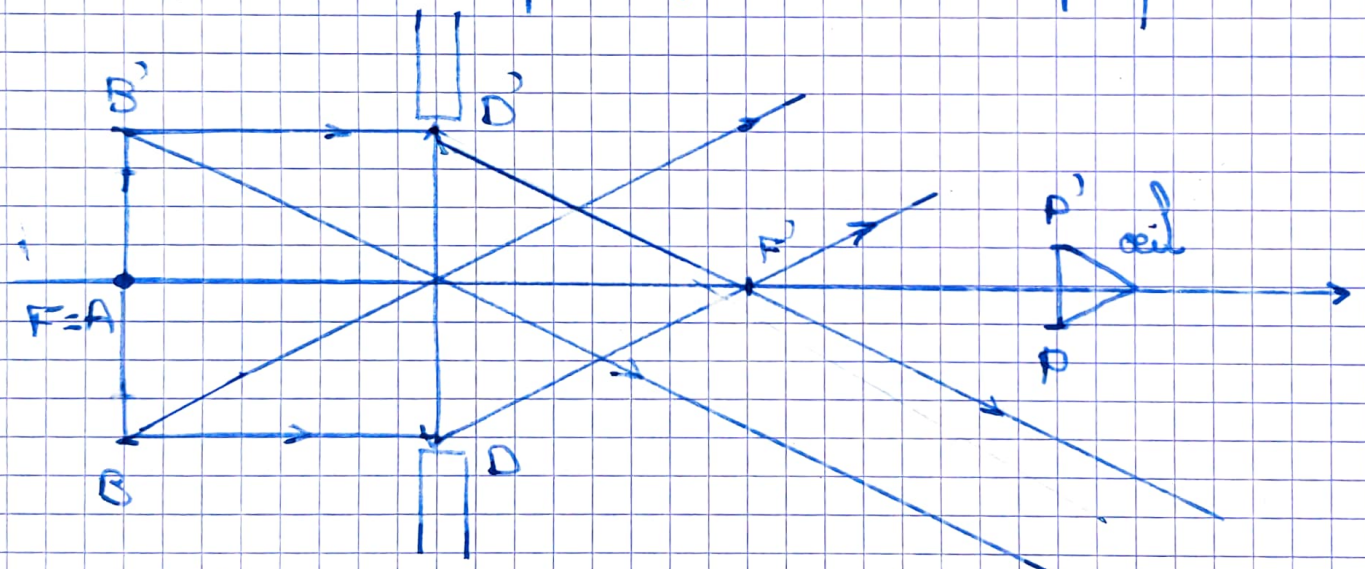
DS4 - CCINP
Correction

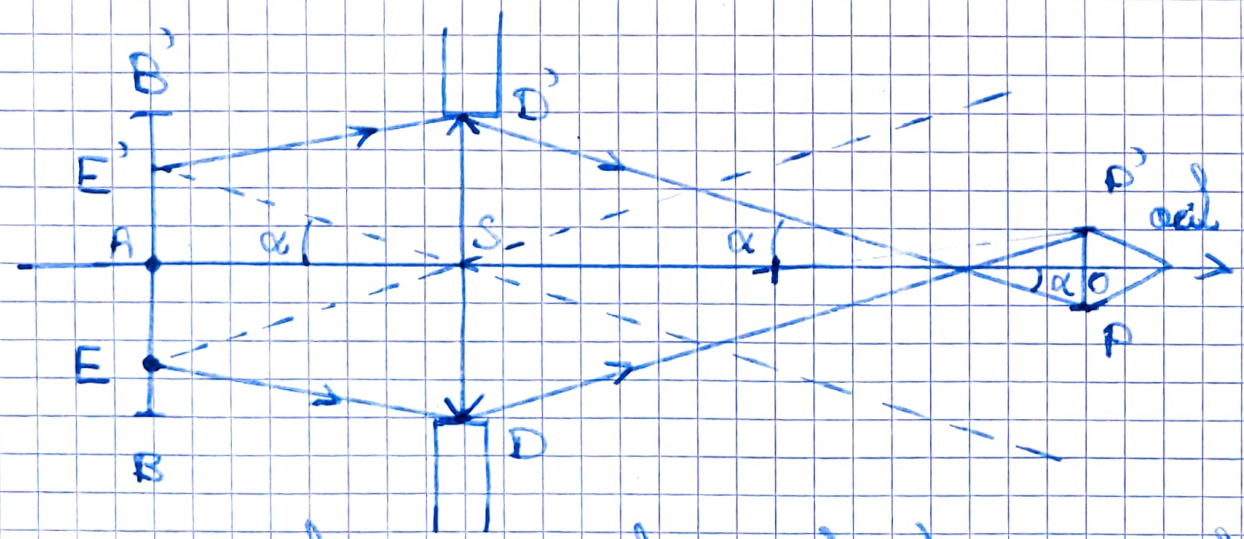
I - Gobelet magique

1. Dans l'approximation de Gauss, on suppose que l'on a des rayons paraxiaux, c'est-à-dire :
   * proches de l'axe optique
   * peu inclinés par rapport à l'axe optique

2.



3.



On a tracé les rayons de construction, en pointillés : les rayons issus de E' et E' ressortent tous parallèlement car

E et E' sont dans le plan focal objet.

4. On définit l'angle α sur la figure précédente, alors :

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{AE'}}{\overline{AS}} = \frac{\overline{SD'} + \overline{OP'}}{SO}$$

D'où : $\overline{AE'} = \frac{\overline{AS}}{SO}\left(\overline{SD'} + \overline{OP'}\right)$

On multiplie par deux :

$$\boxed{\overline{EE'} = -\frac{\overline{SF}}{SO}\left(\overline{DD'} + \overline{PP'}\right)}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ \times\ 12 \\ \hline 12 \\ 26 \\ \hline 312 \end{array}$$

AN : $\overline{EE'} = +\frac{12}{200} \times (20+6) = \frac{312}{200}$

d'où $\boxed{\overline{EE'} = 1{,}56 \text{ mm}}$

5. En comparant les schémas optiques réalisés en Q2 et en Q3 on peut constater que les rayons issus de tout point situé entre E et E', ou entre E' et B', n'intercepteront pas l'œil. En effet, les deux rayons extrêmaux passent alors soit tous deux au-dessus, soit en-dessous de l'œil. Donc EE' est la seule portion visible de l'objet (son diamètre) et la surface correspondante est $S_{visible} = \pi\left(\frac{EE'}{2}\right)^2$.

Alors : $\tau_1 = \frac{S_{visible}}{S_{objet}} = \frac{\pi\left(\frac{EE'}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{BB'}{2}\right)^2} = \left(\frac{EE'}{BB'}\right)^2$

AN : $\tau_1 = \left(\frac{1{,}56}{20}\right)^2 = 0{,}08^2 \approx \boxed{0{,}0064}$

Il s'agit d'une fraction inférieure à 1% : l'objet n'est pas visible

6. On note A_2 l'image de A par la lentille (qui nous donnera la position de l'image B_2B_2') :

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{\overline{SA_2} = \frac{f' \times \overline{SA}}{f' + \overline{SA}}}$$

AN : $\overline{SA_2} = \frac{36 \times (-20)}{36 - 20} = -\frac{36 \times 20}{16} = -9 \times 5$

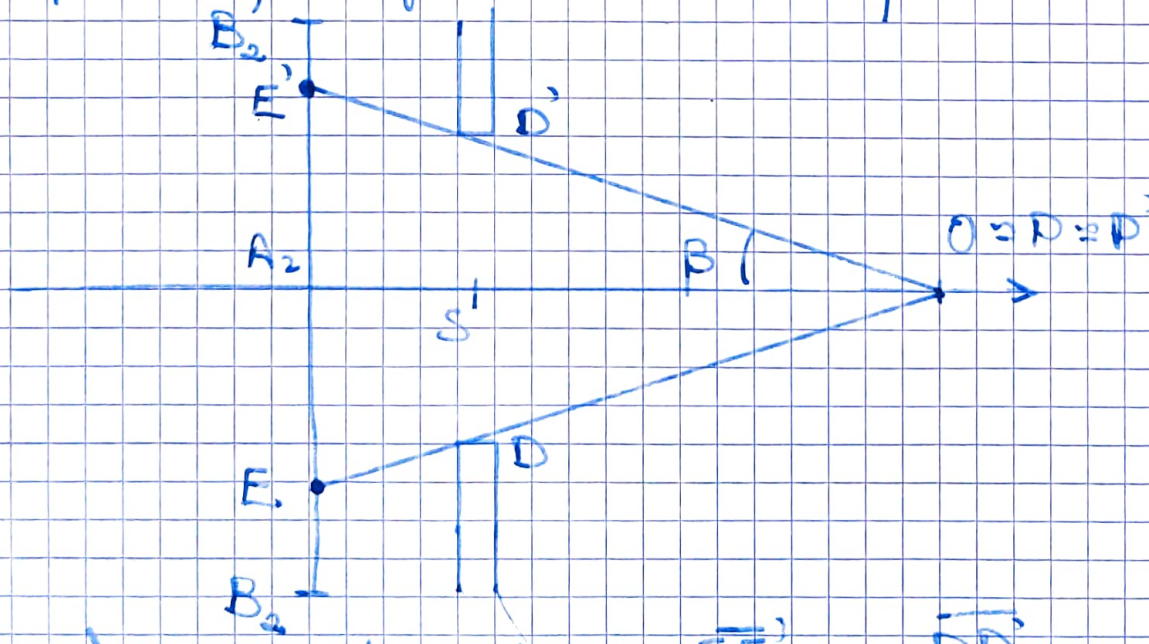
$\boxed{\overline{SA_2} = -45 \text{ mm}}$ < 0 donc l'image est virtuelle.

Le grandissement vaut $\gamma = \frac{\overline{SA_2}}{\overline{SA}} = \frac{-45}{-20} = \boxed{2,25}$

7. La distance entre l'image et l'œil vaut :

$\overline{A_2O} = \overline{SO} - \overline{SA_2} = 200 + 45 = \boxed{245 \text{ mm}}$

Une partie de l'image virtuelle est masquée :



On a désormais $\tan(\beta) = \frac{\overline{EE'}}{\overline{A_2O}} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{SO}}$

Donc : $\overline{EE'} = \frac{\overline{DD'}}{\overline{SO}} \overline{A_2O} = \frac{20}{200} \times 245 = 24,5 \text{ mm}$

Et on en déduit :

$$\zeta_2 = \left(\frac{\overline{EE'}}{\overline{BB'}}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^2} \times \left(\frac{\overline{EE'}}{\overline{BB'}}\right)^2 = \frac{1}{2,25^2} \times \left(\frac{21,5}{20}\right)^2$$

⚠ car les pointés sont pris sur l'image virtuelle

$$\zeta_2 \approx \frac{1}{5} \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 \approx \frac{5}{16} \approx \boxed{0,3}$$

Environ 30% de la surface est visible.

8. On a $n_2 \sin(i) = n_1 \sin(r) = \sin(r)$.

9. On a $\overline{OF'} = \overline{OS} + \overline{SK} + \overline{KF'}$

Avec $\begin{cases} \overline{OS} = e \text{ par définition} \\ \overline{SK} = \overline{SC} + \overline{CK} = -R + R\cos i = -R(1-\cos i) \end{cases}$

Enfin on peut remarquer que $\begin{cases} \overline{KN} = R\sin(i) \\ \widehat{NF'K} = r - i \end{cases}$

Donc : $R\sin(i) = \overline{KF'} \times \tan(r-i)$

Ou encore $\overline{KF'} = \dfrac{R\sin i}{\tan(r-i)}$.

On conclut : $\overline{OF'} = e - R(1-\cos i) + \dfrac{R\sin i}{\tan(r-i)}$

10. $\overline{OF'}$ dépend de l'angle d'incidence i donc la lentille n'est pas rigoureusement stigmatique.

En revanche, pour une lentille mince $e \ll R$ et dans les conditions de Gauss : $\begin{cases} \sin i \approx i \\ \sin r \approx r \\ \tan(r-i) \approx r - i \end{cases}$

Donc $\overline{OF'} \approx e + R\dfrac{i}{r-i}$ et $n_2 i \approx r$ ($e \ll R$)

Donc $\overline{OF'} \approx \boxed{R_1 \times \frac{1}{n_2 - 1}}$

On en déduit $f'_1 = OF' \approx 6 \times \frac{1}{0,5} = \boxed{12 \text{ mm}}$

11. On a alors : $\frac{1}{\overline{SA'}} - \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{f'_2} = \frac{n_2 - n_3}{n_1 R}$ avec $R = \overline{CS}$

D'où $f'_2 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_3} = \frac{1 \times 6}{1,5 - 1,33} = \frac{6}{1/6} = 36 \text{ mm}$

12. On se retrouve exactement dans les configurations étudiées en parties 1.1 et 1.2 (mêmes distances et même focale de lentille) ce qui explique que l'on ne voie que 1% de l'objet en l'absence d'eau et environ 50% en présence d'eau.

I - Utilisation d'un réchaud

13. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des puissances (mécanique et thermique) donc se mesurent en W.
D_m est un débit massique et se mesure en $kg \cdot s^{-1}$

14. La masse qui rentre dans le système pendant dt est
$\delta m_e = D_{m,A} \cdot dt$
De même la masse qui sort est $\delta m_s = D_{m,B} \, dt$
Par conservation de la masse :
$dm = \delta m_e - \delta m_s = (D_{m,A} - D_{m,B}) \, dt$
Donc : $\frac{dm}{dt} = D_{m,t} - D_{m,B}$

15. On définit le système ouvert $\mathcal{S}(t)$ correspondant au tuyère

* le système Σ_e correspondant à la matière qui entre en A entre t et $t+dt$
* le système Σ_s correspondant à la matière qui sort en B entre t et $t+dt$

Soit $\Sigma = \Sigma_e \cup \mathcal{S}(t) = \mathcal{S}(t+dt) \cup \Sigma_s$

C'est un système fermé, on lui applique le 1er principe:

$$dE_c + dU = \delta W + \delta Q$$

Or $dU = \underbrace{U(t+dt) - U(t)}_{=0 \text{ en régime stationnaire}} + \underbrace{\delta m_s}_{=D_m dt} u_B - \underbrace{\delta m_e}_{=D_m dt} u_A$ par extensivité de U

car $\boxed{D_{mA} = D_{mB} = D_m}$ en régime stationnaire

donc $dU = D_m dt (u_B - u_A)$

où u est l'énergie interne massique.

De plus $\delta Q = \dot{Q} dt$

et $\delta W = \dot{W} dt + \underbrace{P_A dV_A}_{\text{travail d'admission}} + \underbrace{P_B dV_B}_{\text{travail d'extraction}}$

Or : $dV_A = -v_A \times \delta m_e = -v_A D_m dt$

$\uparrow$ on perd du volume en entrée

et $dV_B = +v_B D_m dt$ avec v le volume massique

Alors : $\delta W = \dot{W} dt + (P_B v_B - P_A v_A) D_m dt$

Enfin on peut remarquer que $dE_c = D_m dt (e_{c,B} - e_{c,A})$.

On conclut :

$$D_m\,dt\left[e_{c,B} - e_{c,A} + u_B - u_A\right] = (\dot{Q}+\dot{W})\,dt + D_m\,dt\left[P_B v_B - P_A v_A\right]$$

Ou encore : $$\boxed{D_m\left(\Delta e_c + \Delta h\right) = \dot{Q} + \dot{W}}$$

avec $h = u + Pv$ l'enthalpie massique.

On a par ailleurs $\Delta e_c = \frac{1}{2}\left(\omega_B^2 - \omega_A^2\right)$ avec les notations du schéma.

16. $$\underbrace{\frac{dU}{dt}}_{\substack{\text{variation}\\ \text{d'énergie du}\\ \text{système}}} = \underbrace{D_{m,A}\left(h_A + e_{c,A}\right)}_{\substack{\text{énergie entrante}\\ \text{(avec le fluide)}}} - \underbrace{D_{m,B}\left(h_B + e_{c,B}\right)}_{\substack{\text{énergie sortante}\\ \text{(avec le fluide)}}} + \underbrace{\dot{W} + \dot{Q}}_{\substack{\text{travail et}\\ \text{transfert}\\ \text{thermique reçus}}}$$

On a quatre termes qui traduisent les flux énergétiques entrant et sortant du système, via un échange de matière ou non.

17. On applique le premier principe industriel en régime instationnaire avec :

$\dot{W} = 0$ (paroi indéformable)

$\dot{Q} = 0$ (réservoir adiabatique)

$D_{m,A} = 0$ (pas de gaz entrant)

et on réalise $e_{c,B}$ d'après l'énoncé, alors :

$$\frac{dU}{dt} = -D_{m,B}\,h_B = -D_{m,B}\,h_0(t)$$

en supposant que le fluide sortant a conservé son enthalpie massique.

Par ailleurs on a d'après Q14 et avec $D_{m,A} = 0$:

$\frac{dm}{dt} = -D_{m,B}$. On obtient bien les équations demandées.

18. Un gaz peut être considéré comme un gaz parfait si on peut négliger les interactions, c'est généralement le cas lorsque $P \to 0$ et/ou $T \to 0$.

On a alors : $\boxed{C_{p,m} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}}$

19. On a vu $h = u + Pv$

Or $Pv = \frac{PV}{m} = \frac{nRT}{m} = \frac{RT}{M}$ par la loi des gaz parfaits

(m : masse de gaz)

Donc : $h = u + \frac{RT}{M}$.

Alors : $\frac{du}{dT} = \frac{dh}{dT} - \frac{R}{M} = \frac{1}{M}\left[\underbrace{\frac{d\left(\frac{H}{n}\right)}{dT}}_{= C_{p,m} \text{ par définition}} - R\right]$

$= \frac{1}{M}\left[\frac{R\gamma}{\gamma - 1} - R\right]$

$= \frac{R}{M} \times \frac{1}{\gamma - 1}$ On retrouve bien le résultat demandé

20. On a alors d'une part :

$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}(mu) = m\frac{du}{dt} + u\frac{dm}{dt} = m\frac{du}{dt} - D_m u$

Et d'autre part :

$\frac{dU}{dt} = -D_m h$

Donc : $-D_m h = m\frac{du}{dt} - D_m u$

Or $\frac{du}{dt} = \frac{dT}{dt}\frac{du}{dT} = \frac{P}{M(\gamma - 1)}\frac{dT}{dt}$.

Donc : $\frac{R m}{M(\gamma-1)} \frac{dT}{dt} = -D_m (h - w) = -D_m \cdot P \cdot v$

$= -D_m \cdot \frac{PV}{m} = -D_m \cdot \frac{nRT}{m}$

$= +\frac{dm}{dt} \frac{RT}{M}$

Après simplification on a bien : $\boxed{\frac{dT}{dt} = \frac{(\gamma-1)T}{m} \frac{dm}{dt}}$

2.1. On a $dV = \underbrace{S}_{\text{section}} \times \underbrace{v_s dt}_{\text{distance parcourue pendant } dt}$

Alors $\delta m_g = M \times dn$ où dn est le nombre de moles de gaz sortant pendant dt

Par la loi des gaz parfaits : $P_{ext} \times dV = dn \times R \times T_g$

Donc $\delta m_g = M \times \frac{P_{ext}}{RT_g} \cdot dV = \frac{S v_s M P_{ext}}{R T_g} dt$

Ainsi : $D_{m,\beta} = \frac{\delta m_g}{dt} = \frac{S v_s M P_{ext}}{R T_g}$

2.2. On peut considérer que ce système ouvert (défini en pointillés sur le zoom) est en régime stationnaire, alors en lui appliquant le 1er principe industriel (version du cours) :

$\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta h = w_u + q$

Or : $\Delta e_p = 0$ (trou horizontal)

$q = 0$ (paroi adiabatique)

$w_u = 0$ (paroi indéformable)

Donc $\Delta e_c + \Delta h = 0$

Si $\Delta e_c = \frac{1}{2} v_\gamma^2$ et $\Delta h = \frac{C_p}{m}(T_\gamma - T)$

Or : $\frac{C_p}{m} = \frac{n C_{p,m}}{m} = \frac{C_{p,m}}{M} = \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}$.

Donc : $\frac{1}{2} v_\gamma^2 + \frac{R\gamma}{M(\gamma-1)}(T_\gamma - T) = 0$

D'où : $v_\gamma = \sqrt{\frac{2R\gamma(T - T_\gamma)}{M(\gamma-1)}}$

23. Il faut réaliser un écoulement :
* adiabatique : on calorifuge les parois
* réversible : on fait un écoulement le plus lent possible

Pour un gaz parfait, la loi de Laplace est alors vérifiée et on a $PV^\gamma = C^{te}$.

24. On peut remarquer que $PV^\gamma = (PV)^\gamma \times P^{1-\gamma} \propto T^\gamma P^{1-\gamma}$ par la loi des gaz parfaits

Donc $T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{te}$ et donc :

$$P_{ext}^{1-\gamma} T_\gamma^\gamma = P^{1-\gamma} T^\gamma$$

Or on sait que $P = \frac{nRT}{V} = \frac{mRT}{MV}$

Et : $\frac{P}{P_{ext}} = \frac{mRT}{MVP_{ext}} = \left(\frac{T}{T_\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

On en déduit :

$$T_\gamma = T \times \left(\frac{P_{ext} MV}{mRT}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}$$

Ce qui fournit bien le résultat demandé.

25. Dans la boucle, m et T correspondent à la masse de gaz et à la température en fonction du temps.
On réutilise les résultats précédents :

$$\frac{dm}{dt} = -D_{m,B} \quad \text{et} \quad \frac{dT}{dt} = \frac{(\gamma-1)T}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{(\gamma-1)T}{m}D_m$$

D'où :

```
m = m - Dm(m,T)*dt
T = T - (gamma-1)*T*Dm(m,T)/m*dt
```

26. On constate que la masse de gaz tend vers 0 en environ 7200 s = 2 h donc ce réchaud peut fonctionner pendant 2h.
$D_m = -\frac{dm}{dt} \approx C^{te}$ car la courbe est presque une droite donc la puissance de chauffe sera quasi constante.
En raison de la décompression adiabatique du gaz, la température diminue en fonction du temps dans la bouteille. Cet effet devient important lorsque la bouteille est presque vide. On atteint des températures de -30°C ce qui n'est pas réaliste : il faudrait remettre en cause l'hypothèse d'une transformation adiabatique.

27. $C_6H_{12}N_4(s) + 9\,O_2(g) = 6\,CO_2(g) + 6\,H_2O(g) + 2\,N_2(g)$

28. On utilise la loi de Hess avec $\Delta_f H^\circ(O_2) = \Delta_f H^\circ(N_2) = 0$:

$$\Delta_r H^\circ = 6\,\Delta_f H^\circ(H_2O(g)) + 6\,\Delta_f H^\circ(CO_2(g)) - \Delta_f H^\circ(C_6H_{12}N_4)$$

$\Delta_r H^\circ = -6 \times (250 + 400) - 123$

$\boxed{\Delta_r H^\circ = -4023 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$

$\Delta_r H^\circ < 0$ donc la réaction est exothermique ce qui est généralement le cas pour une combustion.

29. Le nombre de moles dans 1 kg de combustible est $\frac{1}{M_h}$.

donc $PC = -\frac{\Delta_r H^\circ}{M_h} = \frac{4 \cdot 10^6}{0,14} \simeq \frac{42}{14} \cdot 10^7$.

$PC = 3 \cdot 10^7 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} = 30 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

Ceci correspond bien à la donnée fournisseur.

30. On considère le système fermé {hexamine + air + eau + vapeur}.
On le suppose en évolution suffisamment rapide (5 minutes d'après le constructeur) pour avoir une évolution adiabatique.
On suppose également l'évolution monobare. Alors $\Delta H = 0$.
On a :

$\Delta H = \underbrace{-m_h \times PC}_{\text{combustion de l'hexamine}} + \underbrace{C_{eau}\, m_{eau} (T_{eb} - T_0)}_{\text{chauffage de l'eau jusqu'à ébullition}}$ car H est une fonction d'état

La masse d'eau que l'on peut faire bouillir est donc :

$m_{eau} = \frac{m_h \cdot PC}{C_{eau}(T_{eb} - T_0)} = \frac{2 \times 4 \cdot 10^{-3} \times 3 \cdot 10^7}{4 \cdot 10^3 \times 75}$ avec $T_0 = 25°C$, $T_{eb} = 100°C$

$= \frac{8 \times 3 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^5} = 0,8 \text{ kg}$

On peut donc faire bouillir en théorie bien plus qu'un litre

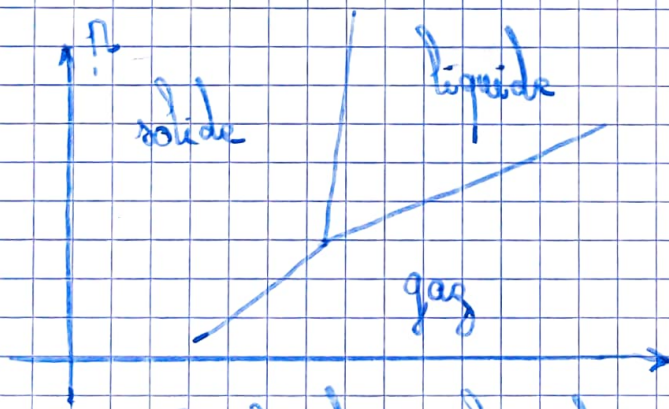
quart de litre ; mais nous n'avons pas tenu compte des pertes thermiques.

31. Le quotient réactionnel s'écrit :

$$Q_r = \frac{P_{N_2}^2 \cdot P_{H_2O}^6 \, P_{CO_2}^6}{P_{C_2H_6}^2 \, P_{O_2}^7 \, P^{\circ 5}} = \frac{x_{N_2}^2 \cdot x_{H_2O}^6 \, x_{CO_2}^6}{x_{C_2H_6}^2 \, x_{O_2}^7} \times \left(\frac{P}{P^\circ}\right)^5$$

À composition constante, si on diminue la pression P, le quotient de réaction va diminuer. Donc on va avoir $Q_r < K^\circ(T)$ et la réaction va évoluer dans le sens direct pour rétablir l'équilibre. Donc la baisse de pression favorise la combustion et le réchaud va rester performant.

32.



34. On constate que la frontière liquide / gaz est inclinée, or, à l'équilibre entre les deux on a $P = P_{sat}(T)$. Donc P_{sat} est une fonction croissante de la température. À basse pression, la température d'ébullition est donc plus faible.

33. On écrit qu'à l'équilibre :

$$K^\circ(T) = Q_r = \frac{P_{H_2O}}{P^\circ}$$ d'où :

$P_{H_2O} = P^\circ \times K^\circ(T)$ est une fonction qui ne dépend que de la température !

35. On a $\begin{cases} K^\circ(T) = \exp\left(-\dfrac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) \\ \Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ \end{cases}$

Donc $\ln K^\circ = -\dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT} + \dfrac{\Delta_r S^\circ}{R}$

Et : $\boxed{\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{\Delta_r H^\circ}{RT^2}}$

Ici $\ln K^\circ = \ln \dfrac{P_{sat}(T)}{P^\circ}$ donc $\dfrac{d\ln K^\circ}{dT} = \dfrac{1}{P_{sat}} \dfrac{dP_{sat}}{dT}$

et $\Delta_r H^\circ = M l_{vap}$ puisqu'on a une vaporisation.

Ainsi : $\boxed{\dfrac{1}{P_{sat}} \dfrac{dP_{sat}}{dT} = \dfrac{M l_{vap}}{RT^2}}$

36. On intègre entre P_0 et P_1 :

$$\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) = \frac{M_{H_2O}}{R} \int_{T_0}^{T_1} \frac{\alpha - \beta T}{T^2} dT$$

$$= \frac{M_{H_2O}}{R}\left[\alpha\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) - \beta \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right)\right]$$

D'où : $\dfrac{\alpha M_{H_2O}}{R}\left(\dfrac{1}{T_0} - \dfrac{1}{T_1}\right) + \dfrac{\beta M_{H_2O}}{R} \ln\left(\dfrac{T_0}{T_1}\right) + \ln\left(\dfrac{P_0}{P_1}\right) = 0$

37. On a $f(T_1) = 0$ pour $T_1 \simeq 359\,K = \boxed{86^\circ C}$

La vitesse des réactions chimiques augmente avec la température par la loi d'Arrhenius : $v = A e^{-\frac{E_a}{RT}}$

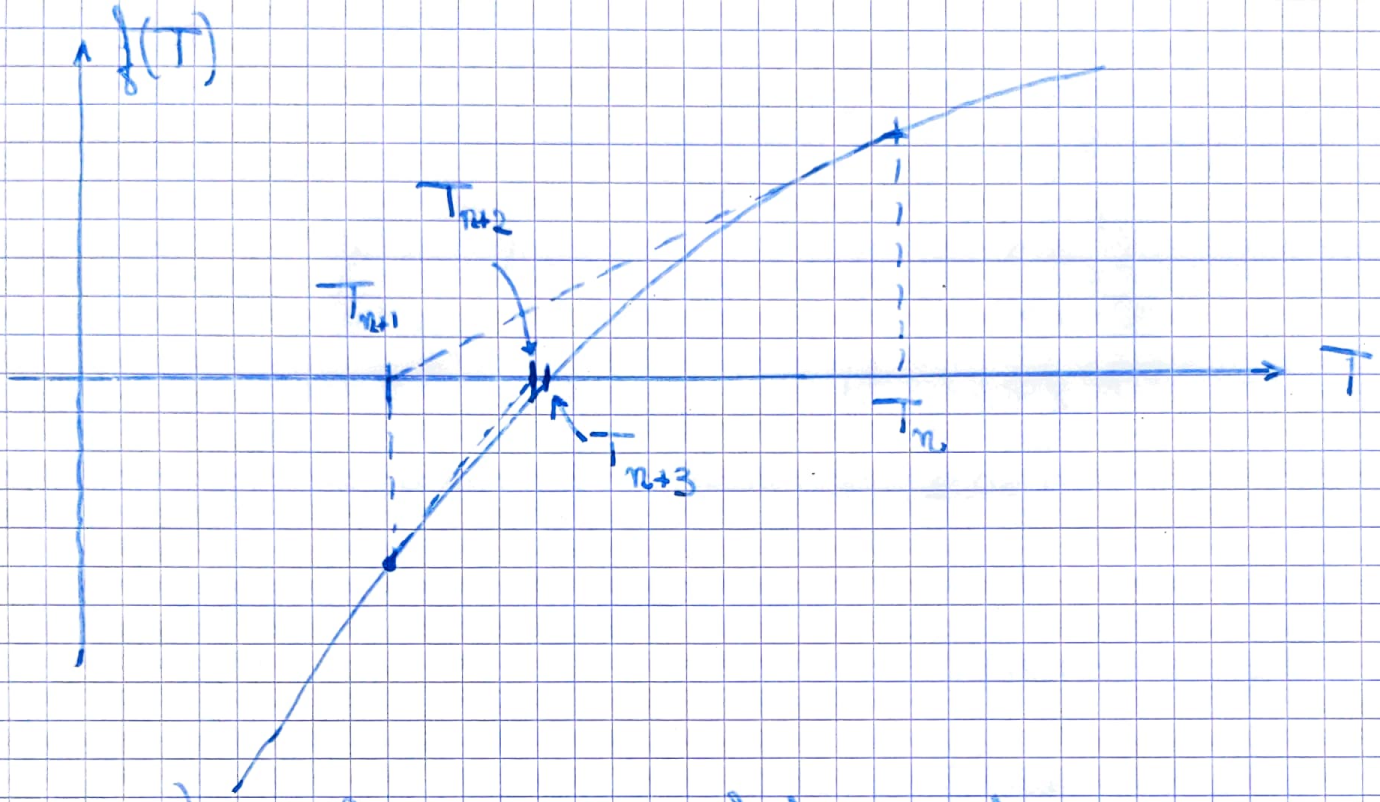
Donc comme l'eau bouillante est moins chaude, les aliments vont mettre plus de temps à cuire.

38. Le code cherche la solution entre deux extrema $T1_min$ et $T1_max$.
L'intervalle est coupé en deux à chaque itération et on va déterminer dans quelle partie de l'intervalle se trouve la solution. Pour cela, il suffit de vérifier que $f(T1_{min}) f(T1_{max}) < 0 \Leftrightarrow T1_{min} < T_1 < T1_{max}$
On coupe donc l'intervalle en deux intervalles
$[T1_min, T_m]$ et $[T1_m, T1_max]$
Et on conserve l'intervalle qui satisfait cette condition.
On s'arrête lorsqu'on a atteint la précision souhaitée.
Il faut que la solution soit entre les deux valeurs initiales, on peut prendre $T1_min = 350K$ et $T1_max = 370K$

39. La droite tangente à la courbe en T_n a pour équation : $y(T) = f(T_n) + f'(T_n)(T - T_n)$
Elle coupe l'axe des ordonnées en :

$$T_{n+1} = T_n - \frac{f(T_n)}{f'(T_n)}$$

Ainsi, on peut s'approcher petit à petit du zéro de la fonction :



On voit que la convergence est très rapide.

4°. [instruction 1] : résidu = 2* precision (par exemple, on veut juste résidu > precision pour que la boucle démarre)

[instruction 2] : f(T1)

[instruction 3] : deriv_f(T1)

[instruction 4] : mp.abs(T1 - T1_old)

(écart comme approximée à l'écart entre deux itérations)