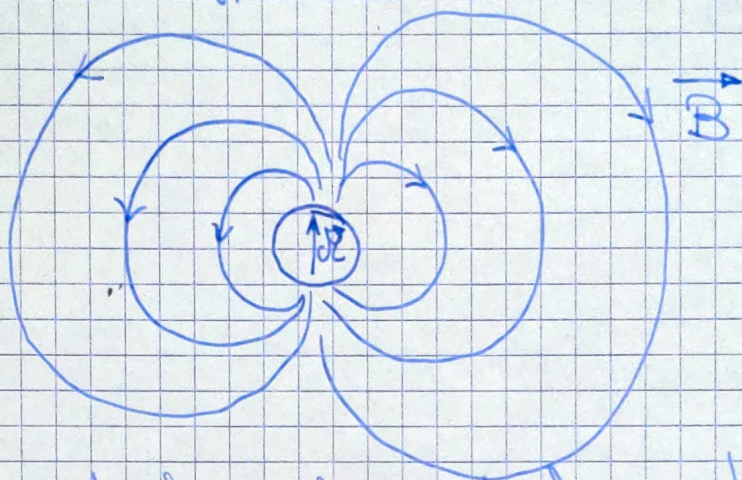


Corrigé - DS4 Type ENS

1.



Les lignes de champ d'un dipôle magnétique forment des cercles tangents au dipôle.

2. On remplace les coordonnées dans l'équation (3) :

$$\vec{B}_0(P_1) = \frac{\mu_0 M}{2\pi D^3} \vec{e}_z$$

$$\text{car } \vec{er}(P_1) = \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_0(P_2) = -\frac{\mu_0 M}{4\pi D^3} \vec{e}_z$$

$$\text{car } \vec{er}(P_2) = -\vec{e}_z$$

$$\vec{B}_0(P_3) = \frac{\mu_0 M}{2\pi D^3} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_0(P_4) = -\frac{\mu_0 M}{4\pi D^3} \vec{e}_z$$

} par symétrie

$$3. \vec{B}_0(P_1) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M}{2\pi D^3}$$

On M_v est le moment magnétique volumique $M_v = \frac{\mu}{\frac{4}{3}\pi \cdot (\frac{D}{2})^3}$

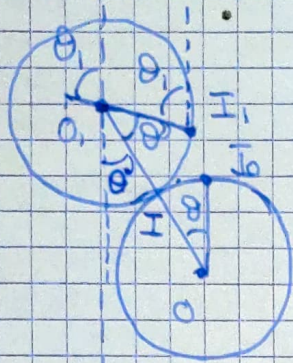
$$\text{Soit : } \frac{M}{4\pi D^3} = \frac{M_v}{3 \times 2^3} = \frac{M_v}{24}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\vec{B}_0(P) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 M_v}{12}}$$

$$\text{AN : } \frac{\mu_0 M_v}{12} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^5}{12} \sim \frac{36\pi}{12} 10^{-2} \sim \boxed{80 \text{ mT}}$$

Ceci correspond à un champ relativement intense pour un aimant permanent.

4.



On remarque:

$$\theta_1 = \theta'' + \theta' \quad (\text{au point } O_1)$$

$$\text{Et } \theta'' = \theta \quad (\text{angles alternes internes})$$

Enfin $\theta'' = \theta$ car I_0 et I étaient confondus

$$\text{Donc } \boxed{\theta_1 = 2\theta}$$

5. L'aimant est soumis à :

- * son poids $\vec{P}$ selon $-\vec{e}_z$
- * la réaction de l'aimant (0) au point de contact I
- * la force magnétique liée à la présence du champ $\vec{B}_0$ créé par l'aimant (0)

6. On travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on considère le système {bille (0) + bille (1)}. Il est soumis à son poids (force conservative) et à la réaction du support sur la bille (0), notée $\vec{R}$.

Alors: $\frac{dE_m}{dt} = W(\vec{R})$ par le théorème de l'énergie mécanique

Mais $\vec{R}$ ne travaille pas car il n'y a pas de mouvement relatif entre le support et la bille (0). Donc $\boxed{\frac{dE_m}{dt} = 0}$

7. On se place au point O_1 , alors l'angle entre $\vec{M}_1$ et $\vec{e}_r$ est θ , ainsi: $\boxed{\vec{M}_1 = M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}$

8. $E_B = -\vec{M}_1 \cdot \vec{B}_0$ énergie du dipôle placé dans le champ créé par $\vec{M}_0$. On a alors:

$$E_B = -\vec{M}_1 \cdot \frac{\mu_0 M}{4\pi D^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta] + c^{\text{te}}$$

$$= -\frac{\mu_0 M^2}{4\pi D^3} [2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta] + c^{\text{te}}$$

On prend $\theta = 0$ comme référence des énergies ce qui permet de fixer la constante, et $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ d'où :

$$E_B = \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi D^3} \sin^2 \theta + \underbrace{cste - \frac{\mu_0 \mu^2}{2\pi D^3}}_{=0}$$

Soit $\boxed{E_B = \frac{1}{2} K \sin^2 \theta}$ où $\boxed{K = \frac{\mu_0 \mu^2}{2\pi D^3}} \left(= \frac{\mu_0 \mu^2 M_v^2}{72} \right)$

9. La vitesse du centre de masse de la bille est $v(0) = D \dot{\theta}$
 D'où une énergie cinétique associée $\frac{1}{2} m D^2 \dot{\theta}^2$
 De plus il y a rotation selon θ , ce qui apporte l'énergie cinétique $\frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2$.

Ainsi : $\boxed{E_{c,1} = \frac{1}{2} m D^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2}$

10. On sait que $J = \frac{m D^2}{10}$ d'après l'équation (2) et que $\theta_1 = 2\theta$ donc $\dot{\theta}_1^2 = 4 \dot{\theta}^2$.

Ainsi : $E_{c,1} = \frac{1}{2} J' \dot{\theta}^2$ avec $J' = m D^2 + \frac{4}{10} m D^2$
 $\Rightarrow \boxed{J' = \frac{7}{5} m D^2}$

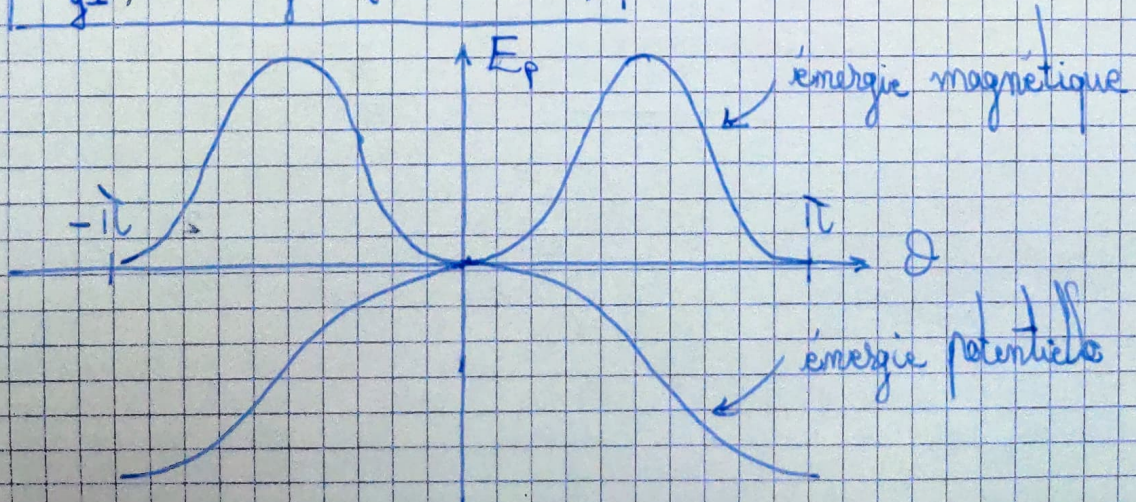
11. Cette énergie correspond au centre de masse de la bille où serait placée une masse ponctuelle m :

$$E_{p,g} = m g (-D + z(0,))$$

(on choisit la constante pour avoir $E_p = 0$ en $z = D$)

$$\boxed{E_{g1} = m g D (1 + \cos \theta)}$$

12.



Les deux énergies sont minimales pour $\vartheta = \pm \pi$: c'est la situation la plus stable. Si K est assez grand, on peut aussi avoir un minimum local en $\vartheta = 0$ permettant d'avoir une chaîne rectiligne.

13. La conservation de l'énergie implique $\frac{dE_m}{dt} = 0$

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} K \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2} J' \dot{\vartheta}^2 + mgD(-1 + \cos \vartheta) \right)$$

$$= K \dot{\vartheta} \cos \vartheta \sin \vartheta + J' \dot{\vartheta} \ddot{\vartheta} - mgD \dot{\vartheta} \sin \vartheta$$

D'où :
$$J' \ddot{\vartheta} + \sin \vartheta (K \cos \vartheta - mgD) = 0$$

14. La configuration proche de $\vartheta = 0$ se simplifie par l'approximation des petits angles : $J' \ddot{\vartheta} + (K - mgD) \vartheta = 0$ (*)

La configuration est stable si on a une équation de type "oscillateur harmonique" $\ddot{\vartheta} + \omega^2 \vartheta = 0$

(Sinon : $\ddot{\vartheta} - \lambda^2 \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta(t) \propto e^{\lambda t}$ diverge : instable)

Il faut donc : $K - mgD > 0 \Leftrightarrow \boxed{S > 1}$

15. La configuration est donc très stable, largement au-dessus du seuil nécessaire.

16. On peut récrire (*) :

$$J' \ddot{\vartheta} + (S-1) mgD \vartheta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\vartheta} + \omega_1^2 \vartheta = 0$$

où :
$$\omega_1^2 = (S-1) \frac{mgD}{J'} = (S-1) \frac{mgD}{\frac{7}{5} m D^2} = \frac{5}{7} (S-1) \frac{g}{D}$$

D'où :
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5}{7} (S-1) \frac{g}{D}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{5}{7} (S-1) \frac{g}{D}} \sim \frac{1}{6} \sqrt{1 \times 100 \times \frac{10}{10^{-2}}} \sim \frac{3 \times 10^2}{6} \sim \boxed{50 \text{ Hz}}$$

en ordre de grandeur

17. On suppose que les billes oscillent en bloc mais en réalité on pourrait s'attendre à avoir des ondes qui se propagent dans la chaîne.

de billes. Ici on suppose que les ondes mécaniques sont rapides par rapport à la période des oscillations et on ne peut donc pas modéliser ces ondes.

18. d'après 9.

9. On utilise l'hypothèse H_{ppv} pour dire que :

$$E_{BN} = \sum_{i=1}^N \underbrace{E_B(i-1; i)}_{\text{énergie d'interaction entre les billes } i-1 \text{ et } i}$$

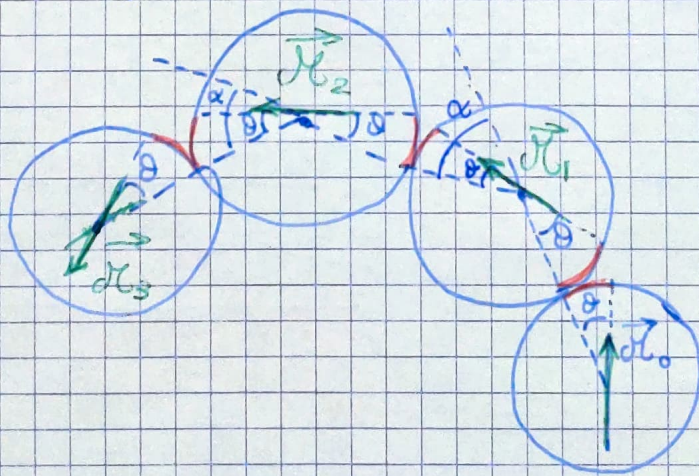
Toutes ces billes étant inclinées d'un angle α l'une par rapport à l'autre, et α correspondant à l'angle $\theta_1 = 2\theta$ des questions précédentes, on peut réécrire :

$$E_B(i-1; i) = \frac{1}{2} K \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Soit

$$E_{BN} = \frac{1}{2} N K \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{1}{8} N K \alpha^2$$

Schema qui montre que $\theta = \frac{\alpha}{2}$:



18 (suite) : On a $\|\vec{B}\| \propto \frac{1}{r^3}$ autour d'un dipôle.

$$\text{D'où } \frac{E_B(i-2; i)}{E_B(i-1; i)} \sim \frac{1}{2^3} \sim \frac{1}{8} \ll 1$$

Donc on peut négliger la contribution des billes plus éloignées en première approximation.

$$20. \text{ On a } \Delta z_i = z_i - z_i^{\text{rel}} = D(1 - \cos \frac{\alpha}{2}) = D \times \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \right]$$

D'où :

$$\Delta z_1 = -\frac{1}{8} D \alpha^2$$

$$\begin{aligned} 21. \Delta z_2 &= \Delta z_1 + D \left(1 - \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{8} D \alpha^2 - \frac{1}{2} D \left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = -\frac{10}{8} D \alpha^2 \end{aligned}$$

Soit $\Delta z_2 = -\frac{5}{4} D \alpha^2$

$$22. \text{On a : } \Delta z_n = \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} - z_k) \quad \underbrace{- n \times D}_{\text{constante correspondant à la position de référence}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} D \cos\left(\frac{\alpha}{2} + k\alpha\right) - nD$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{D}{2} \left(\frac{\alpha}{2} + k\alpha\right)^2 \quad (\text{DL ordre 2})$$

$$= -\frac{D}{2} \alpha^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= -\frac{D}{2} \alpha^2 \sum_{k=0}^{n-1} \left[k^2 + k + \frac{1}{4}\right]$$

$$= -\frac{D}{2} \alpha^2 \left[\frac{(n-1)(n-1+1)(2(n-1)+1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n}{4} \right]$$

$$= -\frac{D}{2} \alpha^2 \left[\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{3n^2 - 3n}{6} + \frac{n}{4} \right]$$

$$= -\frac{D}{2} \alpha^2 \left[\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3} + \frac{n}{4} \right]$$

$$= -\frac{D \alpha^2}{6} \left[n^3 - \frac{n}{4} \right]$$

D'où :

$$\Delta z_n = -\frac{n D \alpha^2}{6} \left(n^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$23. E_{gn} = \sum_{n=1}^N mg \Delta z_n = -mgD \frac{\alpha^2}{6} \sum_{n=1}^N \left(n^3 - \frac{n}{4}\right)$$

Or $\sum_{n=1}^N n^3 \approx \int_0^N x^3 dx = \frac{N^4}{4}$

Et $\sum_{n=1}^N -\frac{n}{4} = -\frac{N(N+1)}{8}$ négligeable devant N^4 car $N \gg 1$.

On en déduit :

$$E_{gN} \approx -mgD \cdot \alpha^2 \cdot \frac{N^4}{24}$$

24. L'énergie potentielle totale est :

$$E_{p,tot} = E_{BN} + E_{gN} = \frac{1}{8} NK \alpha^2 - mgD \alpha^2 \frac{N^4}{24}$$
$$= mgD \alpha^2 \frac{N^4}{24} \times \left(3 \frac{K}{mgD} \frac{1}{N^3} - 1 \right)$$

$$E_{p,tot} = mgD \frac{N^4}{24} \times \left(\frac{3S}{N^3} - 1 \right) \alpha^2$$

On a une situation stable si $E_{p,tot}$ présente un minimum local en $\alpha = 0$ soit $\frac{3S}{N^3} - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{N < \sqrt[3]{3S}}$

Pour que l'approximation faite soit valide il faut que $N \gg 1$ (on a négligé les termes de la somme en $N^3, N^2, \dots$ devant celui en N^4).

25. On trouve $N_c = \sqrt[3]{300} \approx 6$

(En effet $6^3 = 36 \times 6 \approx 200$ et $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \approx 1$).

On n'a pas du tout $N_c \gg 1$ donc l'approximation faite est discutable.

II - Rendement d'une machine thermique à puissance maximale

26. On définit η comme le travail produit par unité d'énergie consommée :

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q}}$$

27. On considère le système thermodynamique constitué de la machine, alors en notant Q_f l'énergie fournie à la source froide le 1^{er} principe sur un cycle s'écrit :

$$\Delta U = 0 = -W + Q - Q_f$$

Par ailleurs l'entropie échangée au cours d'un cycle est :

$$S_{\text{éch}} = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q_f}{T_2} = \underbrace{\Delta S}_{=0} - \underbrace{S_{\text{créé}}}_{\geq 0} \leq 0$$

↑
2^e principe (cycle)

D'où : $Q_f \geq \frac{T_2}{T_1} Q$ et donc $W = Q - Q_f \leq Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right)$

Ainsi : $\eta = \frac{W}{Q} \leq \eta_0$ avec $\boxed{\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1}}$

28. On a $Q = P_{th} \times \tau = G_{th} \tau (T_1 - T_3)$

29. Comme cette machine fonctionne à son rendement maximal alors $W = \eta_{\text{max}} \times Q$ avec $\eta_{\text{max}} = 1 - \frac{T_2}{T_3}$.

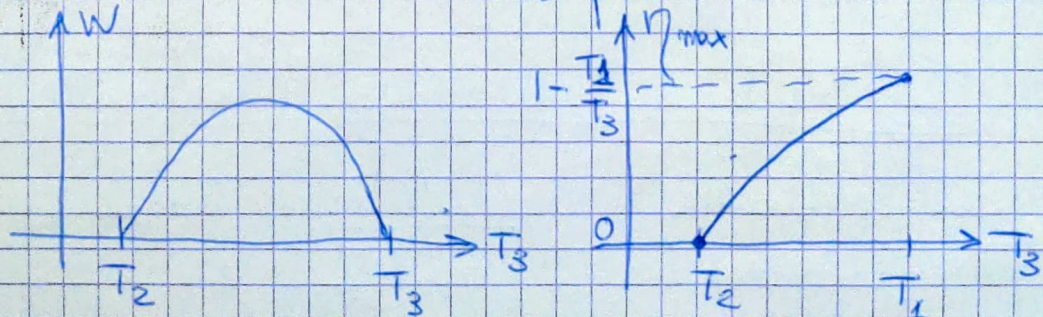
Ainsi :

$$W = G_{th} \times \tau (T_1 - T_3) \left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right) = G_{th} \tau \cdot \frac{(T_1 - T_3)(T_3 - T_2)}{T_3}$$

30. On a nécessairement $T_2 \leq T_3 \leq T_1$. Si l'une des deux

31. inégalités est une égalité, alors $W = 0$.

Le rendement est maximal lorsque $T_3 = T_1$ est maximal (on maximise alors η_{max}) mais ceci implique $G_{th} = 0$, ainsi dans cette situation $W \rightarrow 0$ et $Q \rightarrow 0$ c'est-à-dire que la machine est à l'arrêt : ce n'est pas intéressant.



32. $\frac{dW}{dT_3} = -\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1 - T_3} + \frac{1}{T_3 - T_2}$

$$= \frac{T_3(T_1 - T_3) - T_3(T_3 - T_2) - (T_1 - T_3)(T_3 - T_2)}{T_3(T_1 - T_3)(T_3 - T_2)}$$

$$= \frac{T_1 T_2 - T_3^2}{T_3(T_1 - T_3)(T_3 - T_2)} = 0 \Leftrightarrow T_3^2 = T_1 T_2$$

La rend. puissance est donc maximisée pour $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$

33. Alors $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \frac{T_2}{\sqrt{T_1 T_2}}$ soit :

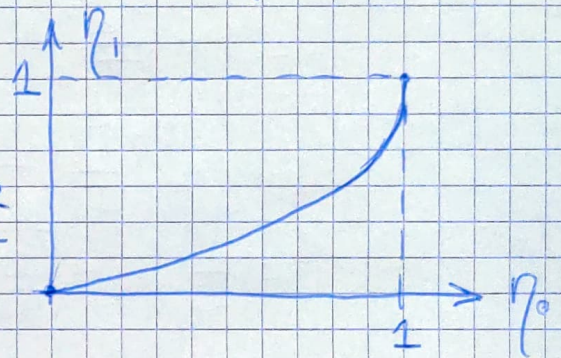
$$\eta_1 = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$$

34. On a vu $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ donc $1 - \eta_0 = (1 - \eta_1)^2$

Soit $\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0}$

Si $\eta_0 \ll 1$ alors $\sqrt{1 - \eta_0} \approx 1 - \frac{\eta_0}{2}$

Donc $\eta_1 = \frac{\eta_0}{2}$



Le rendement est diminué de moitié pour avoir une puissance max.

35. Cette modélisation ne s'intéresse pas aux causes physiques de la création d'entropie mais on peut supposer qu'il s'agit de phénomènes tels que des transferts thermiques irréversibles ou la compression d'énergie mécanique en énergie thermique par des frottements. Le signe de $\sum$ est toujours positif. $S_c \propto \frac{1}{\epsilon}$ car les processus rapides créent plus d'entropie.

36. On reprend Q27 : $\Delta U = 0 = -W + Q - Q_f$

$$\Delta S = 0 = S_{ch} + S_c = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q_f}{T_2} + \frac{\sum}{\epsilon}$$

Alors : $Q_f = Q \cdot \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_2 \sum}{\epsilon}$

D'où : $W = Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{T_2 \sum}{\epsilon}$

37. À Q fixé, la puissance vaut :

$$P = \frac{W}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) - \frac{T_2 \sum}{\epsilon^2}$$

$$\frac{dP}{d\epsilon} = - \frac{Q}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) + \frac{2T_2 \sum}{\epsilon^3}$$

On a un maximum de puissance pour :

$$\epsilon_2 = \frac{2 \sum T_2}{Q \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right)} = \boxed{\frac{2 \sum T_1 T_2}{Q (T_1 - T_2)}}$$

38. On a alors :

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{W_2}{Q} = 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2 \sum}{Q \epsilon_2} \quad \text{d'après Q36} \\ &= 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_2 \sum}{Q} \times \frac{Q (T_1 - T_2)}{2 \sum T_1 T_2} \\ &= 1 - \frac{T_2}{T_1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad \text{soit} \quad \boxed{\eta_2 = \frac{\eta_0}{2}} \end{aligned}$$

39. Les prédictions sont :

$$\begin{cases} \eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0} \approx \frac{\eta_0}{2} \\ \eta_2 = \frac{\eta_0}{2} \end{cases} \quad \eta_0 \ll 1$$

$\eta_1 \approx \eta_2$ lorsque $\eta_0 = 0$

Or l'irréversibilité est proportionnelle à $\eta_0 - \eta$ donc ceci correspond à une irréversibilité faible.

40. On peut refaire les mêmes calculs que Q36 en remplaçant T_1 par T_3 et $\frac{\sum}{\epsilon}$ par S_c , alors on trouve :

$$W = Q \left(1 - \frac{T_2}{T_3} \right) - T_2 S_c$$

$$\text{Or : } W = \eta_{\max} Q \quad \text{donc} \quad T_2 S_c = Q (\eta_0 - \eta_{\max})$$

$$\text{avec } \eta_{\max} = 1 - \frac{T_2}{T_3} \quad (\text{Q29})$$

Ainsi on peut écrire :

$$T_2 S_c = Q \left(\frac{T_2}{T_3} - \frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{Q T_2 (T_1 - T_3)}{T_1 T_3}$$

$$W = (1 - \frac{T_2}{T_3}) Q$$

$$\text{Mais } T_1 - T_3 = \frac{Q}{G_{th} \sum} \quad \text{et} \quad T_3 = T_1 - \frac{Q}{G_{th} \sum}$$

on remplace :

$$\boxed{S_c = \frac{Q^2}{T_1 (T_1 G_{th} \sum - Q)}}$$

On peut se placer dans la limite $\boxed{\tau \gg \frac{Q}{T_1 G_{th}}}$

Concrètement cela signifie que les "cycles" sont lents devant les temps caractéristiques des transferts thermiques donc qu'on est dans un cas de faible irréversibilité.

Alors $\Sigma = \frac{Q^2}{T_1^2 G_{th}}$ et $S_c = \frac{\Sigma}{\tau}$: on retrouve le modèle 2. On a donc bien équivalence des deux modèles pour les faibles irréversibilités.

41. On peut écrire le coût :

$$C = \underbrace{\alpha}_{\text{coût de production}} + \underbrace{\beta}_{\text{coût du kWh}} \times \underbrace{P_{th}}_{\text{puissance de la source chaude}} \times \underbrace{T}_{\text{durée de vie de la centrale}}$$

Et la puissance l'énergie totale produite est :

$$W_{tot} = P_{méc} \times T = \eta \times P_{th} \times T$$

On veut maximiser $\frac{W_{tot}}{C} = \frac{\eta P_{th} T}{\alpha + \beta P_{th} T}$

* Si le coût dominant est le combustible :

$$\frac{W_{tot}}{C} = \frac{\eta}{\beta} \quad \text{donc il faut maximiser le rendement}$$

* Si le coût dominant est la production :

$$\frac{W_{tot}}{C} = \frac{\eta P_{th} T}{\alpha} = P_{méc} \times \frac{T}{\alpha} \quad \text{donc il faut maximiser la puissance mécanique (ou électrique) produite.}$$

42. On a pour ce réacteur :

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{288}{581} \approx 1 - \frac{290}{580} = 0,5$$

En pratique $\eta = 0,36$. On peut remarquer que :

$$\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \frac{T_2}{T_1}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \approx \frac{2 - 1,4}{2}$$

soit $\eta_1 \approx 0,3$

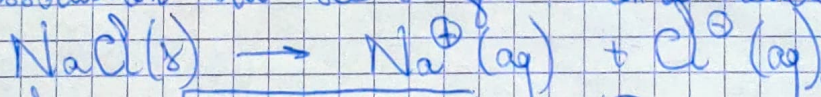
Et $\eta_2 = \frac{\eta_0}{2} \approx 0,25$

On voit ici que $\boxed{\eta \geq \eta_1 \text{ et } \eta \geq \eta_2}$ donc on a choisi une configuration intermédiaire entre optimisation de rendement et optimisation de puissance.

Rq: le sujet est un peu vieux... aujourd'hui on aurait sûrement une question sur le choix d'optimiser en puissance ou en rendement par rapport au CO_2 émis. L'optimisation en rendement est bien plus écologique (~ 2 fois moins de CO_2).

III - Energie Pure

43. La dissolution du sel se fait selon la réaction:



On a donc $\boxed{x_{\text{Na}} = x_{\text{Cl}}} = \sum_{\text{Mol réaction}}^{\leftarrow}$ arrangement de la

La réaction peut être supposée totale, alors $\sum = n_{\text{NaCl}}$

et $n_{\text{NaCl}} = \frac{m_{\text{NaCl}}}{M_{\text{NaCl}}} = \frac{CV}{M_{\text{NaCl}}}$ $c = 30 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ concentration

$\Rightarrow \frac{n_{\text{NaCl}}}{n_{\text{tot}}} = \frac{CV_{\text{mm}}}{M_{\text{NaCl}}}$ et $x = x_{\text{Na}} + x_{\text{Cl}} = \frac{2 \sum}{n_{\text{tot}}}$ d'où:

$$\boxed{x = \frac{2CV_{\text{mm}}}{M_{\text{NaCl}}}} = 2 \times \frac{3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-3} \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{58 \cdot 10^{-3}} \sim \boxed{2 \cdot 10^{-2}}$$

$$\begin{aligned} 44. \mu &= \mu^*(P, T) + RT \ln(a_{\text{eau}}) \\ &= \mu^*(P, T) + RT \ln(x_{\text{eau}}) \\ &= \mu^*(P, T) + RT \ln(1-x) \quad \text{car } x + x_{\text{eau}} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Et } \mu_s = \mu^*(P, T) + RT \ln x$$

On a $G = \sum \mu_i n_i$ dans une solution

$$= n_{\text{tot}} \sum \mu_i x_i \quad n_{\text{tot}} \approx \frac{V}{V_m} \text{ si l'essentiel de la solution est de l'eau}$$

$$\approx \frac{V}{V_m} \times \sum \mu_i x_i \quad (*)$$

Alors, on peut remarquer que la solution B contient de l'eau pure:

$$G_B = \frac{V_B}{V_m} \mu^*(T, P)$$

$$\text{Et: } G_A = \underbrace{\frac{V_A}{V_m} \left[\mu^*(T, P) + RT \ln(1-x) \right]}_{\text{eau}} + \underbrace{\left(\psi(P, T) + RT \ln x \right) x}_{\text{sel}}$$

45. Alors: $G_M = \frac{V_M}{V_m} \left[\left(\mu^*(T, P) + RT \ln(1-x_M) \right) (1-x_M) + \left(\psi(P, T) + RT \ln x_M \right) x_M \right]$

(toujours en utilisant $(*)$)

46. Dans ce cas, la conservation de quantité de matière en sel s'écrit:

$$\frac{V_A}{V_m} \times x = \frac{V_M}{V_m} \times x_M \Leftrightarrow x_M = x \frac{V_A}{V_M} \quad (*')$$

or $V_M = V_A + V_B$ donc $x_M = \phi_A x$

Alors:

$$\Delta G = G_M - (G_A + G_B) \quad \text{car } G \text{ est extensive}$$

On constate que en raison de $(*')$ tous les termes en μ^* et ψ se simplifient et il reste:

$$\Delta G = \frac{RT V_M}{V_m} \left[(1 - \phi_A x) \ln(1 - \phi_A x) + \phi_A x \ln(\phi_A x) - \phi_A (1-x) \ln(1-x) - \phi_A x \ln x \right]$$

47. Dans ce cas $\ln(1-x) \approx -x$ $\ln(1-\phi_A x) \approx -\phi_A x$

Enfin on remarque que $\ln(\phi_A x) = \ln \phi_A + \ln x$.

On trouve :

$$\Delta G = \frac{RT V_H}{V_m} \left[-\phi_A x (1 - \phi_A x) + \phi_A x \ln(\phi_A) + \phi_A x (1 - x) \right]$$

À l'ordre 1 en x :

$$\Delta G = \frac{RT V_H}{V_m} \times \phi_A x \ln(\phi_A)$$

48. On utilise l'identité thermodynamique :

$$dU = T dS - p dV$$

$$\text{Or : } G = U + PV - TS$$

$$dG = dU + P dV + V dP - T dS - S dT$$

$$= -S dT + V dP$$

Comme la transformation est isotherme : $dG = V dP$

$$\text{Or } V = \frac{nRT}{P} \text{ (gaz parfait)} \Rightarrow dG = nRT \frac{dP}{P}$$

$$\text{Ainsi } \Delta G = \int dG = nRT \ln\left(\frac{P}{P_i}\right) = \boxed{nRT \ln\left(\frac{V_A}{V_H}\right)}$$

On retrouve l'expression précédente avec $\phi_A = \frac{V_A}{V_H}$ et

$$n = \frac{V_H \phi_A x}{V_m} = \frac{V_A x}{V_m} \text{ nombre total de moles de sel.}$$

Ceci est logique : le modèle du mélange idéal et du gaz parfait correspondent à des particules sans interaction donc une détente se produit sur un "gaz parfait" constitué des ions Na^+ et Cl^- .

49. On applique le 1^{er} principe au système : $\Delta U = W + Q$

$$\text{On écrit } W = W_{\text{utile}} + W_{\text{pression}}$$

$$\text{avec } W_{\text{pression}} = - \int p_{\text{ext}} dV = - p_{\text{ext}} \Delta V = - \Delta(PV)$$

car la transformation est manobare.

$$\text{On applique le 2^e principe : } \Delta S = S_{\text{ich}} + S_{\text{créée}} \geq S_{\text{ich}}$$

$$\text{Or } S_{\text{ich}} = \int \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}} = \frac{\Delta Q}{T_{\text{ext}}} \text{ (transformation manotherme)}$$

et donc $Q \leq T \Delta S$

On réinjecte ces deux résultats dans le 1^{er} principe:

$$\Delta U \leq \underbrace{T \Delta S}_{=\Delta(TS) \text{ car monotherme}} - \Delta(PV) + W_u$$

Or $G = U + PV - TS$ par définition donc:

$$\Delta G \leq W_u \Leftrightarrow \boxed{-W_u \leq -\Delta G}$$

le travail récupérable $W_{\text{réc}} = -W_u$ est nécessairement inférieur à une valeur maximale $\boxed{W_{\text{réc}}^{\text{max}} = -\Delta G}$

Ici: $W_{\text{réc}}^{\text{max}} = -\frac{RTV_M}{V_m} \times \phi_A \propto \ln \phi_A$

Ici $\phi_A = \frac{1}{2}$ donc $W_{\text{réc}}^{\text{max}} = \frac{RTV_A}{V_m} \times \ln 2$

$$W_{\text{réc}}^{\text{max}} \sim \frac{8 \times 300 \times \frac{1}{2} \times 2 \cdot 10^{-2}}{18 \cdot 10^{-6}} \times 0,7$$

$$\sim \frac{56}{18} \times 3 \times 2 \times \frac{10^2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1}}{10^{-6}} \sim 1,8 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\sim \frac{\underbrace{\frac{56}{18} \times 3 \times 2}_{\sim 3}}{3,6 \cdot 10^6} \sim \boxed{0,5 \text{ kWh}}$$

50. $T = \frac{0,5 \cdot 10^3}{9} \sim 0,05 \cdot 10^3 \sim \boxed{50 \text{ h}}$

51. On produit en 1s: $D_m \times W_{\text{réc}}^{\text{max}}$
 $\hookrightarrow \text{débit} = \text{nb de m}^3 \text{ d'eau}$

D'où: $P = D_m \cdot W_{\text{réc}}^{\text{max}} = 2 \cdot 10^5 \times 2 \cdot 10^6 = \boxed{4 \cdot 10^{11} \text{ W}}$

Cela représente 400 réacteurs nucléaires!

52. On a $V_M = V_A + V_B = \frac{V_A}{\phi_A}$ donc $V_B = V_A \left(\frac{1}{\phi_A} - 1 \right)$

et $V_A = \frac{V_B}{\frac{1}{\phi_A} - 1} = \frac{V_B \phi_A}{1 - \phi_A}$ d'où:

$$W_{\text{réc}}^{\text{max}} = -\frac{RTV_B}{V_m} \times \frac{\phi_A}{1 - \phi_A} \ln \phi_A \propto$$

Il faut maximiser $f: \phi_A \mapsto - \frac{\phi_A \ln \phi_A}{1 - \phi_A}$ ce qui est le

cas pour $\phi_A \rightarrow 1$, on doit donc prendre $V_A \gg V_B$.
C'est bien le cas pour l'embouchure d'un fleuve dans l'océan.