à la situation de sol plat et, en remarquant que $\delta\theta = \dfrac{h}{Y'}$ (Q2a) on trouve :

$$\delta_{\text{topo}}(Y') = 2B\cos(\theta' - \alpha)\frac{h}{Y'}$$

On en déduit la formule demandée :

$$\Delta\phi_{\text{topo}}(Y') = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \frac{hB}{Y'}\cos(\theta' - \alpha)$$

(c) En raison notamment des perturbations atmosphériques, la précision de la mesure du déphasage est de l'ordre de $\Delta\phi_{\text{bruit}} \approx \dfrac{\pi}{4}$. Estimer la précision attendue d'une mesure d'altitude basée sur la mesure de $\Delta\phi_{\text{topo}}$ pour une visée à $\theta' = 30°$ et $\alpha = 0$.

Alors en réutilisant la formule précédente :

$$u(h) = \frac{\lambda Y'}{4\pi B \cos(\theta' - \alpha)} u(\Delta\phi) \approx 1\,\text{cm}$$

où on a utilisé $Y' = H \tan\theta'$ pour le calcul. Cette méthode permet donc de mesurer l'altitude avec une précision centimétrique, similaire à la précision obtenue avec les meilleurs GPS actuels (il faut laisser le GPS en place plusieurs heures pour obtenir une telle précision).

En pratique, on utilise des mesures faites par d'autres méthodes pour accéder au profil $h = h(y)$ du relief. Il est alors possible de rectifier les positions sur les images et de soustraire la composante $\Delta\phi_{\text{topo}}$ au déphasage.

3. Nous supposons, qu'entre les deux prises d'image par le satellite depuis les points S_1 et S_2 , la cible C a subi un petit déplacement vertical η (soit $h \to h + \eta$). Nous avons vu que nous pouvons calculer et corriger le déphasage $\Delta\phi_{\text{tp}}$ et $\Delta\phi_{\text{topo}}$. Ainsi, le seul déphasage à considérer est celui lié à la variation de distance $||\overrightarrow{S_2C}(h+\eta)|| - ||\overrightarrow{S_2C}(h)||$.

   (a) Établir que ce déplacement induit le déphasage supplémentaire $\Delta\phi_d = \dfrac{4\pi}{\lambda}\eta\cos\theta$. On se souviendra que les direction (CS_1) et (CS_2) sont quasi-parallèles.

   On montre par un schéma et un calcul analogue à celui mené en Q1b que $||\overrightarrow{S_2C}(h+\eta)|| - ||\overrightarrow{S_2C}(h)|| = \eta\cos\theta$. Ainsi on a $\delta = 2\eta\cos\theta$ et $\Delta\phi_d = \dfrac{4\pi}{\lambda}\eta\cos\theta$.

   (b) Estimer la valeur du déplacement minimal $\eta_{\min}$ décelable.

   A partir de l'expression précédente on trouve :

$$\eta_{\min} = \frac{\lambda}{4\pi\cos\theta} u(\Delta\phi) = 22\,\text{mm}$$

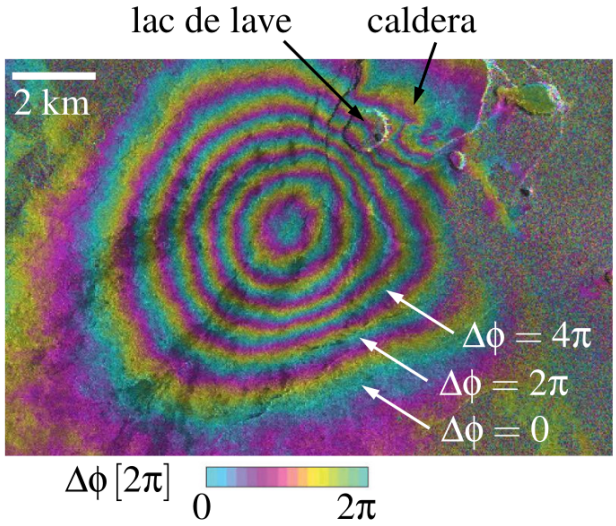
   Une fois les corrections de $\Delta\phi_{\text{tp}}$ et $\Delta\phi_{\text{topo}}$ faites, on peut mesurer les vairations de position avec une précision très importante, ce qui fait tout l'intérêt de la méthode InSAR.

   (c) La figure suivante représente les franges d'interférences résultant de la somme de deux images du volcan Kilauea (cratère Halema'uma'u) à Hawaii. Elles ont été prises à un mois d'intervalle, sous un angle de visée $\theta = 44°$. Estimer la surrection (ou soulèvement) η_s du volcan.

   On lit $\Delta\phi = 12\pi = \dfrac{4\pi}{\lambda}\eta\cos\theta$. D'où :

$$\eta = \frac{3\lambda}{\cos\theta} \approx 1.0\,\text{cm}$$

On a ainsi eu une surrection du volcan d'environ un centimètre en un mois (ce qui traduit la mise sous pression de gaz ou bien l'accumulation de magma à l'intérieur du volcan).



V - Notion de cohérence

15 Largeur naturelle et largeur Doppler ♥★

1. Quelle est la fréquence centrale ν_0 d'une raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$? Quelle est sa couleur ?

$\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$. Sa couleur est verte.

2. La longueur de cohérence d'une telle raie de lampe spectrale liée à la seule largeur naturelle serait de $L_c = 3\,\text{m}$. Expliquer cette notion et en déduire la durée τ_0 des trains d'onde émis ainsi que la largeur spectrale naturelle $\Delta\nu$ de la raie. Quelle est la largeur $\Delta\lambda$ associée ?

La largeur de cohérence correspond à la taille d'un train d'onde émis par la source. On a $L_c = c\tau_0$ d'où :

$$\tau_0 = \frac{L_c}{c} = 10\,\text{ns}$$

Par ailleurs on sait que $\tau\Delta\nu \approx 1$ donc la largeur de la raie vérifie :

$$\Delta\nu \approx \frac{1}{\tau_0} = 10^8\,\text{Hz}$$

Enfin on a $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$ donc $\lambda\nu = c$. En prenant la différentielle logarithmique on trouve $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} + \dfrac{\Delta\nu}{\nu} = 0$ et donc (en comptant $\Delta\lambda$ positivement) :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{\Delta\nu}\nu = 8 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$$

3. En réalité, en raison de l'agitation thermique des molécules emettrices, la fréquence perçue est $\nu = \nu_0(1 \pm \frac{v}{c})$ où $\pm v$ est la vitesse des molécules le long de l'axe optique par rapport à l'observateur.

   (a) Quel est l'effet physique qui cause ce décalage de fréquence ?

   Il s'agit de l'effet Doppler : le mouvement des particules modifie la fréquence de l'onde émise dans le référentiel de l'observateur.

   (b) Quelle est la largeur $\Delta\nu$ de la raie si on assimile la vitesse v à la vitesse quadratique moyenne lorsque la température est $T = 320\,\mathrm{K}$, pour un gaz de masse molaire $M = 44\,\mathrm{g/mol}$?

   La vitesse quadratique liée à l'agitation thermique est donnée par le cours de MPSI :

   $$v \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

   On a donc :

   $$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v}{c} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{RT}{M}} = 4.9 \cdot 10^8\,\mathrm{Hz}$$

   Cet effet est donc non négligeable.

16 Écholocation par les chauve-souris ★★

Document 1 : Extrait de *Irremplaçables chauve-souris*, Parc National de la Guadeloupe Les chauves souris, scientifiquement nommées chiroptères (littéralement les mains-ailes), sont les uniques mammifères indigènes de Guadeloupe, c'est-à-dire les seuls présents naturellement sur l'archipel. Il existerait dans le monde environ 1 400 espèces de chauves-souris, soit un cinquième des 6 500 espèces de mammifères connues.

Bien qu'elles soient toutes des animaux nocturnes volants, les espèces de chauves-souris n'ont pas toutes le même régime alimentaire ni le même habitat ; certaines se retrouvent plutôt en mangrove, en forêt humide ou en zone urbaine.

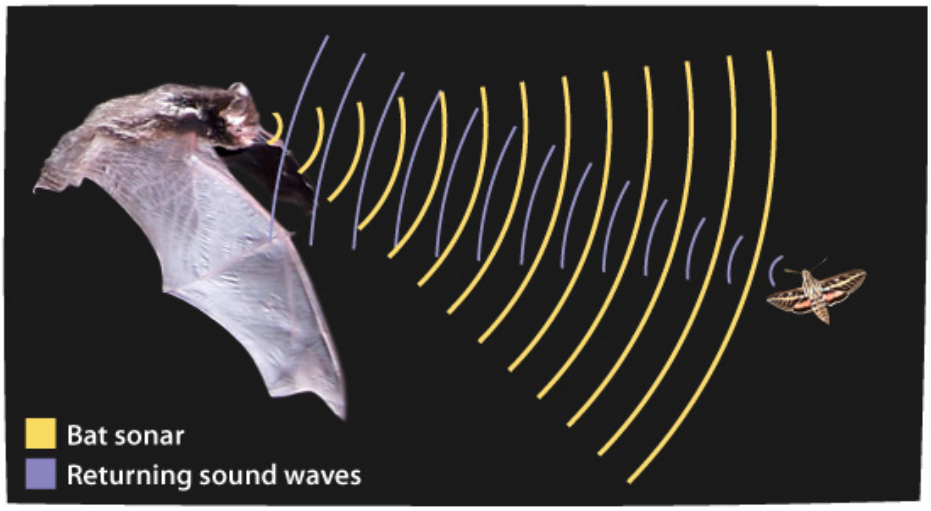
Certaines espèces sont insectivores (Eptesicus guadeloupensis, Molossus molossus, Myotis dominicensis, Natalus stramineus, Pteronotus davyi, Tadarida brasiliensis) et vont donc

déguster à la nuit venue : moustiques, moucherons, papillons, fourmis volantes, termites etc. Elles ont un rôle dans la régulation des insectes notamment des moustiques. En consommant de grandes quantité d'insectes (le molosse commun par exemple consommerait chaque nuit entre 200 et 600), les chauves-souris s'apparentent donc à un insecticide géant naturel et gratuit.

Les chiroptères peuvent également pêcher, c'est le cas de la piscivore Noctilio leporinus, qui est la plus grande des chauves-souris de Guadeloupe.

Document 2 : *What is Echolocation ?*, Arizona State University Echolocation is the use of sound waves and echoes to determine where objects are in space. Bats use echolocation to navigate and find food in the dark. To echolocate, bats send out sound waves from the mouth or nose. When the sound waves hit an object they produce echoes. The echo bounces off the object and returns to the bats' ears. Bats listen to the echoes to figure out where the object is, how big it is, and its shape.

Using echolocation, bats can detect objects as thin as a human hair in complete darkness. Echolocation allows bats to find insects the size of mosquitoes, which many bats like to eat. Bats aren't blind, but they can use echolocation to find their way around very quickly in total darkness.



Document 3 : *Son émis par les chauve-souris*, adapté de Arizona State University et Weizmann Institute of Science Pour chasser, les différentes espèces de chauve-souris émettent des sons variés. Certaines émettent un signal relativement long de durée τ à une fréquence constante f_0 (CF-FM call) :

$$s(t) = s_0 \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f_0 t) \tag{6}$$

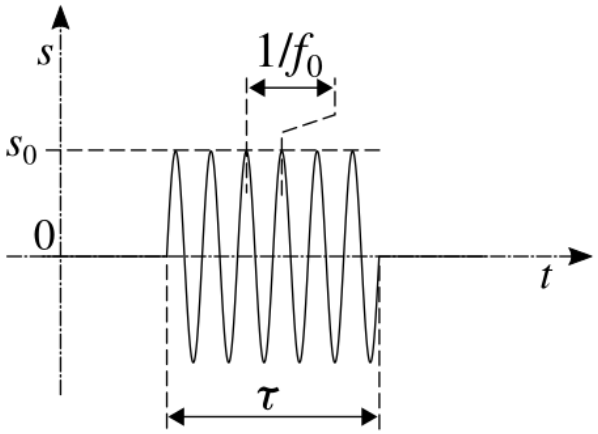


Figure 3: Allure du signal CF-FM émis par la chauve-souris *Rhinolophus*.

où $\Pi(x) = 1$ si $0 < x < 1$ et $\Pi(x) = 0$ sinon. Ces chauve-souris sont capables de détecter la vitesse de vol des insectes qu'elles chassent mais ne peuvent pas mesurer déterminer leur position avec précision.

D'autres chauve-souris émettent un signal avec une fréquence modulée qui diminue avec le temps :

$$s(t) = s_0 \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \cos(2\pi f(t) t) \tag{7}$$

Avec $f(t) = f_0\left(1 - \frac{t}{2\tau}\right)$ une fonction décroissante qui varie entre $f_{\max} = 100\,\text{kHz}$ et $f_{\min} = 50\,\text{kHz}$. Un tel signal peut être entendu dans l'enregistrement MP3 sur Cahier de Prépa (source : Arizona State University).

Lorsque la chauve-souris s'approche de sa proie, elle augmente la fréquence à laquelle elle émet les sons pour la localiser plus souvent.

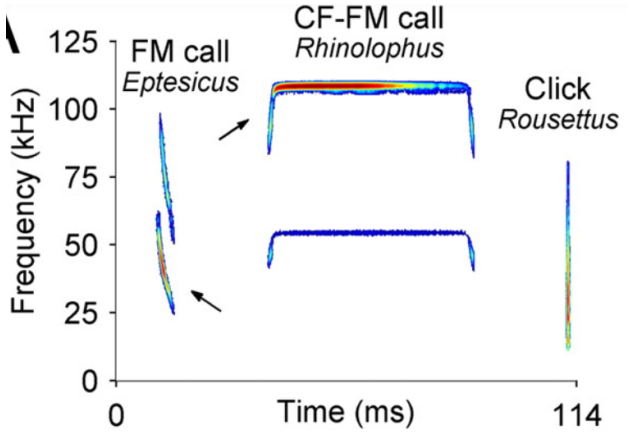


Figure 4: Fréquence en fonction du temps pour plusieurs espèces de chauve-souris. Nous nous intéressons au cas FM et CF-FM dans cet exercice. Source : Ulanovski&Moss, *What the bat's voice tells the bat's brain* (2008)

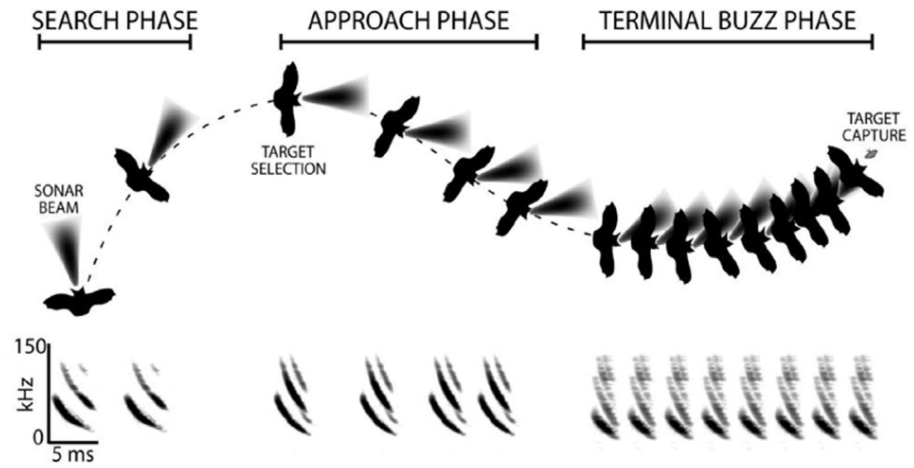


Figure 5: Evolution de la fréquence des sons émis lors de la chasse de la chauve-souris. Source : Moss&Surlykke, *Probing the natural scene by echolocation in bats* (2010)

1. Expliquer le principe de l'écholocation. Relier l'écart temporel Δt entre le signal émis et le signal reçu par la chauve-souris à la distance R de la cible. On notera c la célérité du son dans l'air.

   La célérité du son dans l'air étant une grandeur relativement constante, la chauve-souris peut mesurer le temps de trajet aller-retour du signal sonore et en déduire la distance parcourue par le son lorsqu'il revient à ses oreilles après réflexion sur la cible. On a en effet : $2R = c\Delta t$.

2. On s'intéresse désormais à la perte d'énergie associée à la propagation de l'onde. L'onde est émise avec une puissance totale $\mathcal{P}_e$ et on note $\mathcal{P}_r$ la puissance reçue par la chauve-souris. On note S_i la section de l'insecte (dans la direction perpendiculaire à la chauve souris) et S_c la section des oreilles de la chauve-souris. L'insecte est toujours situé à une distance R de la chauve souris.

   (a) Quelle est la nature des surfaces d'onde autour de la chauve-souris ? Déterminer la puissance par unité de surface lorsque l'onde arrive sur l'insecte.

   L'onde émise par la chauve-souris est une onde sphérique si on se situe à une distance R grande par rapport à la taille de la chauve-souris. La puissance totale se répartit sur la surface d'onde qui a une aire $4\pi R^2$, ainsi la puissance par unité de surface vaut $\dfrac{\mathcal{P}_e}{4\pi R^2}$.

   (b) En déduire la puissance de l'onde réfléchie par l'insecte.

L'insecte intercepte cette puissance sur une section S_i ainsi, e, supposant que la totalité de la puissance interceptée est réfléchie on a $\mathcal{P}_{\text{reflechie}} = \dfrac{S_i}{4\pi R^2}\mathcal{P}_e$.

(c) En déduire le rapport $\dfrac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_e}$ en fonction de S_i, S_c et R. Proposer une application numérique avec des ordres de grandeur cohérents.

De la même façon qu'en 2a et 2b on a alors une puissance reçue par la chauve-souris $\mathcal{P}_r = \frac{S_c}{4\pi R^2}\mathcal{P}_{\text{reflechie}}$. On en déduit :

$$\frac{\mathcal{P}_r}{\mathcal{P}_i} = \frac{S_i S_c}{16\pi^2 R^4} \approx \frac{\ell_i^2 \ell_c^2}{16 R^4} \approx 6 \cdot 10^{-10}$$

où on a supposé $S_i = \pi\ell_i^2$ et $S_c = \pi\ell_c^2$ avec $\ell_i \approx 5\,\text{mm}$ le rayon de l'insecte (par exemple un moustique) et $\ell_c \approx 2\,\text{cm}$ le rayon des oreilles de la chauve-souris. On a pris $R = 1\,\text{m}$.

(d) Expliquer alors pourquoi il est nécessaire pour la chauve-souris d'émettre un signal de durée τ suffisamment longue.

Seule une infime fraction de l'énergie émise par la chauve-souris revient vers elle ce qui implique d'utiliser un signal suffisamment énergétique, et donc, suffisamment long.
Remarque : en réalité, le son émis est directionnel, ce qui permet de limiter un peu la déperdition d'énergie du signal.

3. On étudie la chauve-souris de genre *Rhinolophus*, qui émet un pulse de fréquence unique.

(a) Comment qualifier le signal $s(t)$ émis par la chauve-souris ? Quel est son temps de cohérence ?

Ce signal correspond à un train d'onde unique, de fréquence f_0 et de durée τ. Le temps de cohérence est la durée du train d'onde, et il faut donc également τ.

(b) Déterminer la précision Δx de la mesure de la position de l'insecte en fonction du temps τ. Proposer une application numérique. La vitesse du son dans l'air est de $340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La mesure du retard Δt sera limitée par la durée du train d'onde : on ne peut pas avoir une précision meilleure que τ, ainsi $u(\Delta t) = \tau$. En propageant les incertitudes :

$$u(R) = \frac{c}{2}u(\Delta t) = \frac{c\tau}{2} = 0.85\,\text{m}$$

pour un signal d'une durée $\tau = 5\,\text{ms}$. Cette incertitude importante peut rendre difficile la chasse de petits insectes comme les moustiques.

(c) Rappeler ce qu'est l'effet Doppler et montrer que le mesure de la fréquence f_r du signal reçu permet de déterminer la composante $v_\parallel$ de la vitesse de l'insecte le long de la ligne de visée de la chauve souris. Exprimer f_r en fonction de f_0, c et $v_\parallel$.

Lors de la réflexion de l'onde émise sur la cible en mouvement, la fréquence f du signal va être modifiée, et la fréquence du signal reçu sera donnée par :

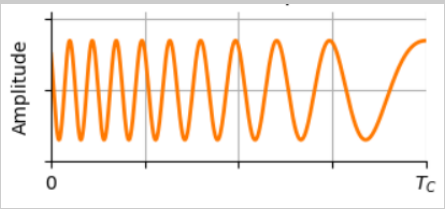
$$f_r = f_0 \left(1 - \frac{v_\parallel}{c}\right)$$

où $v_\parallel$ est la composante de la vitesse parallèle à l'axe reliant la chauve-souris et sa proie, dans le sens orienté vers la proie. La mesure de f_r permet ainsi de mesurer la vitesse de la proie et est particulièrement utile pour chasser.

4. On s'intéresse désormais aux chauve-souris du genre *Eptesicus* qui émettent un signal de fréquence variable. Pour détecter le signal retour, la chauve-souris fait interférer le signal retour (reçu par les oreilles) avec un signal sinusoïdal de fréquence f_0.

(a) Représenter l'allure du signal $s(t)$. Quel est son temps de cohérence ?

$s(t)$ est un signal qui oscille d'abord très rapidement, puis de moins en moins rapidement mais toujours avec la même amplitude :



Le temps de cohérence du signal est donné par la relation $\Delta f \times \tau_c \approx 1$, avec $\Delta f = 80\,\text{kHz}$ la largeur de la bande de fréquence balayée, ainsi :

$$\tau_c = \frac{1}{\Delta f} 10^{-5}\,\text{s}$$

(b) En déduire que le signal reçu peut être localisé dans le temps avec une précision τ_0 très inférieure à τ. Exprimer τ_0 en fonction de τ et β. On pourra pour cela remarquer qu'après un temps τ_0, le signal reçu et le signal de fréquence constante f_0 se sont décalés de plus d'une période et n'interfèrent donc plus. Représenter l'allure de l'intensité sonore en fonction du temps après interférences.

En faisant interférer le signal retour avec un signal de fréquence constante f_0, il n'y aura pas d'interférences la plupart du temps car les deux signaux n'auront pas la même fréquence. Pour que les interférences soient possibles il faut que les deux signaux soient cohérents donc qu'ils soient décalés d'une période au maximum.

Ceci ne sera le cas que jusqu'à un temps τ_0 tel que le nombre de périodes écoulées entre $t = 0 = t = \tau_0$ diffère de 1 période pour les deux signaux, soit :

$$(f_0 - \beta\tau_0)\tau_0 \approx f_0\tau_0 - 1$$

D'où $\tau_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\tau}{\Delta f}} = 2.5 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$. L'intensité sonore sera importante pour $t < \tau_0$ et quasi nulle ensuite (les signaux ne sont plus cohérents et n'interfèrent plus).

(c) En déduire la précision de la mesure Δx sur la position de l'insecte. Faire l'application numérique et comparer à la méthode utilisée par la chauve-souris *Rhinolophus*.

On a désormais une précision $u(R) = \dfrac{c\tau_0}{2} = 4\,\text{cm}$: cette méthode permet de localiser la cible beaucoup plus précisément.

(d) Est-il possible de déterminer la vitesse de l'insecte avec cette méthode ? Expliquer.

Avec cette méthode, on ne peut plus mesurer la fréquence du signal reçu puisqu'il est constitué d'un mélange de très nombreuses fréquences. La chauve-souris ne peut donc pas déterminer la vitesse de sa proie.