

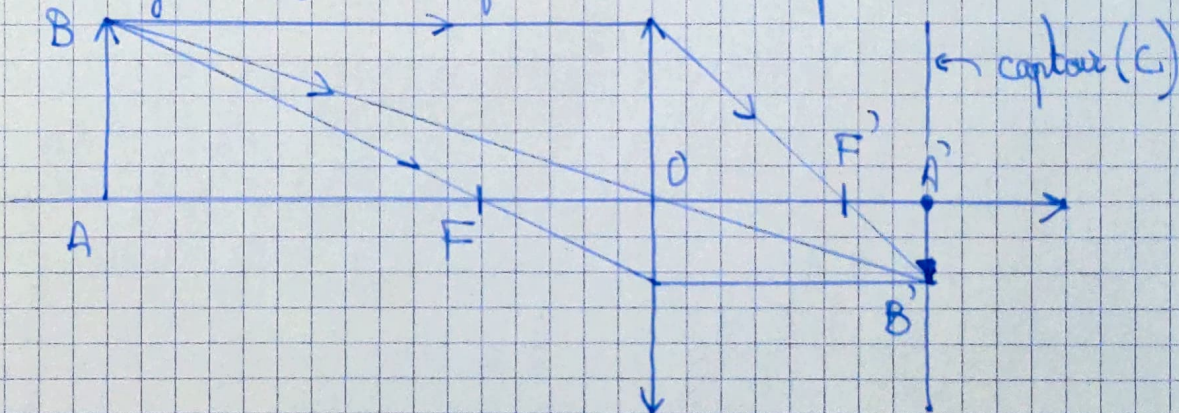
DS4 - Correction Type CCINP/E3A

I - Une brève histoire de la photographie

1 - Optique de l'appareil photo

1. On est dans les conditions de Gauss si on a des rayons proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe. Ceci est permis par le diaphragme.

2. L'image $A'B'$ va se former sur le capteur.



On peut tracer deux rayons parmi ces trois :

- * rayon passant par O non dévié
- * rayon parallèle à l'axe optique sortant par F'
- * rayon entrant par F sortant parallèle à l'axe optique

3. On utilise la formule du grandissement :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Or $\overline{OA} = -L$ par définition de L

Déplus $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} + \frac{1}{L} = \frac{1}{f}$

D'au $\overline{OA'} = \frac{1}{\frac{1}{f} - \frac{1}{L}} = \frac{Lf}{L-f}$ et on obtient :

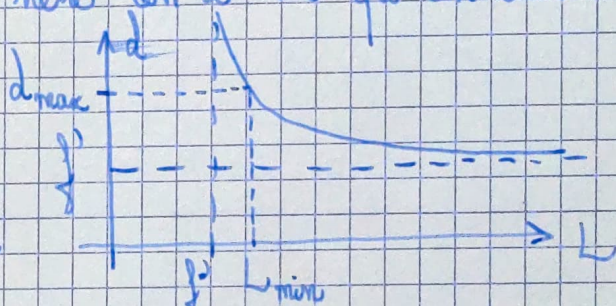
$$A'B' = -\overline{A'B'} = \boxed{h \times \frac{f}{L-f}}$$

Ici $L - f \approx L = 20 \text{ m}$

D'où : $A'B' = 5 \times \frac{0,05}{20} = 0,0125 \text{ m} = \boxed{13 \text{ mm}}$
 2 chiffres significatifs ↗

4. Lorsque l'objet est à l'infini:
 $d = OA' = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L f'}{L - f'} \right) = f' = 5,0 \text{ cm}$
 En effet l'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image.

5. Pour avoir une image nette on a vu qu'on doit avoir
 $d = \frac{L f'}{L - f'}$



Si on voulait faire une image d'un objet proche il faudrait mettre le capteur très loin et ce n'est pas possible. On a une distance $L_{\min}$ correspondant à la distance maximale de l'objectif:

$$d_{\max} = \frac{L_{\min} f'}{L_{\min} - f'} = \frac{f'}{1 - \frac{f'}{L_{\min}}}$$

Soit : $L_{\min} = \frac{f' d_{\max}}{d_{\max} - f'} = \frac{50 \times 55}{5} \text{ mm} = \boxed{55 \text{ cm}}$

6. On a alors en réutilisant Q3 :

$$A'B' = h \cdot \frac{f'}{L - f'} \approx h \cdot \frac{f'}{L} = 5 \times \frac{0,1}{20} = \boxed{2,5 \text{ mm}}$$

On peut voir l'arbre en entier si on prend une photo au format portrait, mais pas au format paysage.

7. On a $f_1' = 2f_2'$ donc le grandissement est doublé : on peut voir les objets avec plus de détails.

Tout se passe comme si on avait l'autre objectif mais qu'on observait l'objet deux fois plus près : $\frac{f_1'}{L} = \frac{f_2'}{L/2}$

8. On peut supposer que $L \gg f'_1$ si bien que l'image de l'arbre est dans le plan focal image de $(\mathcal{L}_1)$:

$$\overline{O_1 A_1} \approx f'_1. \text{ D'où :}$$

$$\overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = \boxed{f'_1 - e}$$

9. L'image $A'B'$ est réelle si $\overline{O_2 A'} \geq 0$.

$$\text{Or : } \frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2} \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{O_2 A'}} = \frac{1}{f'_1 - e} + \frac{1}{f'_2}$$

On sait que $f'_2 \leq 0$. Or il faut que $\frac{1}{f'_1 - e} + \frac{1}{f'_2} \geq 0$

Il faut donc que $f'_1 - e \geq 0$ soit $f'_1 \geq e$ $(*)$

$$\text{Alors : } 1 + \frac{f'_1 - e}{f'_2} \geq 0 \Leftrightarrow f'_2 + f'_1 - e \leq 0 \text{ car } f'_2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e \geq f'_1 + f'_2 \quad (**)$$

On combine $(*)$ et $(**)$:

$$\boxed{f'_1 + f'_2 \leq e \leq f'_1}$$

Ici $f'_1 = 10 \text{ cm}$ et $f'_1 + f'_2 = 5 \text{ cm}$: l'inégalité est satisfaite.

10. On vient de montrer que $\frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1 - e} + \frac{1}{f'_2}$

$$\text{D'où } \frac{1}{d} = \frac{f'_1 + f'_2 - e}{(f'_1 - e) f'_2} \Leftrightarrow d = \frac{(f'_1 - e) f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{2 \times (-5)}{-3} = \boxed{3,3 \text{ cm}}$$

$$\text{Et } \overline{A'B'} = \overline{A_1 B_1} \times \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}} ; \quad \overline{A_1 B_1} = \overline{AB} \times \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}}$$

$$\text{On combine : } \overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}} \times \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} = h \times \frac{d}{f'_1 - e} \times \frac{f'_1}{-L}$$

$$\text{A.N : } \overline{A'B'} = 5 \text{ m} \times \frac{3,3 \cdot 10^{-2} \times 10 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2} \times (-20)} = -4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Soit $\overline{A'B'} = \boxed{-40 \text{ mm}}$. On a un agrandissement plus important grâce à la lentille : ce n'est pas équivalent.

11. On se trouve dans une situation analogue à Q3, cette fois h est la hauteur du Mont St-Michel

$$L = BC = 1,46 \text{ km}$$

$$= 18 \text{ mm (table 1)}$$

Pour trouver $A'B'$ on remarque que le mont occupe $\frac{1}{3}$ de la hauteur de la photo et d'après la figure 2 la hauteur du capteur est $5,4 \text{ mm}$.

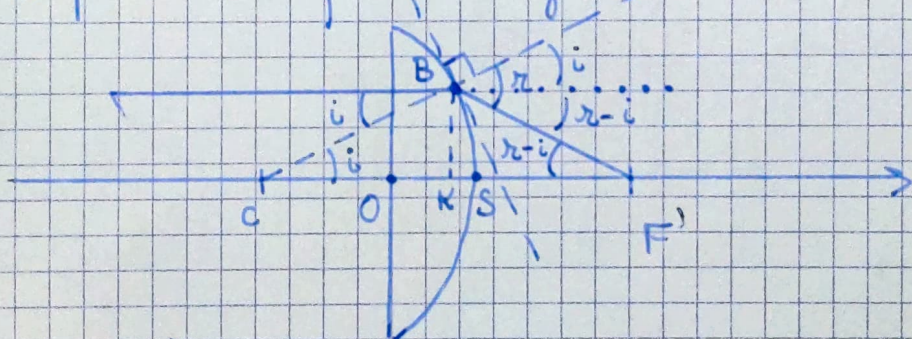
D'au: $b = \frac{L}{f} \cdot \lambda' B' = \frac{1,46 \cdot 10^3}{18 \cdot 10^8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 5,7 \cdot 10^3$

On prend $5,7 \approx 6$ $1,46 \approx 1,5$

$$h \approx \frac{1,5 \cdot 6}{18 \cdot 3} \cdot 10^3 = \frac{1,5}{9} \cdot 10^3 \approx \boxed{160 \text{ m}}$$

12. $n \sin i = \sin r$

13. On peut remarquer, des angles alternes internes:



Donc on voit que $\tan(\alpha - i) = \frac{KB}{KF} = \frac{R \sin i}{KF}$

D'aut : $RF' = \frac{R \sin i}{\tan(\alpha - i)}$

De plus : $CS = R$ et $CK = R \cos i$

Enfin $OS = e$ par définition.

Bm a: $\overline{OF} = \overline{OS} + \overline{SC} + \overline{CK} + \overline{KF}$
 $= \overline{OS} - \overline{SC} + \overline{CK} + \overline{KF}$

$$OF' = r - R(1 - \cos i) + \frac{R \sin i}{\tan(r-i)}$$

14. Pour que la lentille soit rigoureusement stigmatique, il faut

que OF' soit constant et ne dépende pas du rayon donc pas de i . Or ici OF' dépend de i : la lentille n'est pas rigoureusement stigmatique.

Si on a des rayons paraxiaux i et r sont petits, alors :

$$1 - \cos i \approx 0 \text{ à l'ordre 1 en } i$$

$$\sin i \approx i \quad \tan(r-i) \approx r-i \approx (n-1)i \quad (\text{loi de Descartes})$$

$$\text{D'où : } OF' = e + \frac{R \cdot i}{(n-1)i} = \boxed{\frac{R}{n-1}} \quad \text{car } e \ll R.$$

La lentille est alors approximativement stigmatique.

$$15. (OSF') = (OS) + (SF') = n OS + SF'$$

$$\text{Or : } SF' = OF' - OS = OF' - e = \frac{R}{n-1} - e$$

$$\text{De plus } OS = e$$

$$\text{Et donc : } (OSF') = \boxed{(n-1)e + \frac{R}{n-1}}$$

16. On peut remarquer que A et O sont sur une même surface d'onde car la surface d'onde est perpendiculaire aux rayons (théorème de Malus) donc ils ont même phase.

$$\text{Ainsi : } (ASF') = (OSF') = \phi(F') - \phi(R) = \phi(F') - \phi(O)$$

2- La lumière

17. En passant de $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{4}$ on multiplie la surface par 4, il faut donc diviser par 4 le temps d'exposition par 4 et prendre $\frac{1}{1000} s$.

18. Il va diminuer la profondeur de champ (doc 4).

19. On a une vitesse très grande donc on réduit le risque de flou.

20. On a $E = h \cdot \nu$
 constante de Planck $6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ $\nwarrow$ fréquence en Hz ou s^{-1}

21. On a un disque de diamètre $d_0 = 5 \text{ mm}$ donc la surface traversée par les photons est $S = \pi \frac{d_0^2}{4}$.
 De plus : $\Delta t = \frac{1}{500} \text{ s}$ et l'énergie totale interceptée et : $E_{\text{tot}} = P \times \frac{\pi}{4} d_0^2 \times \Delta t$
 $\uparrow$ 700 W/m^2 , puissance du rayonnement solaire
 Le nombre de photons est :

$$N = \frac{E_{\text{tot}}}{E_{\text{photon}}} = \frac{P \times \pi d_0^2 \Delta t}{4 \cdot h \cdot \nu} = \frac{700 \cdot \pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2}{500 \cdot 4 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14}}$$

$$= \frac{3 \times 25}{5 \times 4 \times 5} 10^{14} = \frac{3}{4} \cdot 10^{14} \approx \boxed{7,5 \cdot 10^{13}} \text{ photons}$$

II - Fonctionnement d'un générateur à turbine

1 - Cycle de Carnot

22. Pour un gaz parfait : $PV = nRT$.
 On a donc $PV = c^{\text{ste}}$ sur une isotherme.

Soit : $\frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0 \quad \frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$

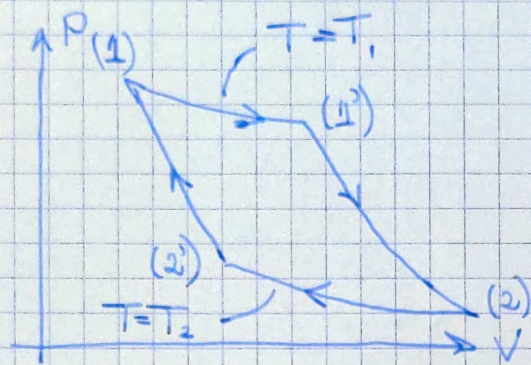
Sur une adiabatique réversible : $PV^\gamma = c^{\text{ste}}$ (loi de Laplace)

donc $\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \Leftrightarrow \frac{dP}{dV} = -\gamma \frac{P}{V}$

Ainsi : $\boxed{\left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{adiabatique}} = \gamma \left| \frac{dP}{dV} \right|_{\text{isotherme}}}$ avec $\gamma > 1$

Donc la pente des adiabatiques est plus grande.

23. On en déduit la représentation suivante, en remarquant que PV est plus grand à température élevée ?



Le cycle est moteur donc
 $W = \oint P dV < 0$ ainsi
 $\oint P dV > 0$ d'où le sens
 d'orientation du cycle.

L'aire du cycle représente le travail fourni par cycle.

24. On définit le rendement comme $\eta = -\frac{W}{Q_c}$ où Q_c
 est le transfert thermique reçu par la source chaude.

On peut d'abord calculer W :

$$W_{1 \rightarrow 1'} = - \int_1^{1'} P dV = - \int_1^{1'} nRT_1 \cdot \frac{dV}{V}$$

$$= nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_{1'}}\right)$$

De même:

$$W_{2 \rightarrow 2'} = nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_{2'}}\right)$$

On applique le 1^{er} principe sur $(1') \rightarrow (2)$ en remarquant que
 c'est une adiabatique donc $Q = 0$ (méthode proposée par Clément
 en TD; voir le corrigé de TD pour la méthode générale si $Q \neq 0$):

$$W_{2' \rightarrow 2} = \Delta U_{1' \rightarrow 2} = U_2 - U_{1'} = C_V (T_2 - T_1)$$

par la 1^{re} loi de Joule.

De même $W_{2' \rightarrow 1} = U_1 - U_{2'} = C_V (T_1 - T_2)$

Alors: $W = W_{1 \rightarrow 1'} + W_{1' \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 2'} + W_{2' \rightarrow 1}$

$$W = nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_{1'}}\right) + nRT_2 \ln\left(\frac{V_2}{V_{2'}}\right)$$

De plus sur $1 \rightarrow 1'$ on a $\Delta U = 0 = W_{1 \rightarrow 1'} + Q_c$

D'où $Q_c = -W_{1 \rightarrow 1'} = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_1}{V_{1'}}\right)$

Enfin: $P_1 V_1^\gamma = P_{2'} V_{2'}^\gamma \Leftrightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_{2'} V_{2'}^{\gamma-1} \quad (1)$

Et $T_1 V_{1'}^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \quad (2)$

$$\frac{(1)}{(2)} \text{ donne : } \left(\frac{V_1}{V_1'} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_2}{V_2'} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1'} = \frac{V_2}{V_2'}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} W = nR(T_2 - T_1) \ln\left(\frac{V_2}{V_2'}\right) \\ Q_c = nRT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_2'}\right) \end{cases}$$

$$\text{Et : } \boxed{\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{T_2}{T_1}} \quad \text{AN : } \eta = 1 - \frac{300}{1200} = \boxed{0,75}$$

25. Ce rendement ne dépend pas de la nature du fluide, en réalité. Nous pouvons le démontrer pour un fluide quelconque, sans faire l'hypothèse de gaz parfait. Le fluide reçoit un transfert Q_c de la source chaude, Q_f de la source froide et un travail $W \leq 0$. Par le 1^{er} principe :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{sur un cycle}$$

$$\begin{aligned} \text{2^e principe : } \Delta S &= S_{\text{éch}} + S_{\text{créé}} \\ &= \frac{Q_c}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} + S_{\text{créé}} = 0 \quad \text{sur un cycle} \end{aligned}$$

$$\text{Comme } S_{\text{créé}} \geq 0 : \frac{Q_c}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} \leq 0 \Rightarrow Q_f \leq -\frac{T_2}{T_1} Q_c$$

$$\text{Et : } W + Q_c \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \geq 0$$

$$\text{Soit : } \eta = -\frac{W}{Q_c} \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} \quad \text{avec égalité pour un cycle réversible.}$$

On a donc le rendement maximal avec le cycle de Carnot.

26. Lors de la transformation :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{créé}}$$

$$\begin{aligned} \uparrow & \quad \uparrow \\ L &= 0 \quad (\text{transformation adiabatique}) \\ L &= 0 \quad (\text{cycle réversible}) \end{aligned}$$

Donc $\Delta S = 0$ le long d'une adiabatique réversible.

27. On a $\int T dS = \int T \cdot dS_{\text{ch}}$ car $S_{\text{créé}} = 0$

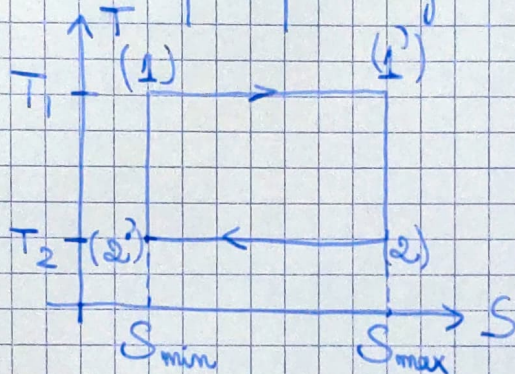
$$= \int T \cdot \frac{dQ}{T_{\text{ext}}}$$

$$= \int T \cdot \frac{dQ}{T} \quad T_{\text{ext}} = T \text{ car la transformation est réversible}$$

$$= Q_c + Q_f$$

$$= -W > 0 \quad (*)$$

Ceci nous indique que le cycle est orienté comme ceci :



28. On reprend le calcul de (*) uniquement le long de $1 \rightarrow 1'$, on trouve $T_1 \Delta S_{1 \rightarrow 1'} = Q_{1 \rightarrow 1'} = Q_c$

De même $T_2 \Delta S_{2 \rightarrow 2'} = Q_f$

Or $\Delta S_{1 \rightarrow 1'} = -\Delta S_{2 \rightarrow 2'} = S_{\text{max}} - S_{\text{min}}$

On a alors :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 1'} = \frac{Q_c}{T_1}$$

$$\Delta S_{2 \rightarrow 2'} = \frac{Q_f}{T_2}$$

29. D'après (*) on voit que l'aire des deux cycles est égale et vaut $-W > 0$.

On a alors : $-W = (T_1 - T_2)(S_{\text{max}} - S_{\text{min}})$ aire du cycle

Or on a vu : $S_{\text{max}} - S_{\text{min}} = \frac{Q_c}{T_1} = \Delta S_{1 \rightarrow 1'}$

D'où $Q_c = T_1(S_{\text{max}} - S_{\text{min}})$

Ainsi :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

2 - Étude d'un générateur à turbine à gaz

30. La masse du système Σ à t et $t+dt$ est :

$$m(t) = m_0(t) + \delta m_e$$

$$m(t+dt) = \underbrace{m_0(t+dt)}_{= m_0(t) \text{ car on est en régime stationnaire.}} + \delta m_s = m_0(t) + \delta m_s$$

Or $m(t) = m(t+dt)$ car Σ est fermé.

On en déduit : $\boxed{\delta m_e = \delta m_s}$

31. On a un travail d'entrée et un travail de sortie :

$$\delta W_{p, \text{entrée}} = - P_e \cdot dV_e = - P_e \times (-V_e \cdot \delta m_e)$$

$$\delta W_{p, \text{sortie}} = - P_s \cdot dV_s = - P_s \times (+V_s \delta m_s)$$

$$= + P_s V_s \delta m_e$$

D'où le travail massique :

$$w_p = \frac{1}{\delta m_e} [\delta W_{p, \text{entrée}} + \delta W_{p, \text{sortie}}] = \boxed{P_e V_e - P_s V_s}$$

32. On applique le 1^{er} principe à Σ entre t et $t+dt$, en l'absence de variation d'énergie mécanique :

$$dU = \delta W + \delta Q \quad \text{avec} \quad \delta Q + \delta W = \delta m_e [q + w_u + w_p]$$

$$\text{Or } dU = U(\Sigma, t+dt) - U(\Sigma, t)$$

$$= U(\Sigma_0, t+dt) - U(\Sigma_0, t) + \underbrace{u_s \delta m_s - u_e \delta m_e}_{\text{par extensivité de } U}$$

$$= u_s \delta m_s - u_e \delta m_e \quad (\text{régime stationnaire})$$

$$= (u_s - u_e) \delta m_e \quad (\text{d'après Q30}).$$

$$\text{Ainsi } u_s - u_e = w_u + q + w_p$$

$$= w_u + q + P_e V_e - P_s V_s$$

Or $h = u + P v$, on en déduit $\boxed{h_s - h_e = w_u + q}$

33. On a pour un gaz parfait, lors d'une transformation

adiabatique réversible: $PV^\gamma = c^{ste}$.

Or: $PV = nRT$ pour un gaz parfait donc $V = nR \frac{T}{P}$

Et: $P \cdot \left(\frac{T}{P}\right)^\gamma = c^{ste} \Rightarrow \boxed{P^{1-\gamma} T^\gamma = c^{ste}}$

On en déduit $P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma = P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma$

Soit: $T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \times \lambda = \boxed{300K}$

Et de même $T_3 = \lambda \cdot T_4$ Or $T_3 = \epsilon \cdot T_1$

D'où: $T_4 = \frac{\epsilon}{\lambda} \cdot T_1 = \boxed{300K}$ également.

34. La transformation étant adiabatique le 1^{er} principe industriel donne: $h_2 - h_1 = w_{12}$.

Or par le 1^{er} loi de Joule $h_2 - h_1 = c_p (T_2 - T_1)$

Et $T_2 = \lambda T_1$. On trouve $\boxed{w_{1 \rightarrow 2} = (\lambda - 1) c_p T_1}$

35. Il n'y a pas d'apport de travail ($w_{23} = 0$) donc:

Or $h_3 - h_2 = q_{23}$
 $h_3 - h_2 = c_p (T_3 - T_2) = c_p (\epsilon T_1 - \lambda T_1)$

$\boxed{q_{23} = c_p (\epsilon - \lambda) T_1} = 1 \times 2 \times 300 = \boxed{600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

36. La détente étant isentropique, on la suppose adiabatique réversible.

Alors $q_{34} = 0$ et $h_4 - h_3 = w_{34} = -w_T$
↖ fourni par le gaz

D'où $w_T = c_p (T_3 - T_4) = c_p \left(\epsilon - \frac{\epsilon}{\lambda}\right) T_1$

$\boxed{w_T = c_p \epsilon \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) T_1 = 600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

37. On a $w_T = w_c + w_a$, soit

$w_a = w_T - w_c$

$\boxed{w_a = c_p T_1 \left[\epsilon \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) - (\lambda - 1) \right]}$

d'après Q34 et Q36

A.N : $\boxed{\dot{w}_a = 300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

$$\frac{d\dot{w}_a}{d\lambda} = c_p T_1 \left[\frac{z}{\lambda^2} - 1 \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{z}$$

Ce travail est maximal pour $\boxed{\lambda = \sqrt{z}}$ ce qui correspond bien à ce qui a été choisi pour la turbine.

38. Ici $R = \frac{\dot{w}_c}{\dot{w}_a} = \frac{\dot{w}_{12}}{\dot{w}_a} = \frac{\lambda - 1}{z(1 - \frac{1}{\lambda}) - (\lambda - 1)} = \frac{1}{\frac{z}{\lambda} - 1}$

Soit $\boxed{R = \frac{\lambda}{z - \lambda}}$

Ici $R = 1$: la moitié de l'énergie obtenue sert à alimenter le compresseur. Ceci peut sembler

élevé mais nous avons vu que cette valeur maximise le travail obtenu.

39. On peut définir $\eta = \frac{\dot{w}_a}{q_{23}} = \frac{z(1 - \frac{1}{\lambda}) - (\lambda - 1)}{z - \lambda}$

Soit : $\eta = \frac{(\lambda - 1)(z - \lambda)}{\lambda(z - \lambda)} = \boxed{1 - \frac{1}{\lambda}}$ A.N : $\eta = \frac{1}{2}$

Pour un cycle de Carnot : $\eta = 1 - \frac{T_c}{T_h} = 1 - \frac{1}{z} = \frac{3}{4}$

Le rendement obtenu est inférieur au rendement de Carnot, ce qui est logique car le cycle n'est pas réversible.

40. Comme il n'y a pas d'apport de travail sur l'étape :

$$h_1 - h_4 = q_{41} = c_p(T_1 - T_4) = -c_p T_1 \left(\frac{z}{\lambda} - 1 \right)$$

A.N : $\boxed{q_{41} = -300 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}}$

Ce transfert pourrait être récupéré par un échangeur thermique et restitué lors de la phase $2 \rightarrow 3$ à l'aide d'une pompe à chaleur (qui récupère de l'énergie du détenteur, par exemple). C'est l'objet de la suite du sujet que je n'ai pas mise dans le DS.

III - Étude cinétique et thermodynamique d'une réaction d'isomérisation

41. $v_1 = k_1 \times [I_a(aq)]$ par définition d'une loi d'ordre 1

Or si on fait un tableau :

	$I_a(aq) = I_f(aq)$	
E. Init	a	0
EF	a-x	x

On voit que $[I_a] = a - x$

D'où : $v_1 = k_1(a-x)$

42. $v_2 = k_2 [I_f(aq)]$ soit $v_2 = k_2 x$

43. On a : $-\frac{d[I_a]}{dt} = \underbrace{v_1}_{\text{consommation de } I_a \text{ en sens direct}} - \underbrace{v_2}_{\text{production de } I_a \text{ en sens inverse}}$

Or : $-\frac{d[I_a]}{dt} = -\frac{d}{dt}(a-x) = \frac{dx}{dt}$, et on a :

$$\frac{dx}{dt} = k_1(a-x) - k_2 x$$

44. À l'équilibre, $x = x_{\infty}$ et $\frac{dx}{dt} = 0$ d'où :

$$k_1(a-x_{\infty}) - k_2 x_{\infty} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{\infty} = \frac{k_1 a}{k_1 + k_2}$$

45. On utilise un spectrophotomètre. Pour choisir la longueur d'onde de travail, on essaye d'avoir une absorbance A proche de 1 aux concentrations usuelles (les mesures de A sont alors plus précises). On commence par faire le blanc en mesurant l'absorbance d'une cure side.

46. On essaye d'ajuster en fonction de t la grandeur :

np. $\log\left(1 - \frac{A-A_0}{A_{\infty}-A_0}\right)$ soit :

$$g(A, A_0, A_{\infty}) = \ln\left(1 - \frac{A-A_0}{A_{\infty}-A_0}\right)$$

47. La méthode consiste à faire un grand nombre de régressions linéaires (ici, N régressions; l.24). On perturbe les mesures dans l'intervalle d'incertitude (l.32-33) puis pour chaque série de mesures perturbées, on fait une régression linéaire (l.42). On enregistre tous les coefficients de régression. Leur moyenne donne l'estimation finale (l.48-49) et leur écart-type l'incertitude (l.52-53).

48. On obtient $g(A, A_0, A_\infty) = At + B$ avec:

$$\begin{cases} A = -0,256 \pm 0,010 \text{ min}^{-1} \\ B = -0,007 \pm 0,032 \end{cases}$$

$B=0$ est compris dans l'intervalle d'incertitude de B et $A < 0$ donc on est en accord avec la relation théorique et:

$$\boxed{k_1 + k_2 = 0,256 \pm 0,010 \text{ min}^{-1}}$$

49. La loi d'actions de masse implique qu'à l'équilibre:

$$\boxed{K^o(T) = Q = \frac{[I_b]}{[I_a]}}$$

$$\begin{aligned} 50. \text{ On a: } K^o(T) &= \exp\left(-\frac{\Delta_r G^o}{RT}\right) = \exp\left(+\frac{3,05 \cdot 10^6}{8,3 \times 293}\right) \\ &\approx \exp\left(\frac{3000}{300 \times 8}\right) \approx \exp\left(\frac{5}{4}\right) \\ &\approx e \times \exp\left(\frac{1}{4}\right) = e \times \left(1 + \frac{1}{4}\right) \quad (\text{DL ordre 1}) \\ &\approx 2,7 \times \frac{5}{4} = \frac{13,5}{4} \approx \frac{13,6}{4} = 3,4 \end{aligned}$$

$$\text{Soit, } \boxed{K^o(T) \approx 3}$$

$$51. \text{ On a } K^o(T) = \frac{[I_b]_{eq}}{[I_a]_{eq}} = \frac{x_\infty}{a - x_\infty} = \frac{\frac{k_1}{k_1 + k_2}}{1 - \frac{k_1}{k_1 + k_2}} = \frac{k_1}{k_2}$$

$$\text{Et } k_1 + k_2 = -A = 0,256 \text{ min}^{-1}$$

$$\text{D'où: } k_2(1 + K^o(T)) = -A \Leftrightarrow \boxed{k_2 = \frac{-A}{1 + K^o} \approx 0,064 \text{ min}^{-1}}$$

$$\text{Et } k_1 = -A - k_2 = \boxed{0,192 \text{ min}^{-1}}$$