DS 4 - Centrale
Correction

I - Étude du module photographique d'un smartphone

1. En supposant le capteur rectangulaire, de largeur L et de longueur l on a une diagonale :

$$d = \sqrt{L^2 + l^2} = \frac{1}{3} \text{ pouce} = \frac{25,4}{3} \approx \frac{25}{3} = 8,5 \text{ mm}$$

On sait que $\begin{cases} L = 4 \cdot 10^3 \, \delta \\ l = 3 \cdot 10^3 \, \delta \end{cases}$ où δ est la largeur d'un pixel

Donc :

$$d = \sqrt{(16+9)(10^3 \delta)^2} = 5 \cdot 10^3 \, \delta = 8,5 \text{ mm}$$

Ainsi : $\delta = \frac{8,5 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^3} = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ m} = \boxed{1,7 \text{ µm}}$

Et : $L = 4 \cdot 10^3 \cdot \delta = \boxed{6,8 \text{ mm}}$

$l = 3 \cdot 10^3 \cdot \delta = \boxed{5,1 \text{ mm}}$

2. Le capteur se trouve dans le plan focal image de l'objectif donc à une distance f' de l'objectif. Or l'angle de diffraction est $\theta = \frac{\lambda}{D}$ où D est le diamètre d'ouverture.

La tache de diffraction a une taille $d_{tache} = f' \tan\theta \approx f' \theta$ dans l'approximation des petits angles, donc $\boxed{d_{tache} = f' \frac{\lambda}{D} = \lambda N}$

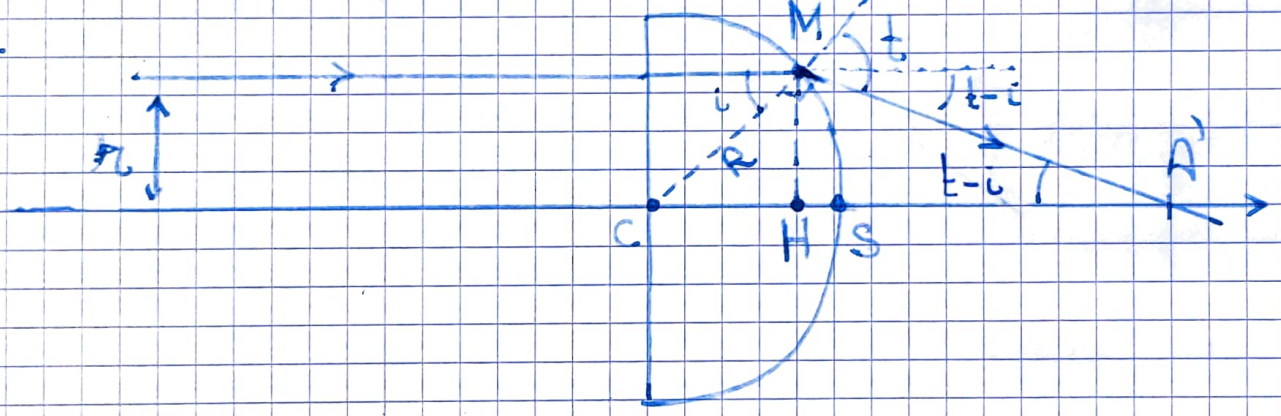
On prend $\lambda = 600$ nm pour le visible, alors :

$$d_{tache} = 600 \times 2{,}2 \cdot 10^{-9} = 1{,}3 \text{ µm}$$

$$\boxed{d_{tache} = 1{,}3 \text{ µm} \approx \frac{2}{3}\delta}$$

3. La tache fait environ la taille d'un pixel, il est inutile de faire une photographie en 4K car la résolution ne sera pas améliorée (image floutée par la diffraction).

4.



Par la loi de Descartes en M : $n \sin i = \sin t$

Or $\sin i = \frac{r}{R}$ donc $\sin t = \frac{nr}{R}$.

On a réflexion totale lorsque $\sin t \geq 1$ donc si $nr \geq R$, autrement dit pour que tous les rayons émergent il faut que $r \leq r_0$ avec $r_0 = \frac{R}{n} = \frac{4}{1{,}52} \approx \frac{8}{3} = \boxed{2{,}7 \text{ mm}}$

ou encore un diamètre $\Phi_0 = 2r_0 = 5{,}4$ mm.

En prenant $\Phi \leq \Phi_0$ on élimine les angles d'incidence les plus forts et on se rapproche des conditions de Gauss ce qui permet d'éviter les aberrations de la lentille.

5. On peut écrire :

$\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'}$ où H est défini sur le schéma

$= R\cos i + \dfrac{R\sin i}{\tan(t-i)}$

car $\overline{HM} = \overline{HA'}\tan(t-i)$ et $\overline{HM} = R\sin i$

6. On peut alors faire l'approximation des petits angles :

$\cos i \approx 1$ $\sin i \approx i$ $\tan(t-i) \approx t-i$

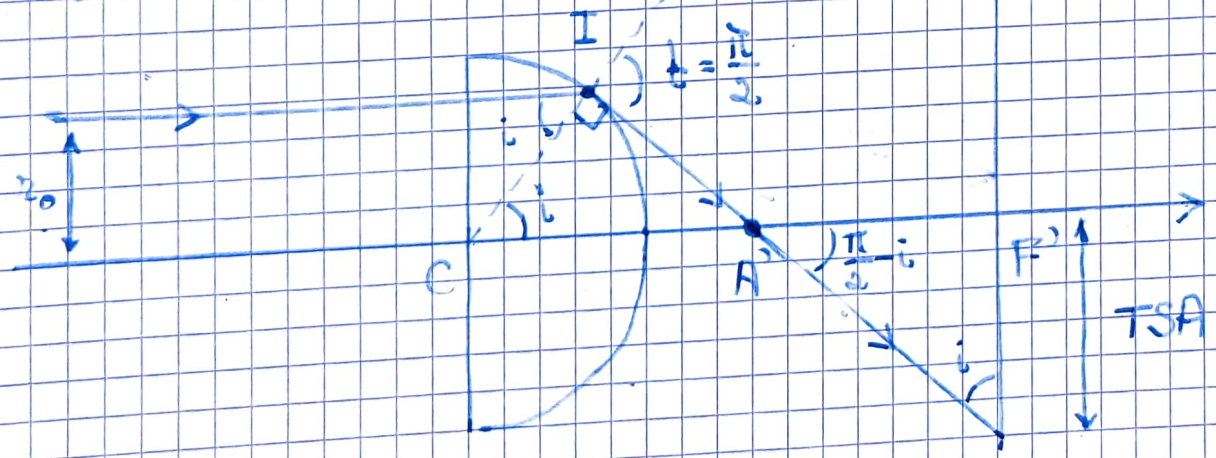
De plus la loi de Descartes devient $n_1 i = t$

D'où : $\overline{CF'} = R + \dfrac{R}{n_1 - 1} = \boxed{\dfrac{n_1}{n_1 - 1} R}$

AN : $\overline{CF'} = \dfrac{1,5}{0,5} \times 4 = \boxed{12 \text{ mm}}$

7. Il faut que tous les rayons parallèles à l'axe optique avant la lentille passent par F', on voit que c'est le cas si $\overline{CA'} = \overline{CF'}$ donc uniquement dans les conditions de Gauss (i petit), on a alors stigmatisme approché et F' est le foyer image de la lentille.

8.



Pour la valeur limite y_0, on a $t = \dfrac{\pi}{2}$, de plus on

voit que dans ce cas particulier $\begin{cases} \cos i = \dfrac{R}{CA'} & \text{(schéma)} \\ \sin i = \dfrac{1}{n} & \text{(réfraction limite)} \end{cases}$

Donc $\cos i = \sqrt{1-\sin^2 i} = \dfrac{1}{n}\sqrt{n^2-1}$ et $\overline{CA'} = \dfrac{R\,n}{\sqrt{n^2-1}}$

Donc $\overline{A'F'} = \left[\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right] nR$

$= \left[\dfrac{1}{0,5} - \dfrac{1}{1}\right] nR \simeq 1,5R = 6$ mm

Et on voit que $\tan i = \dfrac{A'F'}{TSA} = \dfrac{1/n}{\sqrt{n^2-1}/n} = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} \simeq 1$

D'où : $\boxed{TSA \simeq 6 \text{ mm}}$

TSA $\gg$ & donc les déviations font sortir l'image et la lentille n'est pas adaptée.

9. Le chemin optique entre le plan gauche de la lentille (passant par C)' et f' vaut :

$$\mathcal{C} = n\,e(r) + \overline{IF'}$$

$$= n\,e(r) + \sqrt{r^2 + \overline{HF'}^2} \qquad \underbrace{\text{d'après Q6}}$$

Or : $\overline{HF'} = \overline{HC} + \overline{CF'} = -e(r) + \dfrac{nR}{n-1}$

~~Et $\sin i = \dfrac{r}{R}$ donc~~

Ainsi : $\mathcal{C} = n\,e(r) + \sqrt{r^2 + \left(\dfrac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2}$

Dans le cas particulier $r = 0$ on a $e(r=0) = R$

et $\mathcal{C} = nR + \dfrac{nR}{n-1} - R = nR + \dfrac{R}{n-1}$

On conclut que :

$$n\,e(r) + \sqrt{r^2 + \left(\frac{nR}{n-1} - e(r)\right)^2} = nR + \frac{R}{n-1}$$

10. Alors si $\alpha = \frac{e(r)}{R}$:

$$n\alpha + \sqrt{\underbrace{\left(\frac{r}{R}\right)^2}_{\ll 1} + \left(\frac{n}{n-1} - \alpha\right)^2} = n + \frac{1}{n-1}$$

donc $n\alpha + \left(\frac{n}{n-1} - \alpha\right)\left[1 + \frac{1}{2}\frac{(r/R)^2}{\left(\frac{n}{n-1} - \alpha\right)^2}\right] = n + \frac{1}{n-1}$

Posons $\alpha = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$. Alors :

$$n(1+\varepsilon) + \left(\frac{n}{n-1} - 1 - \varepsilon\right)\left[1 + \frac{(n-1)^2}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = n + \frac{1}{n-1}$$

À l'ordre 1 on trouve :

$$n\varepsilon + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{(n-1)^2}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \varepsilon = 0$$

D'où $(n-1)\varepsilon + \frac{n-1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 0$

$$\varepsilon = -\frac{r^2}{2R^2} \quad \text{et donc} \quad \boxed{\frac{e(r)}{R} = 1 - \frac{r^2}{2R^2}}$$

On retrouve l'expression attendue pour un cercle en effet :

$$e(r) = R\cos i = R\left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \quad \text{avec} \quad i = \frac{r}{R}$$

dans le cadre de l'approximation des petits angles.

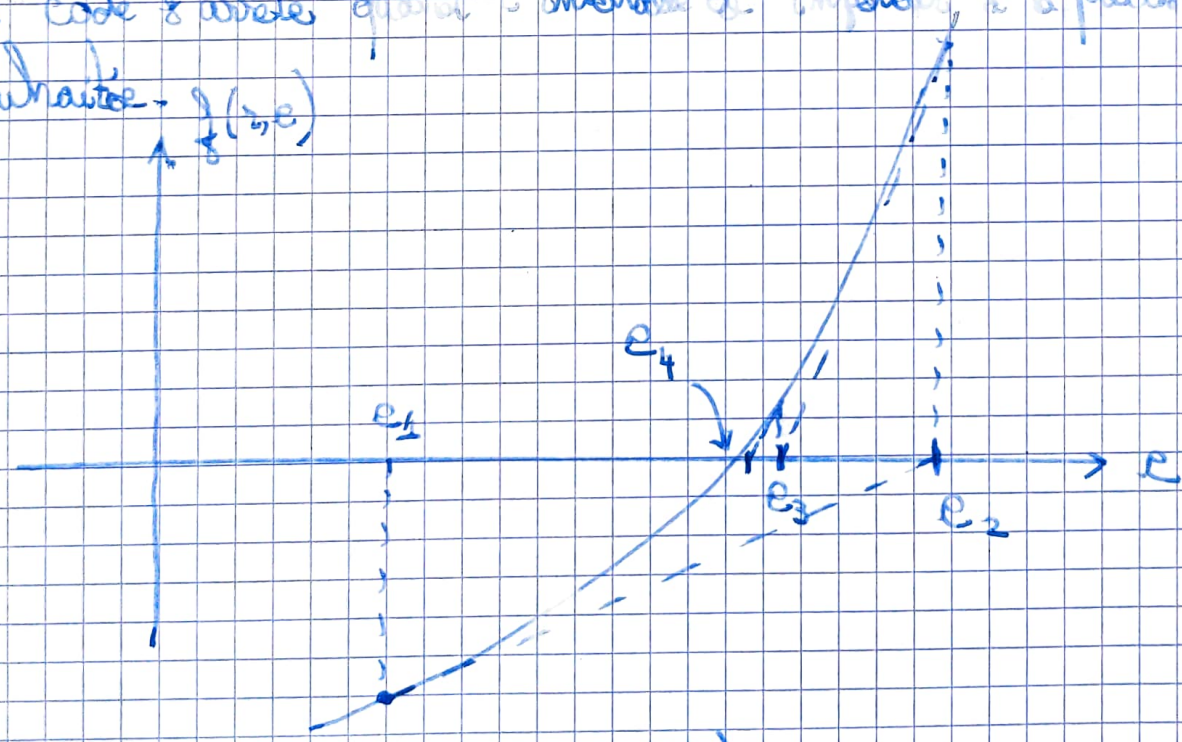
11. On a $e(r)$ tel que $f(r, e(r)) = 0$, on trouve :

r [mm]	0	2	4	6
$e(r)$ [mm]	4	3,5	2,5	1

Ces valeurs correspondent bien au profil représenté pour la lentille asphérique.

12. Le code fonctionne par dichotomie : la solution se trouve dans un intervalle $[e_{min}, e_{max}]$ si $f(e_{min}) f(e_{max}) < 0$.
On découpe successivement l'intervalle en deux intervalles de taille égale et on choisit celui qui satisfait cette condition.
Il faut des valeurs e_{min} et e_{max} qui encadrent toutes les solutions, on peut donc prendre $e_{min} = 0$ et $e_{max} = 5$ mm.
Le code s'arrête quand l'intervalle est inférieur à la précision souhaitée.

13.



On observe une convergence rapide.
La droite tangente à la courbe en $e = e_n$ a pour équation $y(e) = f(e_n) + f'(e_n)(e - e_n)$
Son zéro est donc localisé en $e_{n+1} = e_n - \frac{f(e_n)}{f'(e_n)}$

14. [instruction 1] : residu = 2* precision
(par exemple, on veut juste residu > precision pour que la boucle démarre)
[instruction 2] : $f(r, e)$
[instruction 3] : derivr = $f(r, e)$
[instruction 4] : np.abs $(e - e_dd)$
(on assimile l'erreur à $|e_{n+1} - e_n|$).
On peut prendre valeur_initiale = 0 par exemple.

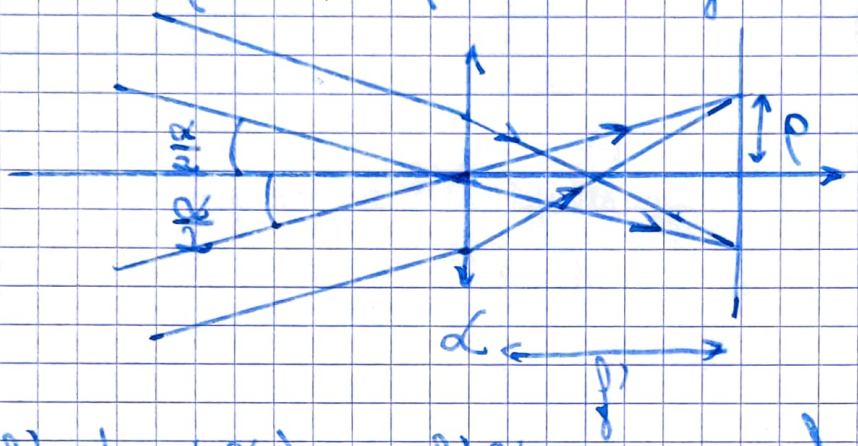
II - Combustion d'une poutre en bois

15. La constante de vitesse d'une réaction augmente avec la température : $k = A\, e^{-\frac{E_a}{RT}}$
où E_a [kJ·mol^{-1}] est l'énergie d'activation de la réaction et R la constante des gaz parfaits.
Une augmentation de température favorise les chocs entre molécules et donc accélère la réaction.

16. On s'attend à un allumage plus facile pour la phase gazeuse car les molécules s'y déplacent rapidement et sont plus à même de propager leur énergie cinétique microscopique au reste du gaz.

17. On note $\Phi = 0{,}75 \times 800 = 600\ W \cdot m^{-2}$ le flux solaire traversant la lentille (les 25 % restants étant absorbés). Alors la puissance arrivant sur la feuille est

$\mathcal{P} = \pi r^2 \times \Phi$. Cette puissance se répartit sur une surface $S = \pi \cdot \rho^2$ où ρ est le rayon de l'image du soleil :



$$\rho = f' \times \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \simeq f' \frac{\alpha}{2} \quad \text{(approximation des petits angles)}$$

La masse de papier chauffée (en négligeant la conduction thermique dans le papier) est : $m = \sigma S = \sigma \pi \left(f' \frac{\alpha}{2}\right)^2$

On néglige tout transfert thermique cédé par le papier, alors par le 1er principe : $m c_p (T_f - T_i) = \mathcal{P} \times \Delta t$

D'où : $\Delta t = \frac{m c_p}{\mathcal{P}} (T_f - T_i) = \frac{\sigma c_p \frac{f'^2 \alpha^2}{4}}{r^2 \Phi} (T_f - T_i)$

avec $\alpha = 30' = \frac{30}{60} \times 1° = \frac{30}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{360} \simeq \frac{\pi}{3 \cdot 10^2} \simeq 3 \cdot 10^{-2}$ rad

D'où : $\Delta t = \frac{10^{-1} \cdot 1{,}4 \cdot 10^3 \cdot (10^{-1} \cdot 3 \cdot 10^{-2})^2}{4 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 600} \times 200$

$\simeq \frac{1{,}4}{3} \cdot \frac{10^{-3} \cdot 10^{-1}}{100 \cdot 10^{-4}} \simeq 0{,}5 \cdot 10^{-2}$

$\boxed{\Delta t \simeq 5 \text{ ms}}$: la combustion est très rapide.

18. En réalité, ce sera plus lent car le papier n'est pas exactement

au foyer image, de plus il y a des pertes thermiques du papier par conduction et conducto-convection. En prenant un papier noir, on s'assure que tout le rayonnement est absorbé.

19. On note w_C, w_H et w_O les fractions massiques en éléments et x_C, x_H, x_O les fractions molaires.

Alors : $$w_H = \frac{x_H M_H}{x_H M_H + x_C M_C + x_O M_O} = \frac{x_H M_H}{M_{tot}}$$ ← masse molaire atomique moyenne

D'où $$\begin{cases} x_H = \frac{w_H}{M_H} \cdot M_{tot} \\ x_O = \frac{w_O}{M_O} M_{tot} \\ x_C = \frac{w_C}{M_C} M_{tot} \end{cases}$$

Ainsi : $$\frac{x_H}{x_C} = \frac{w_H}{w_C} \times \frac{M_C}{M_H} = \frac{6}{50} \times \frac{12}{1} = \frac{72}{50} = \frac{144}{100} = 1,44$$

$$\frac{x_O}{x_C} = \frac{w_O}{w_C} \times \frac{M_C}{M_O} = \frac{44}{50} \times \frac{12}{16} = \frac{22}{25} \times \frac{3}{4} = \frac{66}{100} = 0,66$$

On a donc 1,44 mol d'hydrogène pour 1 mol de carbone
0,66 mol d'oxygène pour 1 mol de carbone

D'où la formule chimique $C H_{1,44} O_{0,66}$.

20. On écrit :

$$C H_{1,44} O_{0,66} + \alpha O_2 = \beta CO_2 + \gamma H_2O$$

$\beta = 1$ (équilibrage de C) $\quad 2\gamma = 1,44$ (équilibrage de H)

et $0,66 + 2\alpha = 2\beta + \gamma$

Donc $B = 1$; $\gamma = 0,72$ et :

$$\alpha = \frac{1}{2}(2B + \gamma - 0,66) = \frac{1}{2}(2,72 - 0,66) = 1,03$$

Ainsi : $\boxed{CH_{1,44}O_{0,66} + 1,03\ O_2 = CO_2 + 0,72\ H_2O}$

2.1. On sait que $CH_{1,44}O_{0,66}$ contient 50% de carbone en masse donc la masse molaire est $M_{chêne} = 2M_C = 24\ g \cdot mol^{-1}$

Alors : $\Delta_r H^\circ = -PCI \times M_{chêne}$

$= -19 \cdot 10^6 \times 24 \cdot 10^{-3}$

$\boxed{\Delta_r H^\circ = -456\ kJ \cdot mol^{-1}}$

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ 24 \\ \hline 76 \\ 38 \\ \hline 456 \end{array}$$

2.2. La combustion est donc incomplète en réalité, on peut encore brûler ces gaz. La réaction devient :

$CH_{1,44}O_{0,66} + 0,16\ O_2 = 0,72\ H_2 + CO$ étape 1

$0,72\ H_2 + CO + 0,86\ O_2 = 0,72\ H_2O + CO_2$ étape 2

L'enthalpie standard de l'étape 2 est :

$\Delta_r H^\circ_2 = 0,72\ \Delta_f H^\circ(H_2O) + \Delta_f H^\circ(CO_2) - \Delta_f H^\circ(CO)$

$= -0,72 \times 242 - 394 + 111$

$= -174 - 394 + 111$

$= -(394 + 63)$

$\boxed{\Delta_r H^\circ_2 = -457\ kJ \cdot mol^{-1}}$

$$\begin{array}{r} 72 \\ \times\ 242 \\ \hline 484 \\ 144 \\ 28 \\ 14 \\ \hline 17438 \end{array}$$

Le fait que la combustion soit incomplète fait perdre au bois la

moitié de son pouvoir calorifique.

23. On suppose la pièce calorifugée, donc l'évolution adiabatique.
Comme l'évolution est monobare $\Delta H = Q = 0$!
Or H est une fonction d'état donc :

$$\Delta H = n_{bûche} \Delta_r H_1^\circ + C_{p,tot} \times (T_f - T_i)$$
$$= -n_{bûche} \times PCI + C_{p,tot} (T_f - T_i) \quad \text{d'après Q21}$$

Donc $T_f = T_i + \dfrac{n_{bûche} PCI}{C_{p,tot}} = 20 + \dfrac{19 \cdot 10^6}{6 \cdot 10^5}$

$$= 20 + \frac{190}{6} \simeq 20 + 30 + 1,6$$

$$\boxed{T_f \simeq 52^\circ C}$$

En pratique, il y a des pertes thermiques, la combustion de la bûche prend plusieurs heures et l'évolution n'est pas adiabatique.

24. On étudie la réaction $2H_2O(g) = 2H_2(g) + O_2(g)$

Son enthalpie standard vaut $\Delta_r H^\circ = -2\Delta_f H^\circ(H_2O) = 484 kJ/mol$

Son entropie standard vaut :

$$\Delta_r S^\circ = 2S^\circ(H_2) + S^\circ(O_2) - 2S^\circ(H_2O)$$
$$= 2 \times 131 + 205 - 2 \times 190$$
$$= 262 + 205 - 380$$
$$= 87 \ J.K^{-1}.mol^{-1}$$

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$
$$= 484 \cdot 10^3 - 87 \cdot 10^3 > 0 \quad \text{à } T = 1000 K$$

Donc la réaction n'est pas spontanée même à très haute

température et l'eau ne fournit pas de dioxygène au feu.

25. Il faut $E = m_{eau}\left(c_{p,eau}^{liq}\left(T_{eb} - T_i\right) + l_{vap} + c_{p,eau}^{vap}\left(T_f - T_{eb}\right)\right)$

$E = 1 \times \left[4 \cdot 10^3 (100 - 25) + 2500 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 \times (800 - 100)\right)$

$= (300 + 2500 + 1400) \cdot 10^3$

$\boxed{E = 4,2 \cdot 10^6 \text{ J}}$

26. Il faut que le débit massique D_m vérifie : $\frac{1}{3} D_m E = \mathcal{P}$

D'où $\mathcal{P} = \frac{4,2 \cdot 10^6}{3} \times \frac{500}{60} = \frac{7}{6} \cdot 10^7 \simeq \boxed{12 \text{ MW}}$

← conversion en s

Il faudrait plus de 100 lances pour éteindre l'incendie de Notre Dame exclusivement avec de l'eau.

III – Propulsion d'une fusée

27. À l'instant t la fusée a une quantité de mouvement

$\boxed{\vec{p}_f(t) = m(t)\, v(t)\, \vec{u}_z}$

De même $\boxed{\vec{p}_f(t + dt) = m(t + dt)\, v(t + dt)\, \vec{u}_z}$

La masse de gaz éjecté pendant dt est $\delta m = D_m\, dt$.

Sa vitesse dans le référentiel terrestre est :

$\vec{v}_{gaz/R_T} = \vec{v}_{gaz/fusée} + \vec{v}_{fusée/R_T}$

$= (v(t) - u)\, \vec{u}_z$

D'où : $\boxed{\delta \vec{p}_g = D_m (v(t) - u)\, dt\, \vec{u}_z}$

28. Le système {fusée + gaz sortant pendant dt} est fermé et soumis à son seul poids, la masse du système est $m(t)$. On lui applique le PFD dans le référentiel terrestre :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{système}}}{dt} = m(t)\,\vec{g} = -m(t)\,g\,\vec{u}_z$$

Or : $\dfrac{d\vec{p}_{\text{système}}}{dt} = \lim_{dt\to 0} \dfrac{1}{dt}\left[\vec{p}_{\text{fusée}}(t+dt) + \delta\vec{p}_{\text{gaz}} - \vec{p}_{\text{fusée}}(t)\right]$

$\vec{p}_{\text{système}}(t+dt)$

$$= \lim_{dt\to 0} \frac{1}{dt}\left[m(t+dt)\,v(t+dt) - m(t)\,v(t) + D_m(v(t)-u)dt\right]\vec{u}_z$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left(m(t)\,v(t)\right) + D_m\left(v(t)-u\right)\right]\vec{u}_z$$

Ainsi : $\dfrac{d}{dt}(mv) + D_m(v-u) = -mg$

Mais $\dfrac{d}{dt}(mv) = m\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dm}{dt} = m\dfrac{dv}{dt} - D_m v$

On obtient : $\boxed{m\dfrac{dv}{dt} = D_m u - mg}$

29. Tout se passe comme si la fusée était un système fermé qui subsit une force de poussée $\boxed{F = D_m u}$

La fusée décolle si $\dfrac{dv}{dt} > 0$ donc si $\boxed{D_m u > mg}$

30. L'énergie cinétique vaut :

$$dE_c = \frac{1}{2}dm \times \vec{v}^{\,2}_{gaz/R_T} = \frac{1}{2}D_m dt \times (v-u)^2$$

Alors : $P_{jet} = \frac{dE_c}{dt} = \boxed{\frac{D_m}{2}(v-u)^2}$

↑ énergie cinétique fournie au jet par unité de temps.

La puissance de la force de poussée est :

$P_{poussée} = (F\vec{u}_y) \cdot \vec{v}(t) = \boxed{D_m u v}$

31. On applique le théorème de la puissance mécanique au système fermé utilisé en Q28 :

$$\frac{dE_m^{système}}{dt} = \frac{dE_m^{fusée}}{dt} + P_{jet} = \sum W(\vec{F}_{n.c.})$$

Le système ne subit pas de force extérieure non conservatrice mais il y a des forces intérieures qui viennent du réacteur, ainsi $\sum W(\vec{F}_{n.c.}) = P_{dépensée}$ la puissance dépensée par la fusée.

De plus en utilisant le résultat de Q28 :

$$m v \frac{dv}{dt} = D_m u v - m g v$$

Si on considère le système {fusée} dans le gaz qui sort entre t et $t+dt$: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2 + mgz\right) = D_m u v = P_{poussée}$

(c'est l'énergie mécanique fournie à ce système qui nous intéresse).

Donc $\frac{dE_m^{fusée}}{dt} = P_{poussée}$ est la puissance fournie à la fusée

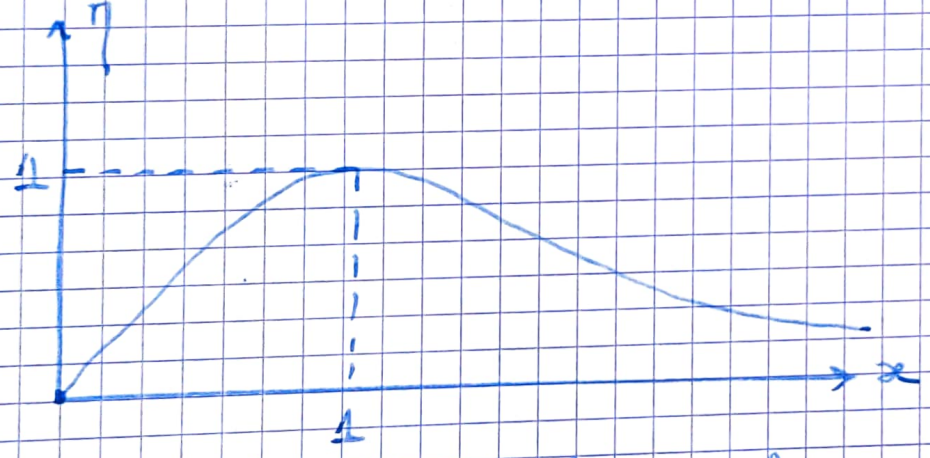
et $P_{dépensée} = P_{jet} + P_{poussée}$ comme on l'a vu plus haut.

Alors : $\eta = \dfrac{P_{poussée}}{P_{jet} + P_{poussée}} = \dfrac{D_m u v}{\frac{1}{2} D_m (v-u)^2 + D_m u v}$

$= \dfrac{2uv}{(v-u)^2 + 2uv} = \dfrac{2uv}{u^2 + v^2}$

$\boxed{\eta = \dfrac{2x}{1+x^2}}$ avec $\boxed{x = \dfrac{u}{v}}$ (ou $x = \dfrac{v}{u}$ marche aussi)

32.

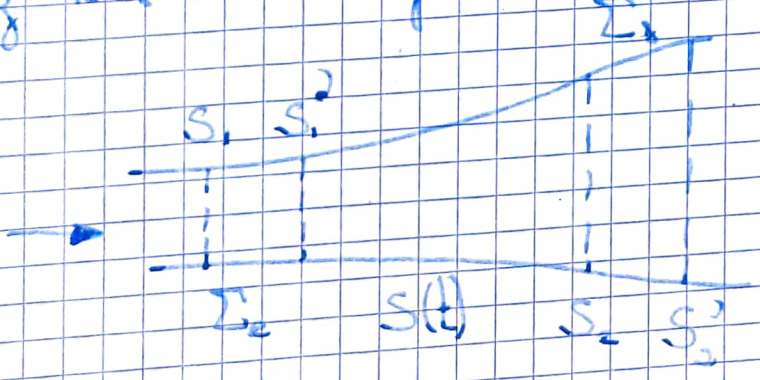


Le rendement propulsif est maximal pour $x = 1$ soit $u = v$: aucune énergie cinétique n'est alors transmise au jet.

$\mathcal{R}$ est nul pour $x = 0$ donc pour $v = 0$ car la force de poussée ne travaille pas.

$\mathcal{R}$ est également nul pour $x \to \infty$ donc pour $u = 0$ puisque aucun gaz n'est alors éjecté.

33.



On définit le système ouvert $\mathcal{S}(t)$ sur le schéma ainsi que Σ_e : fluide qui va entrer entre t et $t+dt$

Σ_s : fluide qui sort entre t et $t+dt$

Alors $\Sigma = \mathcal{S}(t) \cup \Sigma_e = \mathcal{S}(t+dt) \cup \Sigma_s$ est un système fermé. Alors :

$$dU = U(t+dt) - U(t) = \underbrace{U(\mathcal{S}(t+dt)) - U(\mathcal{S}(t))}_{=0 \text{ (régime permanent)}} + U(\Sigma_s) - U(\Sigma_e)$$

$$= \delta m_s u_s - \delta m_e u_e$$

où u est l'énergie interne massique et $\delta m_e = \delta m_s = D_m dt$ est la masse de Σ_e et Σ_s. Alors :

$$dU = D_m dt (u_s - u_e)$$

De même $dE_c = D_m dt (e_{c,s} - e_{c,e})$

Le système reçoit un transfert thermique δQ et un travail :

$$\delta W' = \delta W - P_e dV_e + P_s dV_s$$

où $dV_e = -\delta m_e \times \alpha_e$ ← volume massique du fluide

↑ on perd du volume en entrée

$$dV_s = +\delta m_s \times \alpha_s$$

Alors $\delta W' = \delta W - D_m dt (P_s \alpha_s - P_e \alpha_e)$

On applique le 1er principe : $d(U + E_c) = \delta W + \delta Q$

(on néglige les variations d'énergie potentielle).

Alors : $D_m dt \left[u_s - u_e + P_s \alpha_s - P_e \alpha_e + e_{c,s} - e_{c,e} \right] = \delta Q + \delta W'$

On a $h_0 = u_0 + Pv$ donc :

$$\boxed{D_m \, dt \, (\Delta h + \Delta e_c) = \delta Q + \delta W'}$$

34. L'écoulement est adiabatique ($\delta Q = 0$) et sans travail autre que celui des forces de pression ($\delta W' = 0$) donc :

$$\Delta h + \Delta e_c = 0$$

Ici $\Delta e_c = e_{c,s} = \frac{1}{2} u^2$ où u est la vitesse des gaz éjectés.

Et : $\Delta h = c_p \Delta T$ par la 1ère loi de Joule

On a $c_p = \frac{C_{p,m}}{M} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$ pour un gaz parfait

Donc : $\Delta h = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)} \times (T_s - T_c) \simeq - \frac{\gamma R T_c}{M(\gamma-1)}$

car $T_s \ll T_c$.

Alors : $\frac{1}{2} u^2 - \frac{\gamma R T_c}{M(\gamma-1)} = 0$ donc :

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{2\gamma R T_c}{M(\gamma-1)}}}$$

35. Ils réagissent pour former de l'eau :

$$2H_2(g) + O_2(g) = 2H_2O(g)$$

On a calculé l'enthalpie de réaction en Q24 :

$$\Delta_r H^\circ = -4,84 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

On suppose que l'on fait d'abord la réaction puis on chauffe

les produits, donc l'eau sous forme vapeur. On note ξ_f l'avancement final, en supposant la réaction monobare et adiabatique:

$$\Delta H = 0$$

Comme H est une fonction d'état:

$$\Delta H = \Delta_r H^\circ \times \xi_f + 2\xi_f \times M_{H_2O} \times C_p^{vap} (T_c - T_i)$$

Donc avec $T_i \ll T_c$:

$$\boxed{T_c \simeq -\frac{\Delta_r H^\circ}{2 M_{H_2O} C_p^{vap}}}$$

AN:

$$T_c \simeq -\frac{484 \cdot 10^3}{2 \times 18 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^3} = -\frac{484 \cdot 10^3}{72} \simeq \frac{49}{7} \cdot 10^3$$

$$\boxed{T_c \simeq 7000\ K}$$

36. Alors $u_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 1,4 \times 8 \times 4 \cdot 10^3}{0,1 \times 18 \cdot 10^{-3}}} \simeq \sqrt{20} \cdot 10^3 \simeq 4,5 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1}$

Cette vitesse est très élevée, en réalité T_c est plus faible pour éviter que le réacteur ne fonde, on a typiquement $T_c \simeq 3000\ K$, et il y a également des pertes énergétiques par frottement dans le conduit d'évacuation des gaz.

37. Le volume sortant pendant dt est $dV = u_{max}\, dt \times S$

On a $P_{ext} \times dV = dn \times R T = \frac{dm}{M} \times R T_c$

D'où : $dm = \frac{M P_e}{R T_c} u_{max}\, dt \times S$

Et : $D_m = \frac{dm}{dt}$

37. m représente la masse totale de la fusée (avec son carburant) et v sa vitesse.

On propose : $m_1 = m - D_m^* dt$

$v = v + (D_m^* u/m - g)^* dt$

38. Lorsque $m = m_{fusée}$ cela signifie que tout le carburant est consommé. La fusée évolue donc en chute libre et il n'y a plus de gaz qui s'échappe : $D_m = 0$ à partir de ce moment.

39. On voit que la fusée accélère de plus en plus au fur et à mesure que sa masse diminue jusqu'à épuisement du carburant.

Pour $m_{carburant} \geq 600$ t on constate que $v(t) < 0$ au début du mouvement : ce n'est pas réaliste et cela signifie que la poussée n'est pas suffisante pour faire décoller la fusée ce que nous n'avons pas vérifié dans le code.

40. La vitesse de libération vérifie :

$$\frac{1}{2} m v_{lib}^2 - \frac{G m M_T}{R_T^2} = 0 \quad \text{énergie mécanique nulle}$$

Or $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$ donc $v_{lib} = \sqrt{2 g R_T}$

AN : $v_{lib} = \sqrt{2 \times 10 \times 6 \cdot 10^6} = \sqrt{120} \cdot 10^3 \approx 11$ km.s^{-1}

100 tonnes de carburant ne suffisent pas mais 200 tonnes oui, d'où la masse d'ergols : 160 tonnes.