

Corrigé - DM6

I - Ozone et atmosphère

1 - Étude structurale de l'oxygène et de l'ozone

1 - O : $\underbrace{1s^2}_{\text{cœur}} \underbrace{2s^2 2p^4}_{\text{valence}}$ Il y a 2 électrons de cœur et 6 électrons de valence.

2. Cet élément a ses électrons de valence dans la couche 2, il est donc sur la 2^e période.

3. Des isotopes sont des atomes ayant le même nombre de protons et électrons (mêmes propriétés chimiques) mais pas le même nombre de neutrons.

^{16}O : 8 protons et $16 - 8 = 8$ neutrons

^{17}O : 8 protons et 9 neutrons

^{18}O : 8 protons et 10 neutrons.

4. On note x_{16} , x_{17} et x_{18} les fractions molaires de chacun des composés. Alors $x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1$.

De plus :

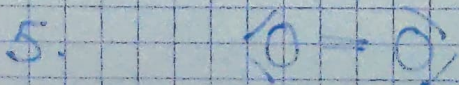
$$M = x_{16} M_{16} + x_{17} M_{17} + x_{18} M_{18} \\ = (1 - x_{17} - x_{18}) M_{16} + x_{17} M_{17} + x_{18} M_{18}$$

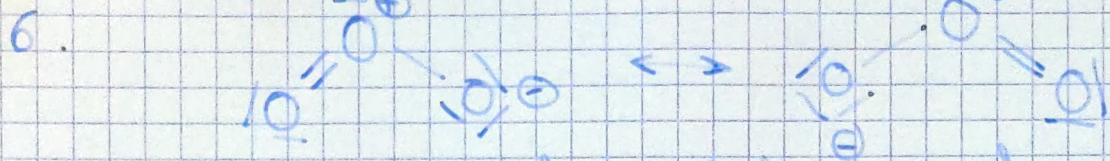
On en déduit :

$$M + x_{17} (M_{16} - M_{17}) - M_{16} = x_{18} (M_{18} - M_{16})$$

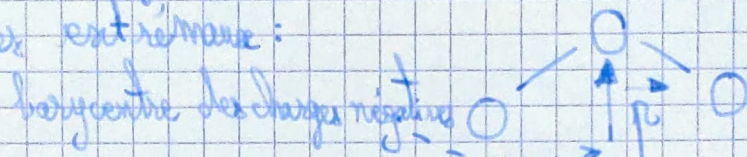
$$x_{18} = \frac{M - M_{16} - x_{17} (M_{17} - M_{16})}{M_{18} - M_{16}} = \boxed{0,20\%}$$

$$\text{Et } x_{16} = 1 - x_{17} - x_{18} = \boxed{99,76\%}$$





7. Les deux formes sont équivalentes, on peut supposer qu'on a une charge $+e$ sur l'atome central et $-\frac{e}{2}$ sur les atomes extrêmes:



2 - Thermodynamique de la formation de l'ozone

8. On utilise la loi de Hess:

$$\Delta_f H^\circ = 2 \Delta_f H^\circ(O_3(g)) \quad \text{car } O_2(g) \text{ est l'état standard de référence de } O$$

$$= 243,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\text{Et } \Delta_r S^\circ = 2S_m^\circ(O_3) - 3S_m^\circ(O_2) = -137 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Alors:

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ = 284,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } T = 298 \text{ K}$$

$$\text{Ainsi: } K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = \boxed{1,3 \cdot 10^{-50}}$$

La réaction est très défavorisée dans les conditions normales de température et de pression.

9. À l'équilibre, par la loi d'actions de masse:

$$Q = K^\circ(T) = \frac{P_{O_3}^2}{P_{O_2}^3} \times P^\circ$$

Or $P_{O_2} \times = x_{O_2} \times P^\circ$ avec $x_{O_2} = 0,21$ dans l'atmosphère.

$$\text{D'où: } K^\circ(T) = \frac{P_{O_3}^2}{x_{O_2}^3 P^\circ} =$$

$$\text{Soit } P_{O_3} = \sqrt{x_{O_2}^3 \times K^\circ \times P^\circ} = \boxed{1,09 \cdot 10^{-26} \text{ bar}}$$

10. On voit que : $Q = \frac{x_{O_2}}{x_{O_2}^0} \cdot \frac{p^0}{p} = K^0(T)$

Or $x_{O_2} \approx 0,21 = \text{cte}$ donc $x_{O_2} = \sqrt{x_{O_2}^0 \cdot K^0 \cdot \frac{p^0}{p}}$

La réaction est favorisée à haute pression.

Mais par la loi de Van't Hoff :

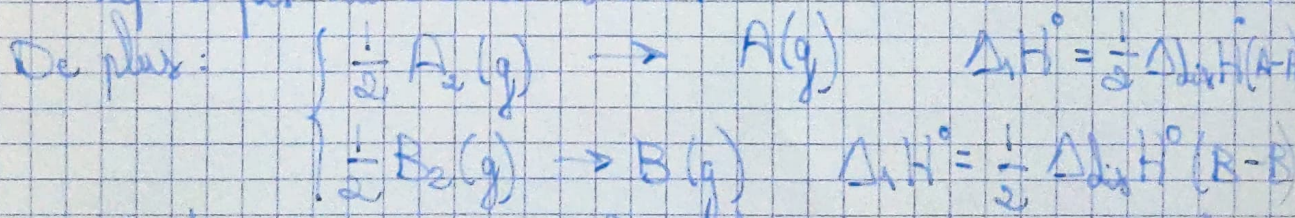
$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} > 0$$

Donc la réaction est favorisée à haute température.
La réaction est donc très défavorisée en haut de la troposphère et de la mésosphère (basse température et pression), et moins défavorisée dans la stratosphère (haute température, surtout en haut) et en bas de la troposphère (haute température et haute pression).

3 - Importance de la couche d'ozone

11. $\Delta_r H^0_1 - \Delta_{\text{dis}} H^0(A-B) = \Delta_r H^0_2$

car H est une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi.



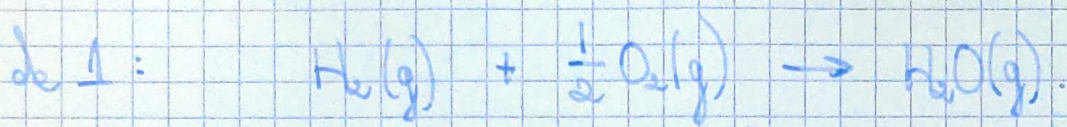
par définition de $\Delta_{\text{dis}} H^0$ et linéarité de $\Delta_r H^0$ par rapport aux coefficients stœchiométriques.

D'où : $\Delta_r H^0_1 = \frac{1}{2} (\Delta_{\text{dis}} H^0(A-A) + \Delta_{\text{dis}} H^0(B-B))$

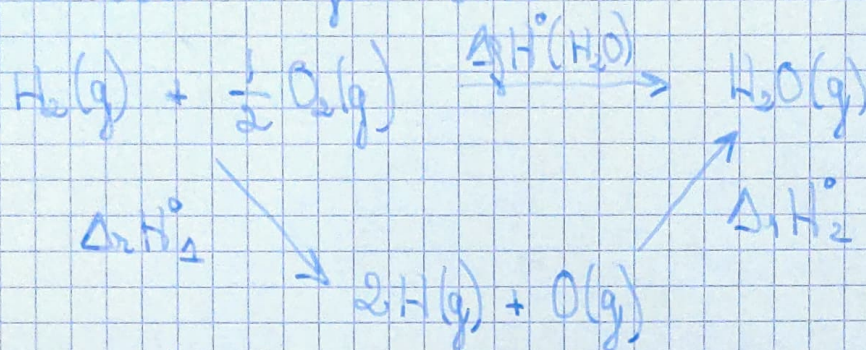
Et :

$$\Delta_{\text{dis}} H^0(A-B) = \frac{1}{2} (\Delta_{\text{dis}} H^0(A-A) + \Delta_{\text{dis}} H^0(B-B)) - \Delta_r H^0_1$$

12. On doit former H_2O avec un coefficient stœchiométrique



13. On considère le cycle suivant:



De même qu'en Q.1:

$$\Delta_r H^\circ_1 = \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{H}-\text{H}) + \frac{1}{2} \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O})$$

$$\Delta_r H^\circ_2 = -2 \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{H})$$

$$\text{D'où: } \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) = \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{H}-\text{H}) + \frac{1}{2} \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O}) - 2 \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{H})$$

Soit:

$$\Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O}) = 2 [\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{H}-\text{H}) + 2 \Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{H})]$$

$$\boxed{\Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O}) = 496 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

14. On a $E_{\text{photon}} = h\nu$ où h est la constante de Planck

15. On a $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E_{\text{photon}}}$

Or l'énergie des photons pouvant dissocier la liaison correspondant à l'énergie d'une unique liaison:

$$E_{\text{liaison}} = \frac{\Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O})}{N_A} \leftarrow \begin{array}{l} \text{énergie pour une mole de liaisons} \\ \text{soit, } N_A \text{ liaisons.} \end{array}$$

$$\text{Soit: } \lambda = \frac{N_A hc}{\Delta_{\text{diss}} H^\circ(\text{O}-\text{O})} = \boxed{241 \text{ nm}}$$

Il s'agit du domaine ultraviolet ($\lambda \leq 400 \text{ nm}$).

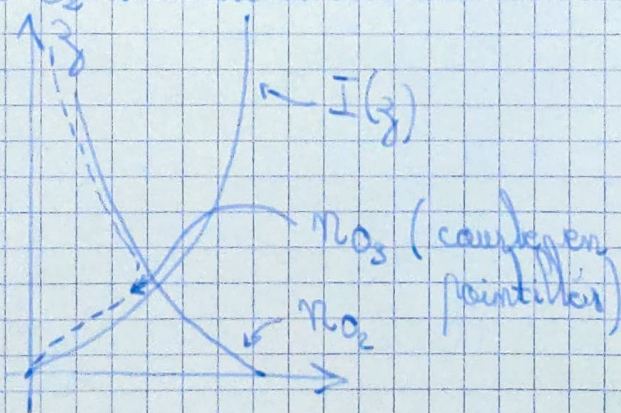
16. L'absorption est importante pour $\lambda \leq 290 \text{ nm}$. Ceci est

logique : les photons sont alors proches de 242 nm donc suffisamment énergétiques pour couper les liaisons $O=O$.

17. $E_{\text{photon}} = \frac{hc}{\lambda}$ donc les photons sont plus dangereux aux courtes longueurs d'onde. La couche d'ozone absorbe ces photons et nous protège de ces rayonnements.

4 - La couche d'ozone

18. Le rayonnement UV étant absorbé au fur et à mesure qu'il descend dans l'atmosphère, $I(z)$ est une fonction croissante de l'altitude. Au contraire, on a plus de O_2 à basse altitude :



$n_{O_3} \propto \sqrt{I(z)} \times n_{O_2}$
d'après le document A2, donc présente un maximum en fonction de l'altitude.

19. Alors $n_{O_3} \propto \sqrt{I(z)} \times n_{O_2}$

$$\text{Or } n_{O_2} \propto \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad I(z) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} H n_0 \sigma_{O_2} e^{-\frac{z}{H}}\right)$$

D'où :

$$n_{O_3} \propto \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \times \exp\left(-\frac{1}{2} H n_0 \sigma_{O_2} e^{-\frac{z}{H}}\right) = f\left(\frac{z}{H}\right)$$

$\approx 19,53$

À la calculatrice on trouve que cette fonction présente un maximum pour $\frac{z}{H} = 2,94 \Rightarrow \boxed{z = 20,8 \text{ km}}$

Par ailleurs : $n_{O_3} = n_{O_2} \times \sqrt{\frac{R_{\text{eff}}}{R_{\text{eff}}}}$

$$k(z=21\text{ km}) = k(z=50\text{ km}) \times \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{f\left(\frac{1}{50}\right)} = 7,3 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$$

D'où: $n_{O_3} = \underbrace{n_0}_{n_{O_2}} \cdot e^{-\frac{z}{H}} \cdot \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3 k_4}} = \boxed{3,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}}$

20. On a, en supposant que l'air est un gaz parfait:

$$PV = n_{\text{air}} RT \quad \Rightarrow \quad \frac{n_{\text{air}}}{V} = \frac{P}{RT} = \frac{55 \cdot 10^2}{8,314 \times (273 - 50)}$$

à $z = 20\text{ km}$: $P = 55\text{ hPa}$ et $T = -50^\circ\text{C}$

On trouve $n_{\text{air}} = 2,94 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$.

D'où la concentration en ozone:

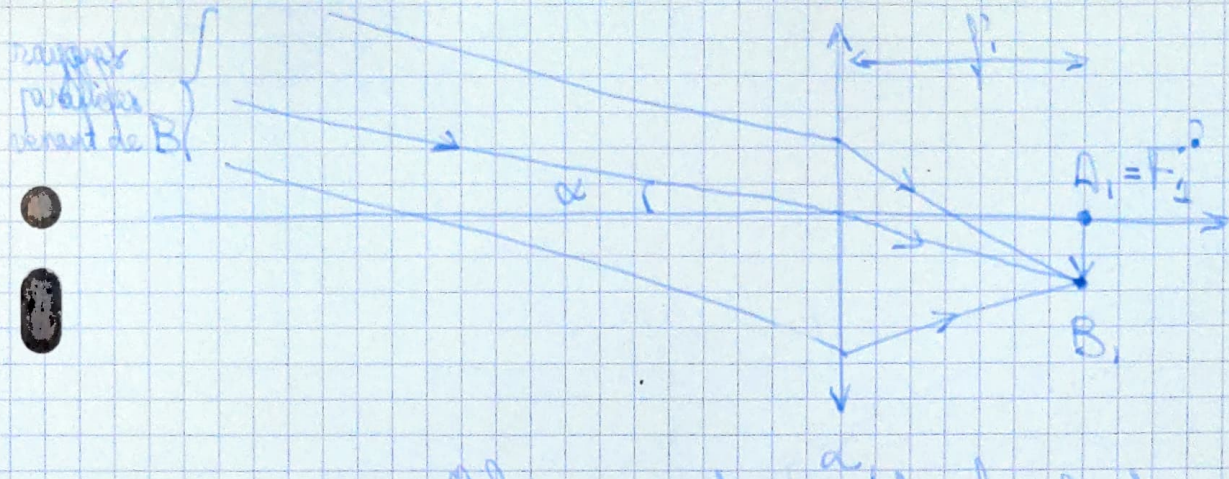
$$\frac{n_{O_3}}{n_{\text{air}}} = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{2,94} \approx 1,0 \cdot 10^{-4} = 100 \cdot 10^{-6} = 100 \text{ ppm}$$

On trouve une concentration environ dix fois supérieure à celle de la figure, on voit aussi que, l'altitude qu'on a trouvée n'est pas la bonne. Ce sont peut-être des erreurs liées à une modélisation trop simplifiée.

II - Découverte de Proxima du Centaure

21. La distance Terre - Soleil est de l'ordre de 10^8 km soit $D_{TS} \ll D_E$. On peut donc approximer la distance entre la Terre et Proxima du Centaure avec la distance au soleil.

22. L'étoile se situe très loin ($D_E \gg f_1$), on peut considérer qu'elle est à l'infini. Son image se situe sur le plan focal image de $\mathcal{C}_1$.



Les rayons parallèles ϵ passent dans le plan focal image.

23. On a : $|y| = \frac{A_1 B_1}{AB} = \frac{|\overline{O_1 A_1}|}{|\overline{O_1 A}|} = \frac{f'_1}{D_E}$

avec $AB = R_E$, d'où : $A_1 B_1 = \frac{f'_1 \cdot R_E}{D_E}$ et l'image est inversée

24. On a pour objectif avec cette lentille d'airain :

$$y_2 = \frac{A_2 B_2}{A_1 B_1} = 4 = \frac{\overline{O_2 A_2}}{\overline{O_2 A_1}}$$

$$\text{Or } \overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \underbrace{\overline{O_1 A_1}}_{f'_1} = f'_1 - \overline{O_1 O_2}$$

D'où : $y_2 = 4 = \frac{\overline{O_2 A_2}}{f'_1 - \overline{O_1 O_2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = \frac{1}{4(f'_1 - \overline{O_1 O_2})}$

Pour trouver $\overline{O_2 A_2}$ on utilise la relation de conjugaison :

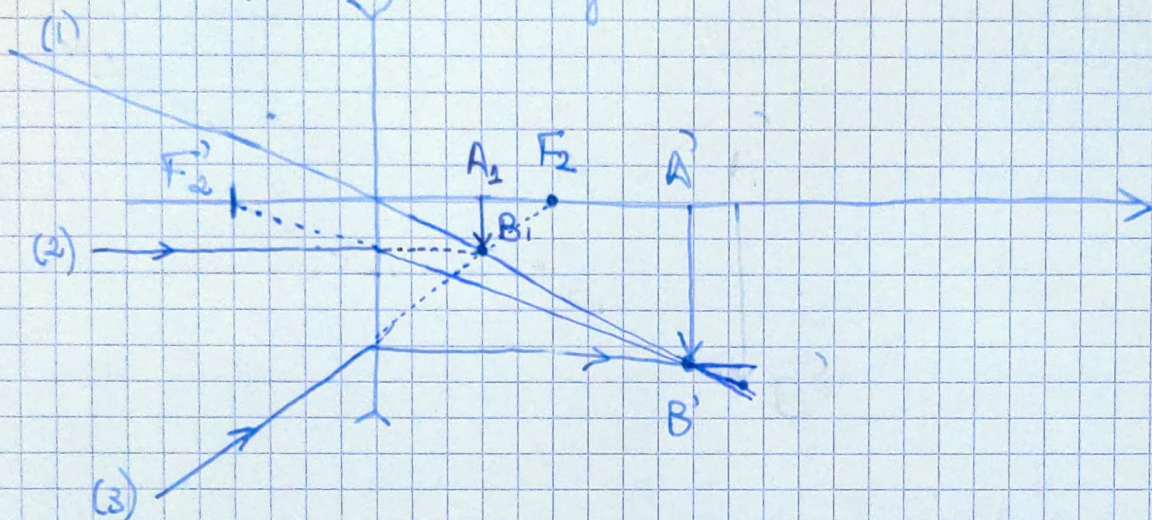
$$\frac{1}{\overline{O_2 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2} \quad \text{avec } \overline{O_2 A_1} = f'_1 - \overline{O_1 O_2}$$

Sait : $\frac{1}{f'_1 - \overline{O_1 O_2}} + \frac{1}{f'_2} = \frac{1}{4(f'_1 - \overline{O_1 O_2})}$

On envoie $f'_2 = -\frac{4}{3}(f'_1 - \overline{O_1 O_2})$

$$\boxed{\overline{O_1 O_2} = \frac{3}{4}f'_2 + f'_1}$$

25. On remarque que $0,02 < \frac{p}{f}$, donc l'image intermédiaire $A_1 B_1$ est une image virtuelle:



On trace 3 rayons:

- ① non dévié (passe par le centre de la lentille)
- ② ressort par le foyer image F_2 (entre parallèle à l'axe)
- ③ rentre par le foyer objet F_1 ; ressort parallèle à l'axe.

L'image est bien agrandie.

26. On a alors comme taille finale de l'image:

$$A'B' = 1 + A_1B_1 = \frac{48}{D_E} R_E = 7,8 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

Les cristaux font $10 \text{ nm} = 10^{-8} \text{ m} \gg A'B'$ donc l'étoile est vue comme ponctuelle.

27. La surface d'un pixel est $S = \frac{24 \cdot 10^{-3} \times 36 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^6} = 8,6 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2$

D'où leur taille $a = \sqrt{S} = 2,9 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

On a toujours $A'B' < a$ donc l'image est toujours vue comme ponctuelle.

2 - Mesure de la distance entre la Terre et l'étoile

28. On peut remarquer que :

$$\sin(P_E) \approx P_E = \frac{2\pi D_{TS}}{D_E}$$

$$\text{Avec } P_E = \frac{1545}{1000} \times \underbrace{\frac{1}{3600}}_{\substack{\text{secondes} \\ \rightarrow \text{degrés}}} \times \underbrace{\frac{\pi}{180}}_{\substack{\text{degrés} \\ \rightarrow \text{radians}}}$$

$$\text{On trouve alors } D_E = \frac{2\pi D_{TS}}{P_E} = \boxed{4,01 \cdot 10^{13} \text{ km}}$$

Ceci correspond bien à la valeur donnée dans l'énoncé: la mesure est très précise.

29. L'orbite de la Terre est une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

III - Une exoplanète: Proxima Centauri b

30. On applique l'équation (5) avec $A = P$:

$$(M_E + M_P) \vec{PG} = M_E \vec{PE} + \vec{0}$$

$$\text{D'où: } \vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{EP}$$

Dans le cas où la planète a une masse négligeable on trouve, en prenant $M_P \ll M_E$: $\vec{GP} = \vec{EP}$ soit $G = E$ ce qui est logique (centre de gravité confondu avec l'étoile).

Si la planète est de masse égale $M_E = M_P$ alors $\vec{GP} = \frac{1}{2} \vec{EP}$: le centre de gravité est à mi-chemin entre les deux astres.

31. On se place dans le référentiel d'étude galiléen, le système {planète} est soumis uniquement à la force de gravitation donc par le principe fondamental de la dynamique:

$$M_P \cdot \frac{d^2 \vec{GP}}{dt^2} = \vec{F}_g = -G \cdot \frac{M_E \cdot M_P}{r^3} \vec{r}$$

$$\text{Or } \vec{GP} = \frac{M_E}{M_E + M_P} \vec{r} \text{ d'où: } \boxed{\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{(M_E + M_P)G}{r^3} \vec{r} = \vec{0}}$$

32. En supposant le mouvement circulaire comme le propose l'énoncé, on note $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ sa vitesse de rotation, alors :

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{r} \Omega^2 = -\frac{4\pi^2}{T^2} \vec{r}$$

D'où :

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{r^3}$$

Au encor :

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2}} \quad \text{C'est la 3^e loi de Kepler.}$$

33. La situation étant symétrique entre E et P on peut établir de la même manière qu'en Q30 :

$$\vec{G}_E = \frac{M_P}{M_E + M_P} \vec{P}E = -\frac{M_P}{M_E + M_P} \vec{r}$$

Or $\vec{r}$ décrit un mouvement circulaire uniforme donc $\vec{G}_E$ aussi et il a la même vitesse angulaire :

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \sqrt{\frac{G(M_E + M_P)}{4\pi^2 r^3}}$$

D'où sa vitesse :

$$v = \|\vec{G}_E\| \cdot \Omega = \boxed{\frac{M_P r}{M_P + M_E} \cdot \frac{2\pi}{T}}$$

34. La fréquence mesurée sera décalée à cause de l'effet Doppler :

$$f_{\text{mes}} = f_{\text{em}} \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \Leftrightarrow \frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} \approx \pm \frac{v}{c}$$

On en déduit :

$$\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} = \pm \frac{M_P r}{M_P + M_E} \cdot \frac{2\pi}{T c}$$

Or : $r = \left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot G(M_E + M_P)\right)^{1/3}$ (Q32) donc :

$$\boxed{\frac{f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}}{f_{\text{em}}} \approx \pm \left(\frac{2\pi G}{T}\right)^{1/3} \cdot \frac{M_P}{(M_P + M_E)^{2/3}} \cdot \frac{1}{c}}$$

On n'a pas pris en compte l'excentricité e , et on a supposé $i = \frac{\pi}{2}$ (Terre dans le plan de l'orbite).

35. On mesure une période $T \approx 12 \text{ jours} \approx 1,0 \cdot 10^6 \text{ s}$
 Et une vitesse radiale qui varie avec une amplitude
 $2v = 14 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \Leftrightarrow v = 7 \times \frac{1000}{3600} = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Alors: $\frac{|f_{\text{obs}} - f_{\text{em}}|}{f_{\text{em}}} = \frac{v}{c} = \left(\frac{2\pi G}{T} \right)^{1/3} \cdot \frac{M_p}{(M_p + M_E)^{2/3}} \cdot \frac{1}{c}$

On suppose $M_p \ll M_E$, alors;

$$M_p \approx v \times \left(\frac{T M_E^2}{2\pi G} \right)^{1/3} \approx \boxed{9,6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

On constate sur $2v$ des erreurs de l'ordre de $5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
 donc $\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta(2v)}{2v} \approx \frac{5}{14}$ et donc:

$$\frac{\Delta M_p}{M_p} = \frac{5}{14} \quad \text{Soit } M_p = (9,6 \pm 3,4) \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

Ou encore:

$$\boxed{\frac{M_p}{M_T} = 1,6 \pm 0,6}$$

Ceci correspond bien à la valeur de 1,3 masse terrestre
 donnée dans l'énoncé.