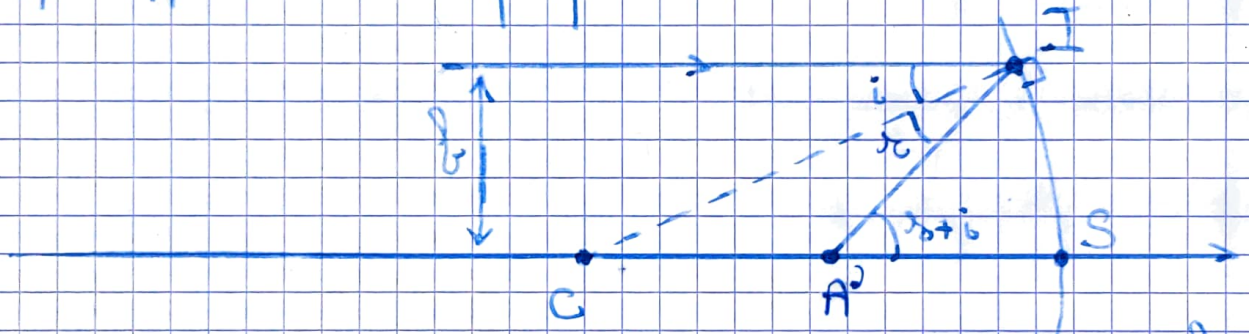
DS4 - X/ENS
Correction

I - Optique adaptative dans les télescopes

1. Dans les conditions de Gauss, on étudie des rayons paraxiaux : proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

2.



On peut écrire que $r_0 = i$ par les lois de la réflexion de Descartes. De plus :

$$\begin{cases} \overline{A'S} \times \tan(r_0 + i) = h_0 \\ \overline{CS} \times \tan(i) = h_0 \end{cases} \quad \text{avec } \overline{CS} = R_c$$

Ainsi : $x_0 = -\overline{A'S} = -R_c \times \dfrac{\tan(i)}{\tan(2i)} = \dfrac{2\tan i}{1-\tan^2 i}$

$$x_0 = -\frac{R_c}{2}\left(1 - \tan^2 i\right)$$

Mais $\tan^2 i = \dfrac{\sin^2 i}{1-\sin^2 i} = \dfrac{h_0/R_c}{1-(h_0/R_c)^2} = \dfrac{h_0 R_c}{R_c^2 - h_0^2}$.

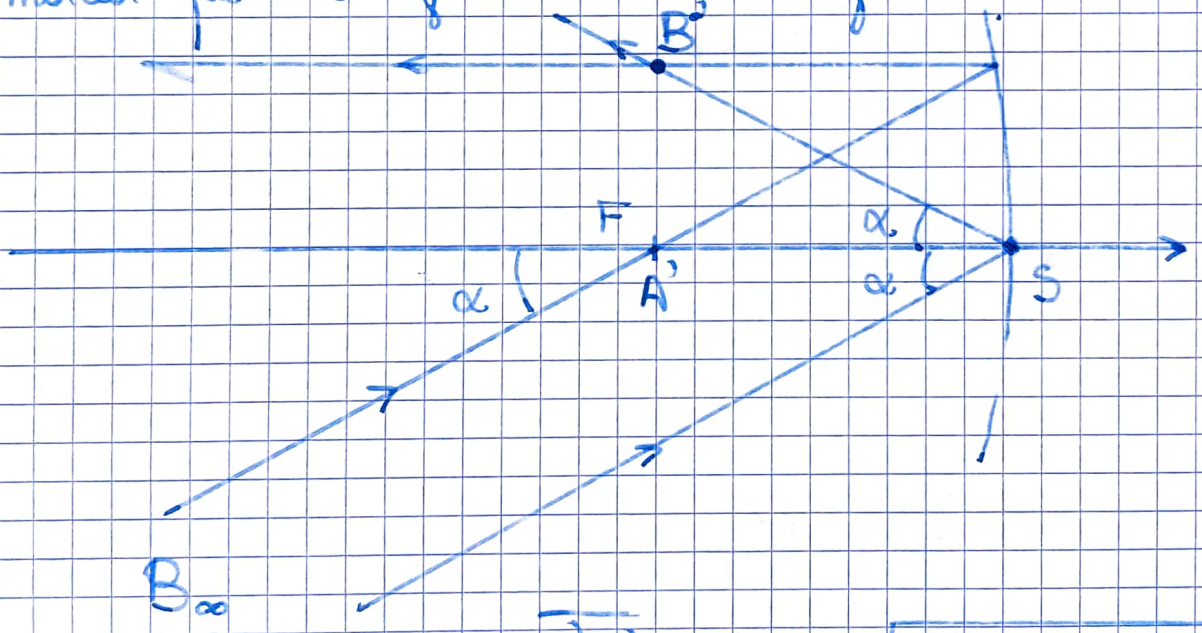
D'où : $x_0 = -R_c \times \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h_0 R_c}{R_c^2 - h_0^2}$

$$\boxed{x_0 = -\frac{h_0^2 R_c}{2(R_c^2 - h_0^2)}}$$

3. Dans les conditions de Gauss on peut faire l'approximation des petits angles et $\frac{\tan(i)}{\tan(2i)} \simeq \frac{1}{2}$. Donc $x = -\frac{R_c}{2}$.

x ne dépend plus de b : tous les rayons coupent l'axe en un même point et il y a stigmatisme approché. On a alors : $\boxed{f = \overline{FS} = \frac{R_c}{2}}$

4. On trace le rayon incident passant par I, qui ressort parallèle à l'axe, et le rayon arrivant au centre du miroir qui est réfléchi avec un angle α :



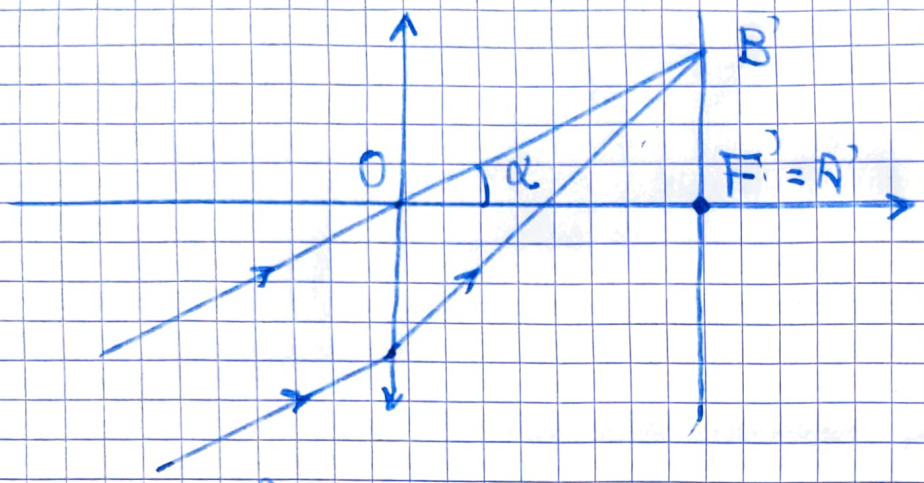
On a $\sin(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{f}$ donc $\boxed{\overline{A'B'} = f \sin\alpha \simeq f\alpha}$

Ici $\alpha = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{20 \times 180} = \frac{1}{3600} \simeq \frac{1}{0,33} \cdot 10^{-4}$

$\simeq 3 \cdot 10^{-4}$ rad

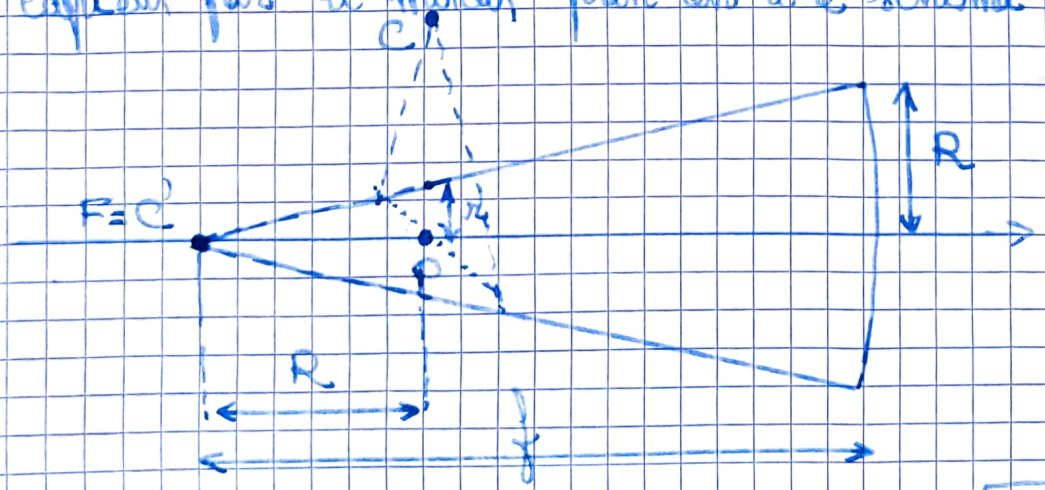
D'où : $\overline{A'B'} = \frac{1}{2} \times \alpha = \frac{1}{2} R_c \alpha = \frac{10}{5} \cdot 3 \cdot 10^{-4} = \boxed{0,6 \text{ mm}}$

5. Si on fait l'image avec une lentille :



On a également $\overline{A'B'} = f' \tan\alpha$ donc il faut une lentille de distance focale $f' = f = 5\ m$ ce qui n'est pas réalisable en pratique.

6. Le miroir récolte tous les rayons réfléchis si ceux réfléchis au bord du miroir sphérique sont aussi réfléchis au bord du miroir plan.
En notant C la position du capteur et en faisant l'image du capteur par le miroir plan on a le schéma suivant :



Par le théorème de Thalès : $\frac{r_0}{R} = \frac{R}{f'}$ donc $\boxed{r_0 = \frac{R^2}{f'}}$

Alors le miroir obstrue une section πr_0^2, la surface effective est donc : $S_{eff} = \pi(R^2 - r_0^2) = \pi R^2 \left(1 - \left(\frac{R}{f'}\right)^2\right)$

En pratique $\left(\frac{R}{f}\right)^2 = \frac{1}{25} = 4\%$: on a seulement un faible effet d'obstruction par le miroir.

7. La lumière sera diffractée avec un angle $\theta_2 \simeq \frac{\lambda}{2R}$.

Or la tache de diffraction aura un rayon $a = f \times \sin\theta_2$

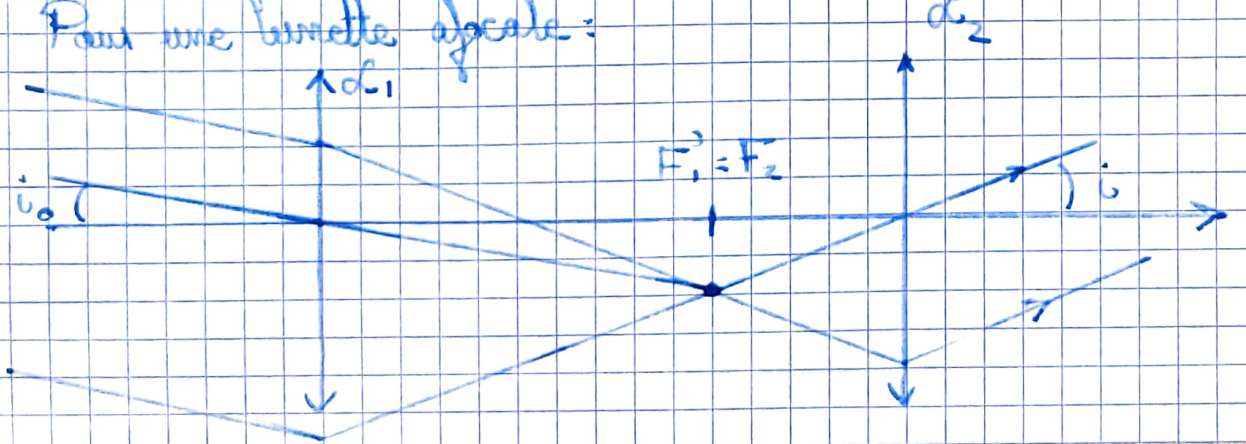
D'où son diamètre : $2a \simeq \frac{\lambda f}{R} \simeq \frac{500 \cdot 10^{-9} \cdot 5}{\frac{1}{1}} \simeq \boxed{2,5 \text{ µm}}$

Avec des lentilles, R est nécessairement bien plus faible et on a donc un effet important lié à la diffraction.

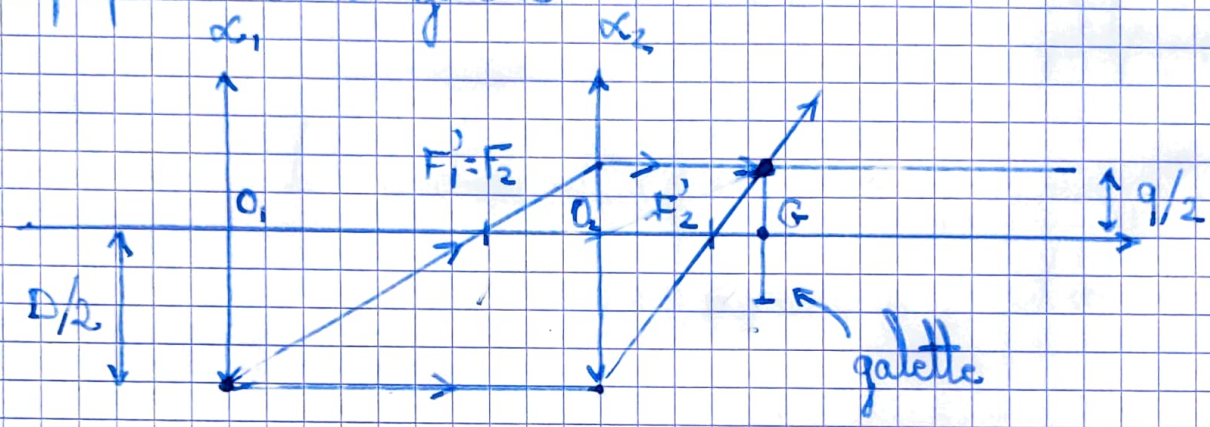
8. Le cercle oculaire du montage (l'endroit où le faisceau est le plus diaphragmé) se trouve au niveau de la première lentille, puisque la seconde n'intercepte aucun rayon.
Si on se place dans le plan conjugué de cette lentille par la seconde :
   * On se trouve bien après les deux lentilles, donc après le télescope
   * On s'assure que tous les rayons lumineux vont traverser la lentille (pas de perte de luminosité).

9. Le grossissement est défini par $G = \left|\frac{i}{i_0}\right|$ donc $\boxed{i = -G\, i_0}$

Pour une lunette afocale :



10. Pour un éclairement total de la galette sans perte de lumière l'image de $\mathcal{L}_1$ par $\mathcal{L}_2$ doit être parfaitement superposée à la galette :



On remarque par le théorème de Thalès que :

$$\frac{q/2}{\overline{F_2'G}} = \frac{D/2}{\overline{O_2F_2'}} = \frac{D}{2f_2'}.$$

Or par la relation de conjugaison de Newton $\overline{F_2G} \cdot \overline{F_2O_1} = -f_2'^2$

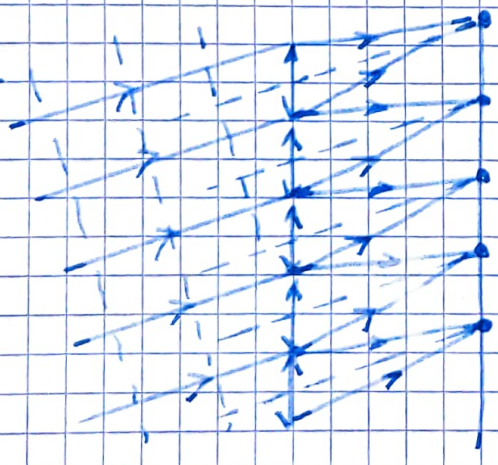
et $\overline{F_2O_1} = \overline{F_1'O_1} = -f_1'$ donc $\overline{F_2'G} = \frac{f_2'^2}{f_1'}$.

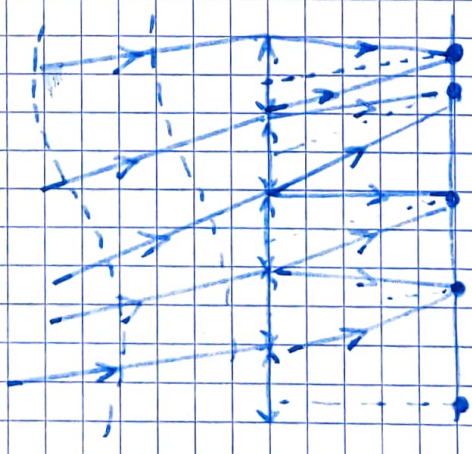
Ainsi : $-\frac{q}{2}\frac{f_1'}{f_2'^2} = \frac{D}{2f_2'}$ ou encore $\frac{f_1'}{f_2'} = \frac{D}{q}$.

Comme $G' = \frac{f_1'}{f_2'}$ (d'après le cours sur les lunettes afocales)

on en déduit : $\boxed{G = \frac{D}{q}}$

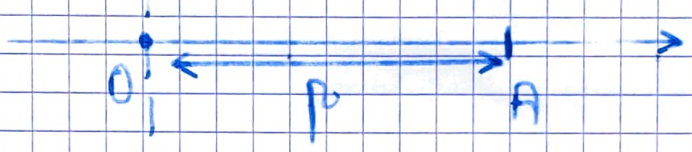
11.





On observera des points régulièrement espacés pour un front d'onde plan mais pas pour un front d'onde perturbé, la position des images peut nous informer sur la courbure et l'inclinaison locale du front d'onde.

12. Supposons $p_0 > 0$ - alors le front d'onde a l'allure suivante :

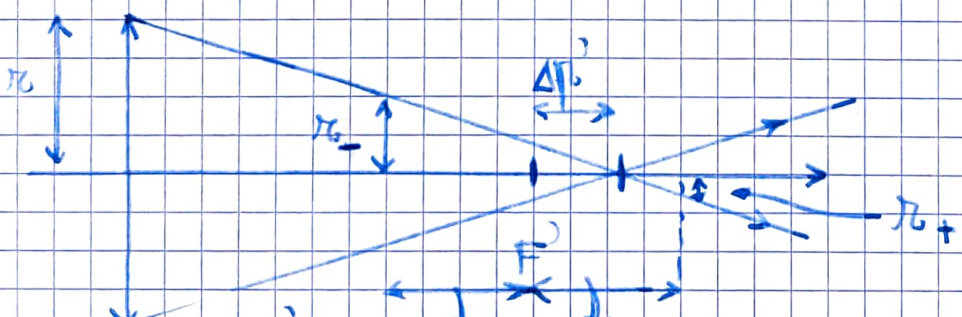


On a donc un objet virtuel situé en A tel que $\overline{OA} = p_0$.
Alors par la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{f'}$$

D'où : $p' = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{p_0}\right)^{-1} = \boxed{\frac{-p_0 f'}{p_0 + f'}}$

13.



Par le théorème de Thalès : $\begin{cases} \frac{r_{0-}}{r_0} = \frac{d + \Delta p'}{p' + \Delta p'} \\ \frac{r_{0+}}{r_0} = \frac{d - \Delta p'}{p' + \Delta p'} \end{cases}$

On a $A_\pm = A_0 \cdot \left(\frac{r_{0\pm}}{r_0}\right)^2$ car l'aire est proportionnelle au carré

du rayon, on a donc bien : $A_\pm = A_0 \left(\frac{d \mp \Delta p'}{f' + \Delta p'} \right)^2$

14. Si la courbure est faible alors $\Delta p' \ll f'$ et :

$$\frac{1}{f' + \Delta p'} \approx \frac{1}{f'\left(1 + \frac{\Delta p'}{f'}\right)} \approx \frac{1}{f'} - \frac{\Delta p'}{f'^2}$$

D'où $A_\pm \approx A_0 \left[\frac{d}{f'} \left(1 \mp \frac{\Delta p'}{d}\right)\left(1 - \frac{\Delta p'}{f'}\right) \right]^2$

$$\approx A_0 \frac{d^2}{f'^2} \left[1 - \Delta p' \left(\frac{1}{f'} \pm \frac{1}{d} \right) \right]^2$$

$$\approx A_0 \frac{d^2}{f'^2} \left[1 - 2\Delta p' \left(\frac{1}{f'} \pm \frac{1}{d} \right) \right]$$

Et $\Phi \propto \frac{1}{A}$ pour une intensité lumineuse uniforme

donc $\Phi_\pm \propto \frac{f'^2}{A_0 d^2} \left[1 + 2\Delta p' \left(\frac{1}{f'} \pm \frac{1}{d} \right) \right]$ (on a à nouveau fait un DL$_1$)

Alors : $\Phi_+ - \Phi_- \propto \frac{f'^2}{A_0 d^2} \times \frac{2\Delta p'}{d}$

$$\Phi_+ + \Phi_- \propto \frac{f'^2}{A_0 d^2} \left[2 + 4 \frac{\Delta p'}{f'} \right] \approx \frac{2 f'^2}{A_0 d^2}$$

D'où :

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{\Delta p'}{d}.$$

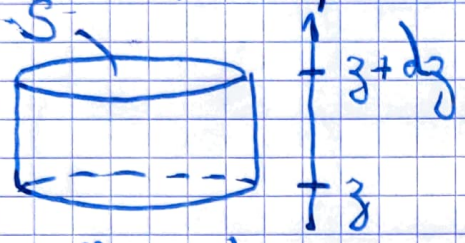
Or $\Delta p' = \frac{f' R}{R + f'} - f' = \frac{f'^2}{R + f'} = \frac{f'^2}{1/C + f'}$

$$\approx C f'^2$$ car on a une faible courbure

D'où : $\boxed{\frac{\Delta\Phi}{\Phi} = \frac{f'^2}{d} C}$ et on mesure une variation d'intensité lumineuse proportionnelle à la courbure du front d'onde

II - Thermodynamique de l'atmosphère

15.



La parcelle est soumise à * son poids $\vec{P} = dm \times \vec{g}$

* les forces de pression :

$$\vec{F}_p = S P(z) \vec{e}_z - S P(z+dz) \vec{e}_z$$

À l'équilibre $\vec{F}_p + \vec{P} = \vec{0}$. Donc :

$$P(z+dz) - P(z) = -\frac{dm}{S} \times g$$

Or : $dm = \rho S dz$ d'où $P(z+dz) - P(z) = -\rho g dz$

Ou encore $\frac{dP}{dz} = -\rho g$.

16. L'atmosphère contient 20% de dioxygène et 80% de diazote

donc $M = 0,8 M_{N_2} + 0,2 M_{O_2}$

$= 0,8 \times 2 \times 14 + 0,2 \times 2 \times 16$

$$\boxed{M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

17. À l'équilibre : $I = \sigma T_{eq}^4$

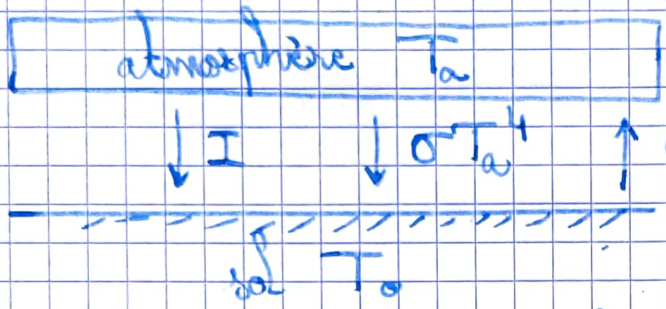
Donc $T_{eq} = \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{220}{6 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} = \left(\frac{110}{3}\right)^{1/4} \cdot 10^2 \simeq \sqrt{6} \cdot 10^2$

$$\boxed{T_{eq} \simeq 250 \text{ K}}$$ car $\sqrt{6} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \simeq 2\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 2,5$

La Terre est nettement plus chaude, il faut tenir compte de la présence de gaz à effet de serre et notamment de vapeur d'eau

dans l'atmosphère. $\downarrow I$ $\uparrow \sigma T_a^4$

18.



L'atmosphère est transparente pour le rayonnement solaire mais elle ne l'est pas pour le rayonnement tellurique.

L'équilibre du sol s'écrit: $I + \sigma T_a^4 = \sigma T_0^4$

L'équilibre du système {sol + atmosphère} s'écrit: $I = \sigma T_a^4$

Donc: $\sigma T_0^4 = 2I$

Et $T_0 = \left(\frac{2I}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{220}{3}\right)^{1/4} \cdot 10^2 \approx \sqrt{8,5} \cdot 10^2$

Or $\sqrt{8,5} = 3\sqrt{1-0,05} \approx 3(1-0,02)$ [illegible] $\approx$

D'où: $\boxed{T_0 \approx 295\ K}$

On obtient une valeur bien plus proche de la valeur réelle, on vient de mettre en évidence l'effet de serre.

19. On a une transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait, par la loi de Laplace: $PV^\gamma = C^{ste}$

Ou, encore: $P^{1-\gamma} \times (PV)^\gamma \propto P^{1-\gamma} T^\gamma = C^{ste}$

par la loi des gaz parfaits.

Alors: $P_i^{1-\gamma} T_i^\gamma = P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma$ ou encore:

$$T_f = T_i \times \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Mais $C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$ donc $\frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{R}{C_p}$ et :

$$\boxed{T_f = T_i \cdot \left(\frac{P_f}{P_i}\right)^{R/C_p}}$$

20. La masse volumique diminue lorsque la température augmente (par la loi des gaz parfaits).

- Si $T_f < T(z_i + dz)$ la parcelle est plus dense que son environnement ; son poids est plus important que la poussée d'Archimède, elle redescend vers la position initiale. L'atmosphère est stable.
- Si $T_f = T(z_i + dz)$ la parcelle est moins dense que son environnement, la poussée d'Archimède est plus forte que le poids et la parcelle continue à monter. La situation est instable.

21. On a alors $T_f = T(z_i + dz) = T_i + \Gamma dz$

Or : $T_f = T_i \left(\frac{P(z_i + dz)}{P(z_i)}\right)^{R/C_p} = T_i \left[1 + \frac{1}{P}\frac{dP}{dz} dz\right]^{\frac{R}{C_p}}$

$\overset{dz \to 0}{\simeq} T_i \left(1 + \frac{R}{C_p P}\frac{dP}{dz} dz\right)$

D'où : $\Gamma = \frac{RT}{C_p \cdot P} \cdot \frac{dP}{dz} = -\frac{\rho g R T}{C_p P}$.

Or $\rho = \frac{m}{V} = M \cdot \frac{n}{V} = M \cdot \frac{P}{RT}$ par la loi des gaz parfaits.

Donc : $\boxed{\Gamma = -\frac{Mg}{\gamma C_p}}$

Pour un gaz parfait diatomique $\gamma = \frac{7}{5}$ et $C_p = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$

D'où : $\Gamma = -\frac{Mg(\gamma-1)}{R\gamma} = -\frac{29 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 0,4}{8 \cdot 1,4}$

$\simeq -\frac{12}{12} \cdot 10^{-2} = 0,01\ K \cdot m^{-1}$

$\boxed{\Gamma \simeq -10\ K \cdot km^{-1}}$

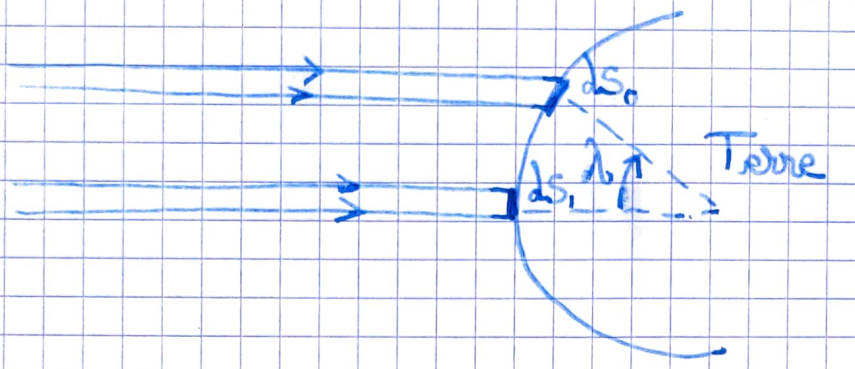
22. Pour le profil radiatif, on observe $\frac{dT}{dz} \simeq 0$ en haute atmosphère (donc $\frac{dT}{dz} \geq \Gamma$) : cette zone est stable

Et $\frac{dT}{dz} \simeq -20\ K \cdot km^{-1} \leq \Gamma$ en basse atmosphère : cette zone est instable.

23. On constate :

* Une zone où le gradient de température est constant (a priori égal au gradient marginalement stable) en bas de la troposphère : c'est la troposphère. Cette zone était initialement instable.
* Une zone où il est nul : on retrouve la même allure que pour le profil radiatif, le profil est stable : c'est la stratosphère.

2.4.

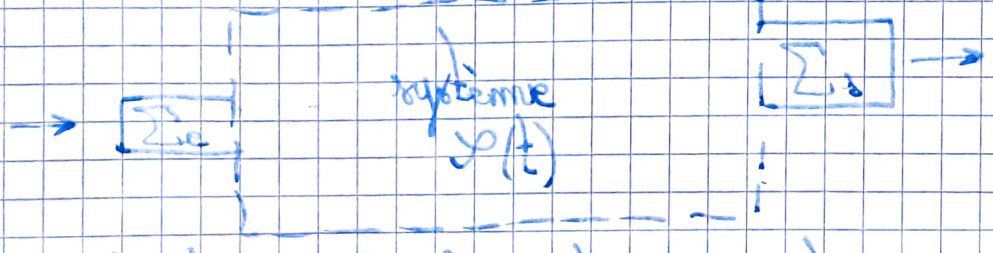


Les rayons lumineux d'un faisceau de même largeur se répartissent sur une surface $dS \propto \frac{1}{\cos\lambda}$ où λ est la latitude. Donc la surface est la plus faible à l'équateur et c'est là que le flux surfacique I est maximal. On a vu en Q1.7-1.8 que la température de surface augmente avec I. Il fait donc plus chaud à l'équateur.

Ce chauffage plus important à l'équateur agit comme un moteur dont la source chaude est la surface chauffée par le rayonnement solaire, et la source froide l'espace vers lequel le rayonnement est émis. L'air s'élève là où il y a un apport (il gagne de l'énergie potentielle) et descend là où il en perd.

Les précipitations sont présentes dans la zone ascendante, car la vapeur d'eau se condense lors du refroidissement des masses d'air.

2.5.



On définit $\mathcal{S}(t)$ le système ouvert, Σ_e l'air qui rentre

dans le système entre t et $t+dt$ et Σ_s l'air qui sort du système entre t et $t+dt$.

On note $D_{m,e}$ et $D_{m,s}$ les débits massiques entrant et sortant. En régime stationnaire, on a :

$$0 = \frac{dm_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s} \quad \text{donc} \quad D_{m,e} = D_{m,s} = D_m$$

La variation d'énergie interne du système fermé Σ défini comme $\Sigma = \mathcal{S}(t) \cup \Sigma_e = \mathcal{S}(t+dt) \cup \Sigma_s$ vaut :

$$dU = \underbrace{U(\mathcal{S}(t+dt)) - U(\mathcal{S}(t))}_{=0 \text{ en régime stationnaire}} + U(\Sigma_s) - U(\Sigma_e)$$

par extensivité de U

$$= \delta m_s \times u_s - \delta m_e \times u_e$$

δm_s : masse de Σ_s : $\delta m_s = \delta m_e = D_m dt$

$$= D_m dt (u_s - u_e)$$ où u est l'énergie interne massique

De même :

$$dE_p = D_m dt (e_{p,s} - e_{p,e}) = g D_m dt (z_s - z_e)$$

On néglige la variation d'énergie cinétique.

Le système reçoit un transfert thermique :

$$\delta Q = q \times \underbrace{D_m dt}_{\text{masse traversant le système pendant } dt}$$

Et :

$$\delta W = -P_e dV_e - P_s dV_s$$

car on perd du volume

$$\text{Or } dV_e = -\delta m_e \cdot v_e = -D_m dt \times v_e$$

volume massique

et $dV_s = +\delta m_s \cdot v_s = D_m dt\, v_s$.

On applique le 1er principe à Σ : $d(U + E_p) = \delta W + \delta Q$

Donc : $D_m dt\,(u_s - u_e + g z_s - g z_e) = D_m dt\,(q - P_s v_s + P_e v_e)$

En remarquant que $h = u + pv$ et en notant $\Delta h = h_s - h_e$ et $\Delta z = z_s - z_e$ on trouve :

$$\boxed{\Delta h + g \Delta z = q}$$

26. Lors des mouvements adiabatiques on a $q = 0$.
De plus comme l'enthalpie est une fonction d'état on peut séparer les variations d'enthalpie liées à un changement de température et celles liées au changement de phase de l'eau : $\Delta H = n C_p \Delta T + n_v \cdot \Delta x_v \times \Delta_{vap} H$

En fin en divisant par la masse m d'air on trouve :

$$\Delta h = \frac{C_p}{M} \Delta T + \frac{\Delta_{vap} H}{M} \Delta x_v$$

Donc par le 1er principe industriel :

$$\frac{C_p}{M} \Delta T + \frac{\Delta_{vap} H}{M} \Delta x_v + g \Delta z = 0$$

On M, C_p, $\Delta_{vap} H$ et g sont des constantes donc

$\boxed{\Delta e = 0}$ avec $e = C_p T + M g z + x_v \Delta_{vap} H$

L'énergie statique humide massique est conservée au cours des mouvements adiabatiques.

27. Alors en écrivant la conservation de l'énergie statique humide dans cette branche :

$$C_p T(h) + Mgh = C_p T(0) + x_v^i \Delta_{vap} H$$

↑ fraction molaire initiale

cas $\begin{cases} x_v = 0 & \text{au sommet de la cellule} \\ z = 0 & \text{en bas} \end{cases}$

Ainsi :

$$\Gamma = \frac{T(h) - T(0)}{h} = -\frac{Mg}{C_p} + \frac{x_v^i \Delta_{vap} H}{C_p h}$$

28. Or $\dfrac{x_v^i \Delta_{vap} H}{C_p h} = \dfrac{x_v^i \Delta_{vap} H \times (\gamma - 1)}{R \gamma h} = \dfrac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot 10^4 \cdot 0,4}{8 \times 1,4 \cdot 10^4}$

$$\simeq \frac{1,6}{3} \cdot 10^{-2} \simeq 5 \, K \cdot km^{-1}$$

D'où : $\Gamma = -10 \, K \cdot km^{-1} + 5 \, K \cdot km^{-1} = \boxed{-5 \, K \cdot km^{-1}}$

Sur le profil $\Gamma = \dfrac{220 - 290}{10} = -7 \, K \cdot km^{-1}$

Le gradient réel est un peu plus fort et surtout dans notre modèle on a légèrement sous-estimé le gradient humide.

29. Dans la branche descendante de la cellule, il n'y a plus d'humidité ($x_v \simeq 0$) donc :

$$\Delta e = C_p \times (T(0) - T(h)) - Mgh = q$$

En réutilisant Q27 on trouve :

$$q = -x_v^i \cdot \Delta_{vap} H < 0$$

Donc le mouvement n'est pas adiabatique dans cette branche

l'air perd de l'énergie vers l'espace par rayonnement. C'est en fait le moteur de la circulation de Hadley : c'est à cause de ce refroidissement que la circulation se produit.

30. En montant, la parcelle se refroidit (cf Q19), ceci fait baisser la pression de vapeur saturante donc une partie de l'eau se condense. Ceci modère la baisse de température et $T_f^{réel} \geq T_f^{sec}$ où T_f^{sec} est la température atteinte pour de l'air sec. Il est donc possible que la parcelle reste plus chaude que son environnement. Dans ce cas, elle continue à monter et un nuage se forme.

31. On applique le 1er principe au cours d'une transformation monotherme et monobare : $\Delta U = W + Q$

Or :

$$W = -\int P_{ext}\, dV = -P_{ext}\,\Delta V$$

$$= -(P_f V_f - P_i V_i) = -\Delta(PV)$$

car $P_f = P_i = P_{ext}$ pour une transformation monobare

On applique le second principe :

$$\Delta S \geq S_{éch} = \int \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{Q}{T_{ext}}$$

On en déduit :

$$Q \leq T_{ext}\cdot \Delta S = \Delta(TS)$$ car $T_i = T_f = T_{ext}$ pour une transformation monobare

Alors : $\Delta U \leq -\Delta(PV) + \Delta(TS)$

Ou encore $\boxed{\Delta G \leq 0}$ avec $G = U + PV - TS$

Par ailleurs $G = \mu_l(T) \cdot n_l + \mu_v(T) \cdot n_v + \mu_{air} n_{air}$

$= \mu_l(T)\, n_l + \mu_v(T)\,(n_{tot}^{eau} - n_l) + \mu_{air} n_{air}$

À l'équilibre $\left.\frac{\partial G}{\partial n_l}\right|_{T,p} = 0$ car G est minimal

Donc : $\boxed{\mu_l(T) = \mu_v(T)}$ à l'équilibre

Ceci impose que la pression est égale à la pression de vapeur saturante. (partielle en vapeur d'eau)

32. On a alors :

$G = \mu_l(T)\, n_l + \mu_v(T, P_v)\, n_v + \mu_{air} n_{air} + \sigma A$

et $dG = \mu_l\, dn_l + \mu_v\, dn_v + \sigma\, dA$

car par définition $\mu_i = \left.\frac{\partial G}{\partial n_i}\right|_{T,p}$

et $n_{air} = c^{ste}$

33. On a alors $A = 4\pi r^2$ donc $dA = 8\pi r\, dr$

Et lorsque r augmente de dr, on ajoute à la gouttelette une coquille sphérique de volume $dV = 4\pi r^2 dr$, qui correspond à une quantité de matière : $dn_l = \frac{\rho_0 dV}{M_{H_2O}}$

D'où : $dn_g = -dn_v = \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \cdot 4\pi r^2 dr$

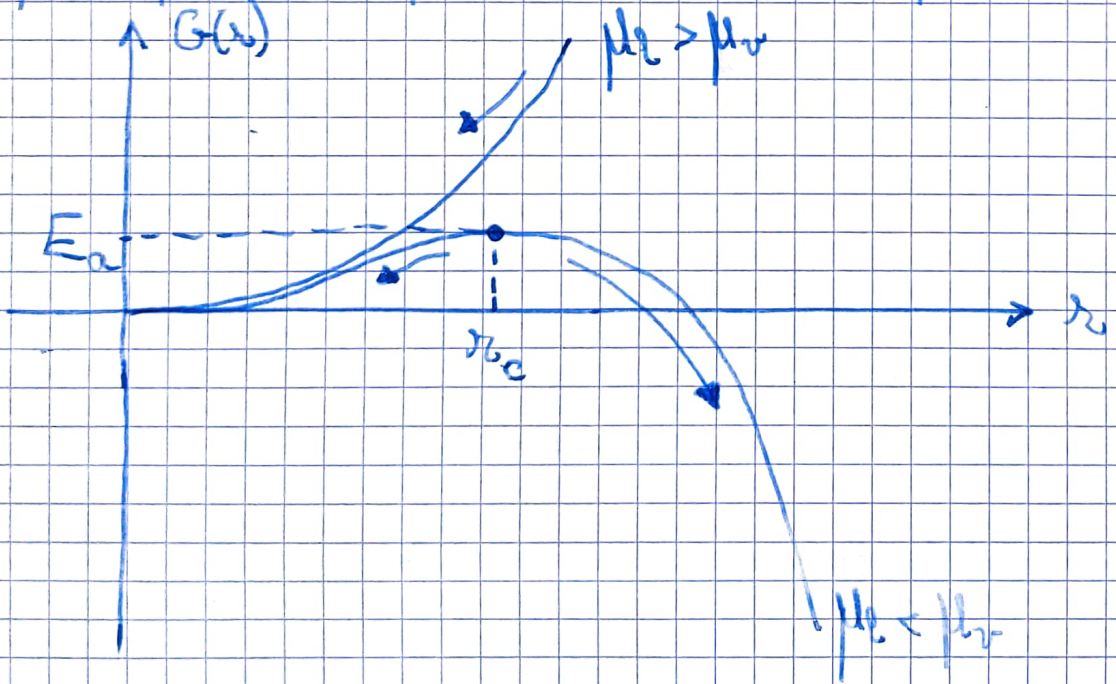
Alors :

$$\boxed{dG = \left[\frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \cdot 4\pi r^2 (\mu_g - \mu_v) + 8\pi r \sigma\right] dr}$$

34. On obtient :

$$G(r) = \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\mu_g - \mu_v) + 4\pi r^2 \sigma + C^{te}$$

Cette fonction est croissante si $\mu_g > \mu_v$ mais si $\mu_g < \mu_v$ elle présente une allure plus complexe :



35. Si $\mu_g > \mu_v$ le minimum d'enthalpie libre est atteint pour $r = 0$ et la goutte s'évapore.

Si $\mu_g < \mu_v$ alors il existe un rayon r_c tel que :

* Si $r < r_c$ la goutte s'évapore
* Si $r > r_c$ la goutte croît par condensation

r_c est tel que $\frac{dG}{dr}(r=r_c) = 0$ donc d'après Q33 :

$$\frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \cdot 4\pi r_c^2 (\mu_v - \mu_l) = 8\pi r_c \sigma$$

Ou encore :

$$\boxed{r_c = \frac{2\sigma M_{H_2O}}{\rho_0 (\mu_v - \mu_l)}}$$

Et l'énergie d'activation E_a est la barrière d'énergie potentielle à franchir pour que la goutte puisse se former :

$$E_a = G(r_c) - G(0)$$

$$= \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \frac{4}{3}\pi r_c^3 (\mu_l - \mu_v) + 4\pi r_c^2 \sigma$$

$$= -\underbrace{\frac{\rho_0}{M_{H_2O}} \cdot 4\pi r_c^2 (\mu_v - \mu_l) \times \frac{r_c}{3}}_{= 8\pi r_c \sigma \text{ d'après ce qui précède}} + 4\pi r_c^2 \sigma$$

$$= 4\pi r_c^2 \sigma \left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi\sigma \times \frac{4\sigma^2 M_{H_2O}^2}{\rho_0^2 (\mu_v - \mu_l)^2}$$

$$\boxed{E_a = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{M_{H_2O}^2 \sigma^3}{\rho_0^2 (\mu_v - \mu_l)^2}}$$

36. On a : $\mu_v(T, P_v) = \mu_v^\circ + RT \ln\left(\frac{P_v}{P^\circ}\right)$

et on a vu que $\mu_v(T, P_{sat}(T)) = \mu_l(T) = \mu_v^\circ + RT \ln \frac{P_{sat}}{P^\circ}$

On soustrait : $\mu_v - \mu_l(T) = RT \left[\ln \frac{P_v}{P} - \ln \frac{P_{sat}}{P^\circ}\right]$

Donc : $\boxed{\mu_v = \mu_l + RT \ln(\eta)}$

Alors : $\boxed{r_c = -\frac{2\sigma M_{H_2O}}{\rho_0 RT \ln(\eta)}}$

37. On propose : $\boxed{k = A e^{-\frac{E_a}{RT}}}$ la loi d'Arrhénius

et une loi de vitesse $v = k [H_2O(g)]$

On $[H_2O(g)] = \frac{n_v}{V} = x_v \cdot \frac{n_{tot}}{V} = x_v \times \frac{P}{RT}$ ← loi des gaz parfaits

Et $x_v = \frac{P_v}{P} = \frac{P_v}{P_{sat}} \cdot \frac{P_{sat}}{P}$

Donc : $[H_2O(g)] = \eta \cdot \frac{P_{sat}(T)}{RT}$ (*)

Ainsi : $v = A \times \frac{P_{sat}(T)}{RT} \times \eta\, e^{-\frac{E_a}{RT}}$

Mais $E_a = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{M_{H_2O}^2 \sigma^3}{\rho_0^2 (RT)^2 \ln(\eta)^2}$

Donc :

$$\boxed{v = A \times \frac{P_{sat}(T)}{RT} \times \eta \exp\left(-\frac{16\pi}{3} \cdot \frac{M_{H_2O}^2 \sigma^3}{\rho_0^2 R^3 T^3 \ln(\eta)^2}\right)}$$

On encore : $v \propto \eta\, e^{-\alpha / \ln(\eta)^2}$ où $\alpha = cste$

C'est une fonction qui augmente très rapidement avec η.

38. On a $v = -\frac{d[H_2O]}{dt} = -\frac{P_{sat}}{RT} \dot{\eta}$ d'après (*).

On en déduit directement que :

$$\dot{\eta} + d\eta\, e^{-\frac{C}{\ln(\eta)^2}} \quad \text{où} \quad C = \frac{16\pi}{3} \cdot \frac{M_{H_2O}^2 \sigma^3}{\rho_0^3 R^3 T^3}$$

39. η indique la valeur de la sursaturation à chaque pas de temps. On incrémente selon le schéma d'Euler :

eta = eta − A * dt * np.exp(−C / np.log(eta)**2)

40. On a vu que la vitesse augmente fortement pour η grand donc la condensation est très rapide au début. Ensuite, on a un ralentissement. On devrait avoir $\dot{\eta} = 0$ pour $\eta = \eta_{eq} = 1$ (car alors $\ln(\eta) = 0$ et $v \to 0$).

Mais en pratique, pour $\eta \leq 1{,}3$, on a :

$$\ln(\eta) \leq \ln(1{,}3) \approx 0{,}3$$

Donc $\frac{1}{\ln(\eta)^2} \geq 10$ et $\frac{v}{A} \leq e^{-10} \ll 1$

La réaction devient très lente : on a un blocage cinétique.

41. La quantité d'eau dans la goutte vaut :

$$n_{goutte} = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \times \frac{\rho_0}{M_{H_2O}}$$

Or $n_{goutte} = n_{vapeur,\,initial} - n_{vapeur,\,final}$

$$= V \times \left([H_2O]_i - [H_2O]_f\right) = V \times \frac{P_{sat}}{RT}(\eta_0 - \eta)$$

d'après (*)

Donc : $\frac{A}{\eta_0^3} \cdot \frac{P_{sat}}{RT}(\eta_0 - \eta) = \frac{4}{3}\pi \frac{\rho_0}{M_{H_2O}} r^3$

Ou encore : $r = \frac{1}{\eta_0} \times (\eta_0 - \eta)^{1/3} \times \left(\frac{3 P_{sat} M_{H_2O}}{4\pi R T \rho_0}\right)^{1/3}$

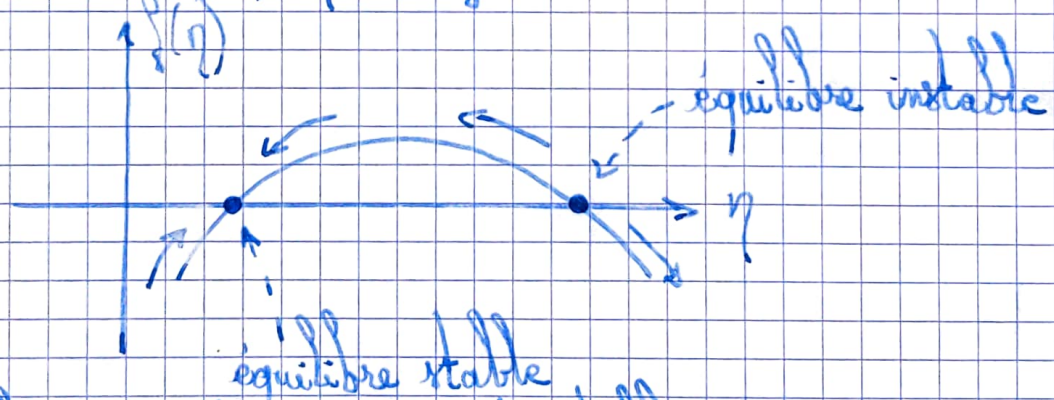
Mais : $r_c = -\frac{2\sigma M_{H_2O}}{\rho_0 RT \ln(\eta)}$

Alors :

$r - r_c \propto (\eta_0 - \eta)^{1/3} - \frac{a r_0}{\ln \eta}$ où $\boxed{a = \left(\frac{4\pi RT\rho_0}{3 P_{sat} M_{H_2O}}\right)^{1/3} \cdot \frac{\rho_0 RT}{2\sigma M_{H_2O}}}$

4.2. Si $r > r_c$ la goutte grandit donc η diminue

Si $r < r_c$, η augmente.



La solution la plus faible est stable.

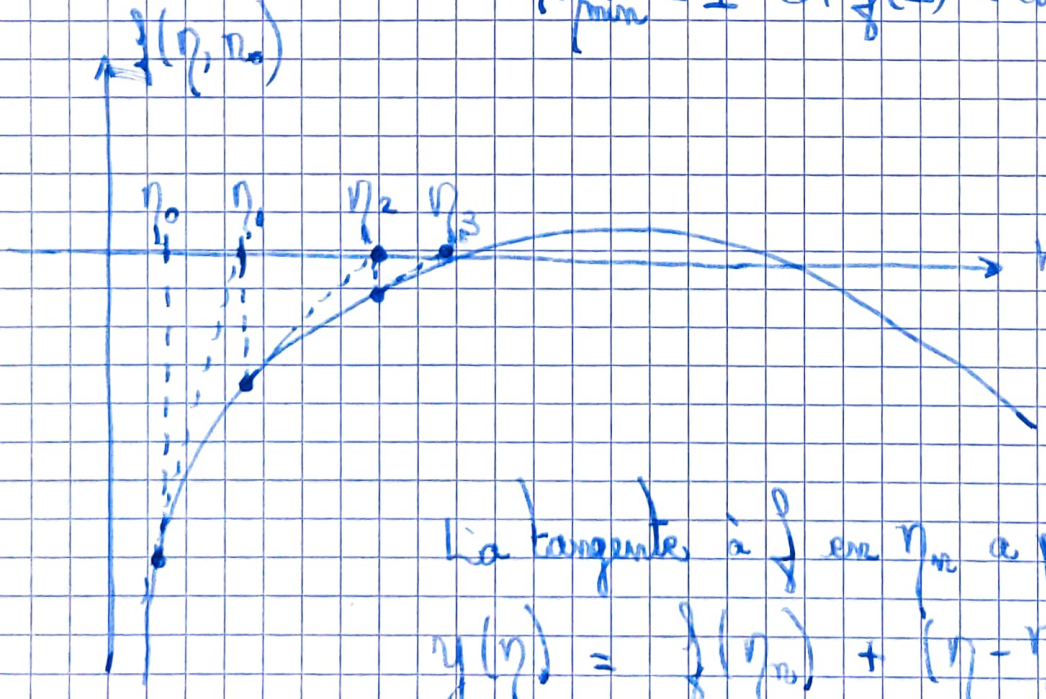
4.3. On voit que si on ajoute des noyaux de condensation, η augmente à l'équilibre donc on condense moins d'eau. En effet comme il y a plus de gouttelettes elles sont plus petites et ont donc besoin d'une sursaturation plus importante.

Si r_0 est trop grand, même en condensant toute l'eau la

gouttes sont trop petites pour être stables et elles s'évaporent donc complètement : $\eta = \eta_0$.

44. Ce code fait un découpage d'un intervalle en deux autant de fois que nécessaire pour encadrer le zéro d'une fonction avec une précision donnée.
La condition $f(\eta_{min}) f(\eta_{max}) \leq 0$ est toujours vérifiée dans la boucle et permet de s'assurer que $\eta_{min} \leq \eta_{éq} \leq \eta_{max}$.
À chaque itération, on coupe l'intervalle en deux parties égales et on choisit la moitié qui satisfait toujours cette condition.
Il faut encadrer la solution stable pour $\eta_0 = 1$, 2 et 5 cm^{-3}.
On peut poser $\eta_{min} = 1,01$ et $\eta_{max} = 1,6$ par exemple.
(Attention à ne pas prendre $\begin{cases} \eta_{max} \text{ plus grand que la solution instable} \\ \eta_{min} = 1 \text{ car } f(1) \text{ n'est pas définie} \end{cases}$)

45.



La tangente à f en η_n a pour équation :
$y(\eta) = f(\eta_n) + (\eta - \eta_n) f'(\eta_n)$

Elle intersecte l'axe des abscisses en $\eta_{n+1} = \eta_n - \frac{f(\eta_n)}{f'(\eta_n)}$.

On construit ainsi graphiquement une suite qui converge vers un zéro de f. On peut prendre valeur_initiale = 1.01 pour s'assurer qu'on converge vers la solution stable.

46. eq = f(eta)
deq = deriv(f)(eta)
pour la boucle (instructions 2 et 3)
residu = np.abs(eta - eta_old) (instruction 4)
On approxime le résidu à l'écart entre deux estimations successives

Pour instruction 1 : il faut définir residu de sorte à ce que la boucle démarre.
Par exemple : residu = 2.* precision fonctionne.