

Correction - TD 8

Modèle scalaire des ondes lumineuses

I - Dioptriques et miroirs



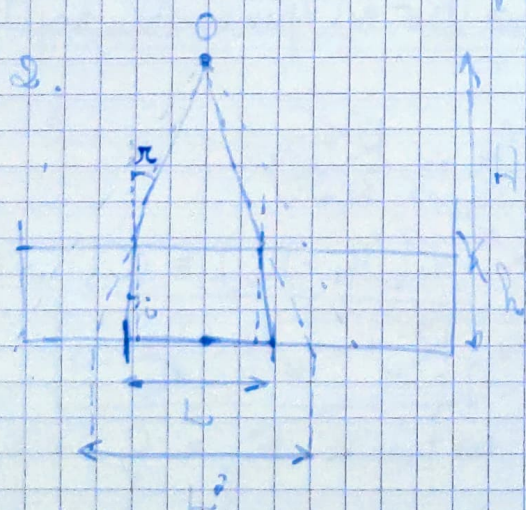
a. Lorsque l'incidence des rayons émis par la source dépasse l'angle de réfraction limite, on a réflexion totale sur la paroi et aucun

rayon ne traverse le dioptrique.

b. On a $n \sin i_c = 1$ et $\tan i_c = \frac{R}{h}$.

D'où: $R = h \tan(i_c) = h \cdot \frac{\sin(i_c)}{\sqrt{1 - \sin^2 i_c}} = \frac{h}{n \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}$

Soit: $R = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx \frac{1}{2} \cdot h$



a. C'est dû à la réfraction à la surface de l'eau: les rayons arrivent avec un angle supérieur.

b. Loi de Descartes: $\sin r = n \sin i$

Or: $L' = 2(H+h) \tan r$
et $L = 2H \tan r + 2h \tan i$

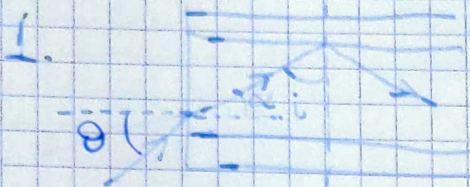
Si H est suffisamment grand ($H+h \gg L$) on peut supposer que $\sin i \approx \tan i \approx 1$ et $\sin r \approx \tan r \approx 1$.

Alors: $\frac{L'}{L} = \frac{2(H+h) \cdot 1}{2H + 2h} = \frac{2n(H+h)}{2Hn + 2h} = \frac{n(H+h)}{nH + h}$

Si $h \gg H$ alors on aura $L' \approx L$

Si $h \ll H$ alors $L' \approx \frac{nH}{nH + h} L$.
C'est l'effet "lune" de réfraction au fond de l'eau.

2 - Fibre à saut d'indice



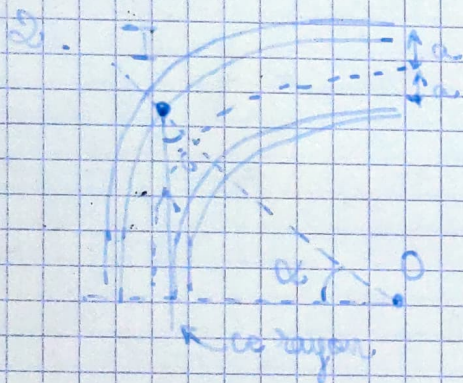
a. On veut qu'il y ait réflexion totale, il faut donc qu'on ait $n_2 \sin i > n_1$

Sait $\sin \theta_{\text{lim}} = \frac{n_2}{n_1}$

Et $\sin \theta_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ car $\alpha = \frac{\pi}{2} - i$

b. En limite de propagation: $n_2 \sin \theta_{\text{lim}} = n_1 \sin \alpha_{\text{lim}}$
 $= \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

D'où: $\theta_{\text{lim}} = \arcsin \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$



a. C'est le rayon le plus à l'intérieur du noyau.

b. On note I le point d'incidence. On voit alors que $x_1 = -(R+a) \cos(\alpha)$
 $= -(R+a) \sin(i)$

Or $x_2 = -(R-a)$ par construction du rayon.

D'où: $\sin(i) = \frac{R-a}{R+a}$

En cas limite: $\sin(\theta_{\text{lim}}) = \frac{n_2}{n_1} = \frac{R-a}{R+a}$

Sait $(R+a)n_2 = (R-a)n_1$, car $R(n_1 - n_2) = a(n_1 + n_2)$

$\Rightarrow R_c = \frac{n_1 + n_2}{n_1 - n_2} a$

A.N: $a = \frac{d}{2} = 0,25 \text{ mm}$, on trouve $R_c = 0,57 \text{ mm}$

En pratique, une fibre n'est jamais aussi courbée donc le guidage est assuré.

3 - Prisme

1. $n \sin \theta_1 = \sin i$ et $n \sin \theta_2 = \sin i'$

2. On a en fait le somme des angles de A-I-I':

$A + \theta_1 + \theta_2 + \theta_1' + \theta_2' = \pi$ soit $A = \theta_1 + \theta_2'$

$$3. \text{ On a } D = \underbrace{i - r}_{1^{\text{re}} \text{ déviation}} + \underbrace{i' - r'}_{2^{\text{e}} \text{ déviation}} = i + i' - (r + r') = A$$

$$\text{D'où } \boxed{D = i + i' - A}$$

4. Par principe de retour inverse de la lumière, le minimum est atteint pour la même valeur de i dans chaque sens donc $i = i'$ (et $r = r'$).

$$5. \text{ Alors } D_m = 2i - A.$$

$$6. \text{ On a ou } 2r = A \text{ soit } \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin r = n \sin i$$

$$\text{Or } 2i = D_m + A \text{ donc: } \sin\left(\frac{A}{2}\right) = n \sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)$$

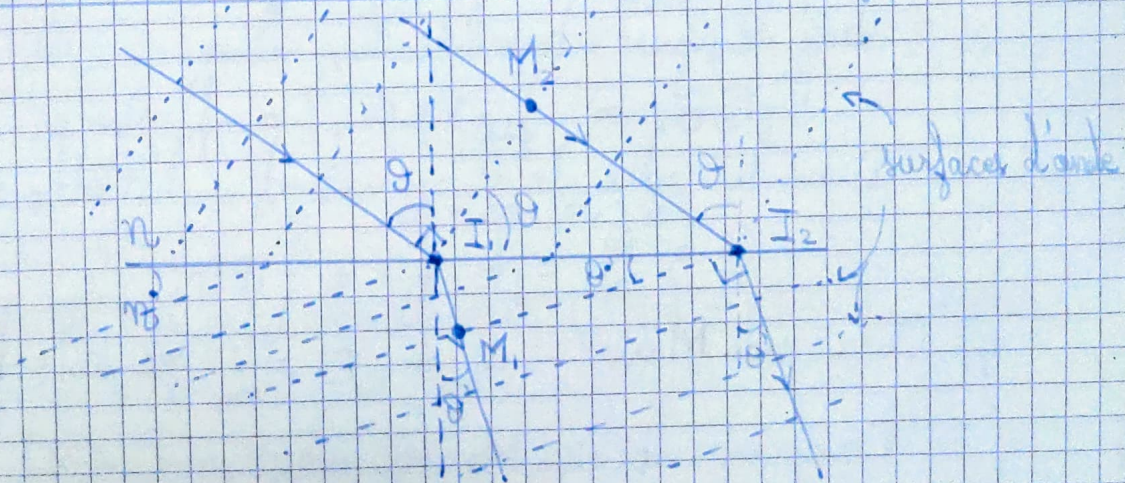
et on obtient bien la relation à démontrer.

7. n est plus grand pour le violet (A petit). Ceci implique que $\sin\left(\frac{D_m^{\text{violet}} + A}{2}\right) < \sin\left(\frac{D_m^{\text{rouge}} + A}{2}\right) < \sin \frac{A}{2}$

La couleur la plus déviée est donc le violet.

4 - Démonstration ondulatoire de la loi de refraction

1.



2. Les points I_1 et M_2 sont sur la même surface d'onde donc ont même phase. Il en est de même pour I_2 et M_1 .

$$\text{Ainsi: } (I_1 M_2) = (M_1 I_2)$$

$$3. \text{ On a } I_1 M_1 = I_2 M_2 \text{ soit } \theta = \theta' \text{ et } M_2 I_2 = I_1 M_1 \text{ soit } \theta = \theta'$$

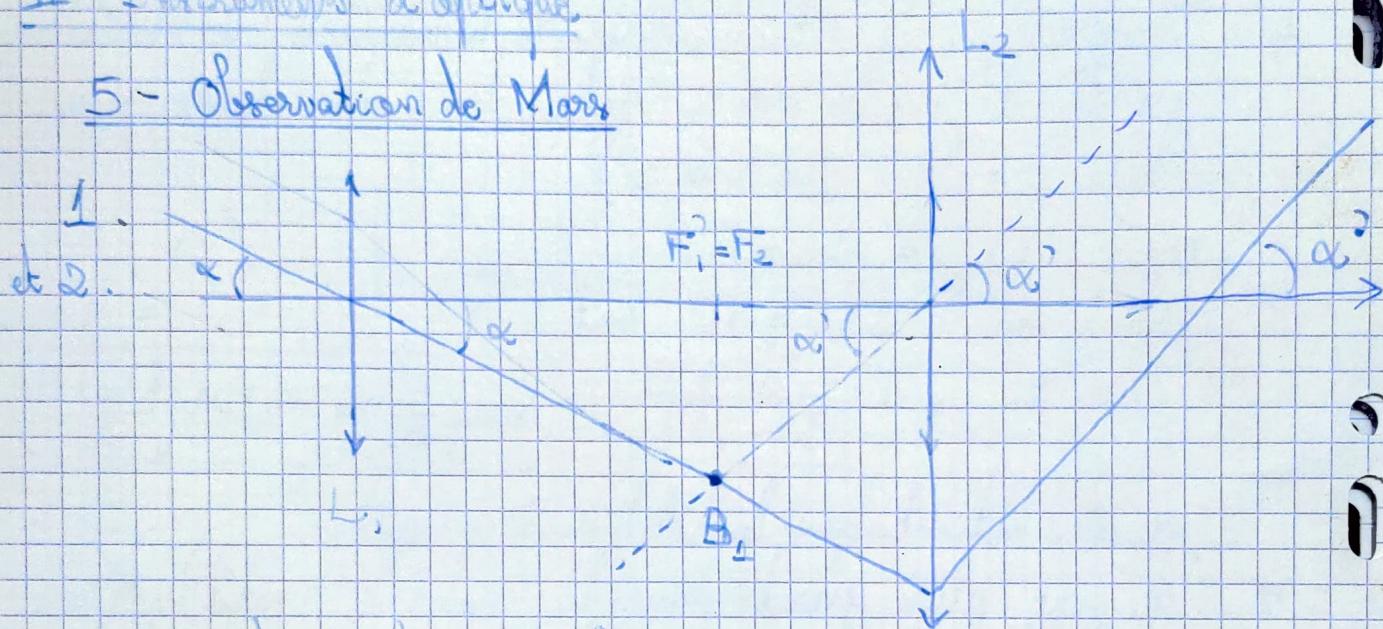
$$\text{Or } (I_1 M_1) = n I_1 M_1 \text{ et } (I_2 M_2) = n' M_2 I_2 \text{ d'où:}$$

$$n \cdot I_1 \cdot \sin \theta = n' \cdot I_2 \cdot \sin \theta'$$

On envoie: $n \sin \theta = n' \sin \theta'$

II - Instruments d'optique

5 - Observation de Mars



Le système étant afocal: $F_1' = F_2$. D'où:

$h = f_1' + f_2 = 80,6 \text{ cm}$. La lunette permet de grossir les objets.

3. On note B_1 l'image d'un objet lointain à un angle α dans le plan intermédiaire, alors:

$$F_2 B_1 = f_1' \cdot \sin \alpha = -f_2 \sin \alpha'$$

Dans le cadre de l'approximation des petits angles:

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2} = -133$$

4. On a pour Mars: $\alpha = \frac{1}{2} \frac{d_m}{D_m}$ et $|\alpha'| = \frac{f_1'}{f_2} \cdot \frac{d_m}{2D_m} = 0,41^\circ$

Donc on voit bien Mars en entier.

Pour la lune: $|\alpha'| = \frac{f_1'}{f_2} \cdot \frac{d_l}{2D_m} = 68^\circ$. On ne peut pas voir la lune en entier.

6 - Étude d'un microscope

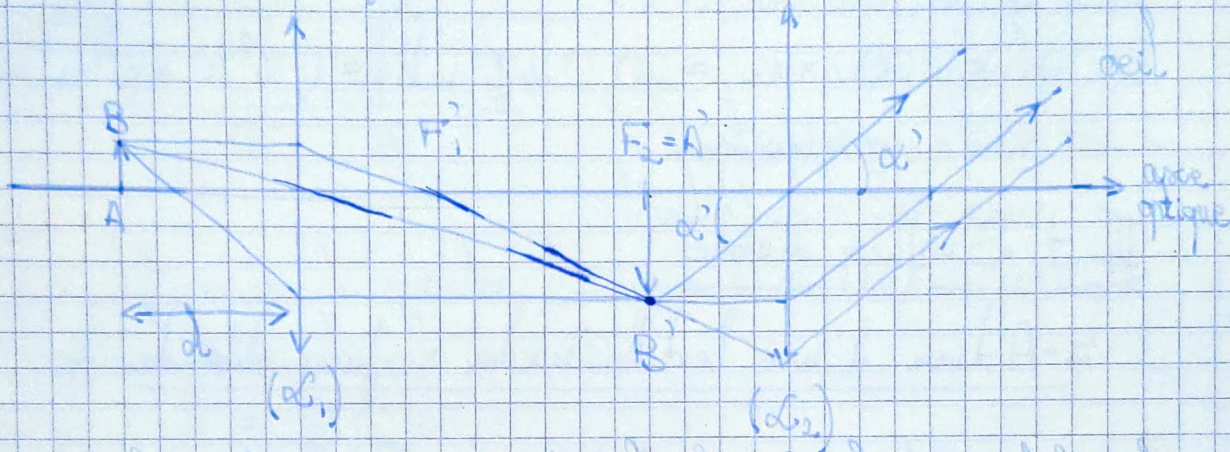
1. Il faut se placer dans les conditions de Gauss: rayons proches

de l'axe optique et peu inclinées par rapport à l'axe optique.

$$2. \Delta = \vec{F_1'} \vec{F_2} = \vec{F_1'} \vec{O_1} + \vec{O_1} \vec{O_2} + \vec{O_2} \vec{F_2}$$

soit $\Delta = D_0 - f_1 - f_2 = 110 \text{ mm}$

3.



On place l'image $A'B'$ dans le plan focal image de l'œil. Les rayons passant par le centre des lentilles ne sont pas déviés. Ceux qui arrivent parallèles à l'axe optique sortent par le plan focal image.

4. On utilise la relation de conjugaison de Descartes:

$$\frac{1}{f_1'} - \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f_1} \Leftrightarrow \frac{1}{f_1 + \Delta} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f_1}$$

D'où $d = \frac{1}{\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_1 + \Delta}} = \frac{f_1(f_1 + \Delta)}{\Delta} = 5,2 \text{ mm}$

$$5. \gamma = \frac{OA'}{OA} = -\frac{f_1 + \Delta}{d} = -\frac{\Delta}{f_1} = -22$$

6. On a un très fort grandissement: $|d - f_1| \ll f_1$ donc l'image intermédiaire est presque à l'infini.

7. a. On a $D_m = 25 \text{ cm}$ pour un œil normal: c'est le point de vue maximum.

b. On a alors, comme les rayons arrivent à l'infini:

$$\sin \alpha = \frac{AB}{D_m} \Leftrightarrow \alpha \approx \frac{AB}{D_m} \quad (\sin \alpha \approx \alpha \text{ dans la condition de Gauss})$$

D'où: $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{D_m}{AB} = 18, D_m = \frac{c}{AB}$

On trouve $\alpha' = \frac{AB'}{D_m}$ d'où $G = \frac{AB'}{AB} = 100$

8. On a $\alpha = \frac{5 \mu m}{5 D_m} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ rad} < \underbrace{3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}}_{\text{pour la séparation de l'œil}}$

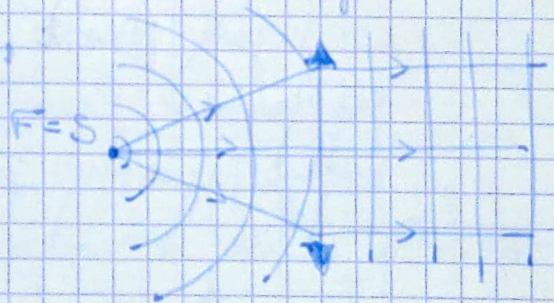
Donc on ne peut pas les voir à l'œil nu.

$\alpha' = 100 \times \alpha = 0,022 \text{ rad} = 1,2^\circ$: on les voit très bien au microscope.

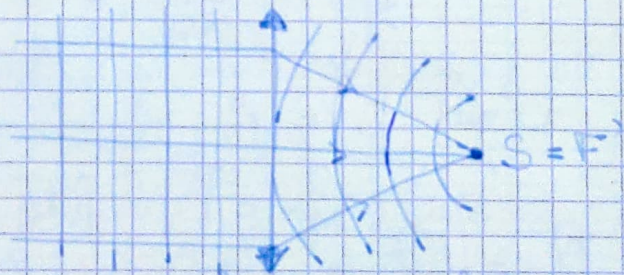
III - Surfaces d'onde

7 - Action d'une lentille sur les surfaces d'onde

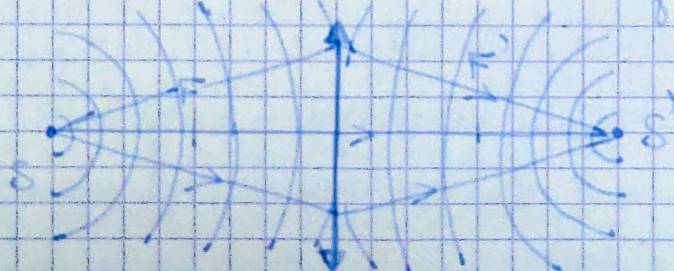
1. On place le foyer objet d'une lentille convergente au centre de l'onde sphérique :



2. On place une lentille :

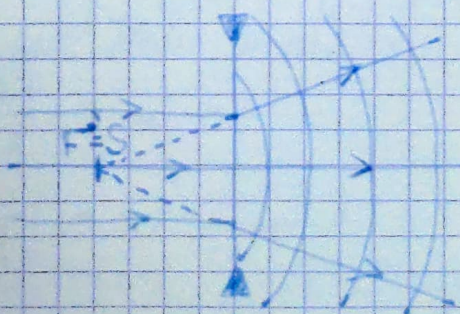


3. On place le centre de l'onde avant le foyer objet :



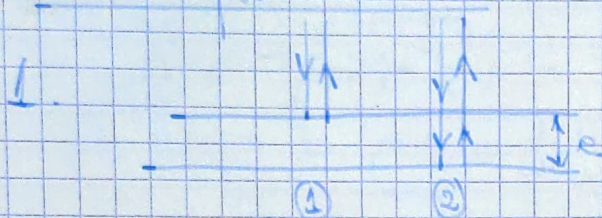
4. On place une lentille divergente :

Le foyer image coïncide avec le centre de l'onde sphérique.



IV - Superposition de deux ondes

8 - Plaque d'essence



On considère les cas ① et ② d'une onde réfléchie soit à l'interface air-huile soit à l'interface huile-eau.

La différence de marche correspond au chemin optique supplémentaire dans le cas ② :

$$S = 2n_m e$$

Il y a des interférences destructives si $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot S = (2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{N}$

Autrement dit pour que les interférences soient destructives :

$$S = 2n_{\text{huile}} e = \lambda \left(k + \frac{1}{2}\right)$$

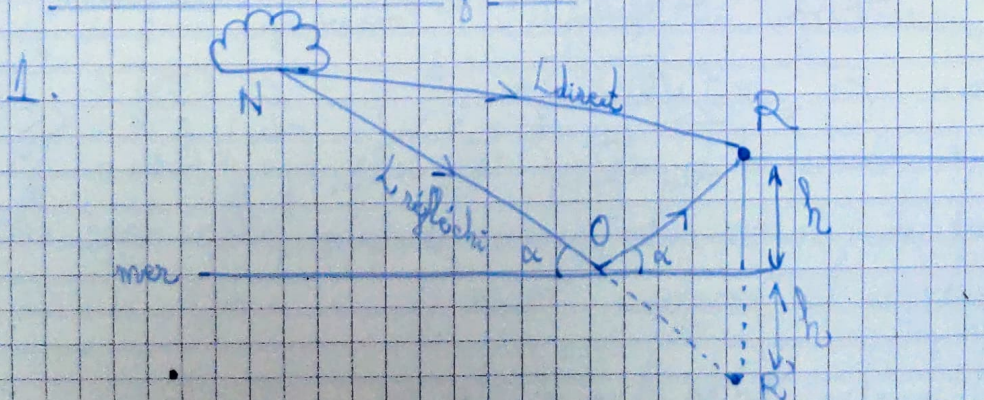
2. Cette condition dépend de λ , ainsi seule une partie du spectre va subir des interférences destructives.

3. - le vert est éliminé, en supposant $k=0$ (épaisseur minimale) :

$$\lambda = 4n_{\text{huile}} e = e_{\min} = \frac{\lambda}{4n_{\text{huile}}} = \boxed{83 \text{ nm}}$$

En réalité : $k \in \mathbb{N}$, $e = (2k+1)e_{\min}$.

9 - Radar sur une falaise



On peut avoir un rayon réfléchi du nuage vers le radar via une réflexion à la surface de l'océan.

2. On a un indice optique $n=1$ partout, ainsi :

$$(NR)_{\text{direct}} = NR = \sqrt{d^2 + (h-h)^2}$$

$$(NR)_{\text{reflexion}} = (NO) + (OR) + \frac{\lambda}{2} = (NO) + (OR) + \frac{\lambda}{2} = \sqrt{d^2 + (h+h)^2} + \frac{\lambda}{2}$$

Ainsi: $\delta = \sqrt{d^2 + (h+h)^2} - \sqrt{d^2 + (h-h)^2} + \frac{\lambda}{2}$

Or $d \sim 500 \text{ km} \gg h, h$, d'où:

$$\begin{aligned} \delta &\approx d \left[\sqrt{1 + \left(\frac{h+h}{d}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{h-h}{d}\right)^2} \right] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx d \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{h+h}{d}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h-h}{d}\right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx \frac{1}{2d} [(h+h)^2 - (h-h)^2] + \frac{\lambda}{2} \\ &\approx \frac{1}{2d} (2h \times 2h) + \frac{\lambda}{2} = \left[\frac{2h^2}{d} + \frac{\lambda}{2} \right] \end{aligned}$$

8. On aura des interférences destructives si: $\delta = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$

Soit: $d = \frac{2h^2}{(2k+1)\frac{\lambda}{2}} = \frac{2h^2}{k\lambda} \quad k \in \mathbb{N}^*$

k	0	1	2	3	4
$d [\text{km}]$	300 km	150 km	100 km	75 km	60 km

On a des interférences destructives à différents endroits dans le champ du radar.

9. Par la formule de Fresnel, avec $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta$:

$$\overline{I}_{\text{tot}} = \overline{I}_{\text{direct}} + \overline{I}_{\text{reflexion}} + 2\sqrt{\overline{I}_{\text{direct}} \overline{I}_{\text{ref}}} \cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)$$

Contraste: $C = \frac{2\sqrt{\overline{I}_{\text{direct}} \overline{I}_{\text{ref}}}}{\overline{I}_{\text{direct}} + \overline{I}_{\text{ref}}} \approx \frac{2\sqrt{\overline{I}_{\text{ref}}}}{\overline{I}_{\text{direct}}} \ll 1$

Le contraste de ces interférences est très faible donc elles ne sont pas observables.

10 - Interféromètre de Michelson-Léonard

1. Si le milieu est rempli d'air, les chemins optiques sont égaux et $\delta = 0$.

S'il y a du méthane:

$$(C_2) - l n_{\text{air}} = (C_2) - l n_{\text{CH}_4}$$

$$\text{D'où: } \delta = (C_2) - (C_1) = l (n_{\text{CH}_4} - n_{\text{air}})$$

2. On a par la formule de Fresnel:

$$I_{\text{tot}} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta\right)$$

On donne 32 variations successives donc $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \delta = 2\pi \times 32$

$$\text{On envoie } \delta = 32\lambda \Leftrightarrow n_{\text{CH}_4} = n_{\text{air}} + 32 \frac{\lambda}{l}$$

$$\text{On trouve } n_{\text{CH}_4} = \boxed{1 + 4,48 \cdot 10^{-4}}$$

V - Notion de cohérence

12 - Largeur naturelle et Doppler

1. $\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Sa couleur est bleu-vert.

2. La longueur de cohérence correspond à la taille d'un train d'onde émis par la source. On a $L_c = c \tau_0$ d'où

$$\tau_0 = \frac{L_c}{c} = 10^{-8} \text{ s} = 10 \text{ ns}$$

$$\text{Par ailleurs } \tau_0 \Delta\nu \leq 1 \Rightarrow \Delta\nu \leq \frac{1}{\tau_0} = \boxed{10^8 \text{ Hz}}$$

$$\text{On a: } \lambda = \frac{c}{\nu} \text{ i.e. } \lambda \cdot \nu = c$$

D'où, en prenant la différentielle logarithmique $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} + \frac{\Delta\nu}{\nu} = 0$

$$\Delta\lambda \leq -\lambda \frac{\Delta\nu}{\nu} = 8 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

3. a. Il s'agit de l'effet Doppler: le mouvement des particules émettrices modifie la fréquence de l'onde émise.

$$\text{b. On a: } \frac{1}{2} m v^2 \leq \frac{1}{2} k_B T \quad \text{énergie thermique (cf MP51)}$$

$$\text{Donc } v \leq \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{RT}{M}}$$

$$\text{Et: } \Delta\nu = \nu_0 \cdot \frac{v}{c} = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{RT}{M}} = \boxed{7,9 \cdot 10^8 \text{ Hz}}$$

Cet effet est non négligeable.