Lycée Baimbridge, MP 2026-2027

7 novembre 2026

Physique Chimie

DS 4
Type X/ENS

Durée : 4 heures

Calculatrice ***interdite***

Le sujet est constitué de deux parties totalement indépendantes. Les sous-parties 1.1 et 1.2, ainsi que 2.1 et 2.2, sont également largement indépendantes. Il n'est pas nécessaire de les aborder dans l'ordre.
Les réponses doivent systématiquement êtres justifiées (sauf mention explicite du contraire). La clarté de la rédaction et la justesse du raisonnement mené seront valorisées, même si la tentative de réponse n'est pas aboutie ou si la réponse obtenue à la fin de la question est incorrecte.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur de sujet, merci de l'indiquer clairement sur votre copie, et de poursuivre votre composition en expliquant les initiatives que vous êtes amené·e à prendre.
Comme au concours, le sujet est long. Il n'est pas nécessaire de tout faire pour avoir une bonne note.

1 Optique adapatative dans les télescopes

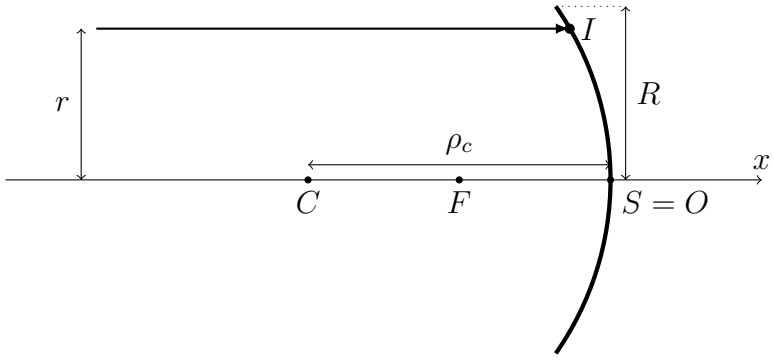
Pour observer des astres lointains, on utilise des télescopes, qui sont exclusivement composés de miroirs. Ceci a de nombreux avantages, parmi lesquels la possibilité de réliser de très grands télescopes, ce qui n'est pas possible avec des lentilles.

On cherche dans ce problème à décrire le fonctionnement d'un télescope pour observer les étoiles et les différentes méthodes permettant de s'affranchir des perturbations liées à la turbulence atmosphérique.

1.1 Etude d'un télescope à miroir sphérique

1.1.1 Télescope de Newton

On considère un télescope simple constitué d'un miroir concave représenté ci-dessous, correspondant à une portion de sphère de rayon de courbure $\rho_c = 10\,\text{m}$, de rayon $R = 1\,\text{m}$ et de centre C. On note S l'intersection entre l'axe optique et le miroir, et on choisit ce point comme origine de l'axe optique ($x = 0$). On étudie un rayon incident parallèle à l'axe optique, et on note I le point d'incidence associé. On cherche à montrer que le miroir présente un stigmatisme approché et à positionner son foyer F (on note que par principe de retour inverse, les foyers objet et image sont confondus pour un miroir).



☐ **1** – Rappeler ce que sont les conditions de Gauss.

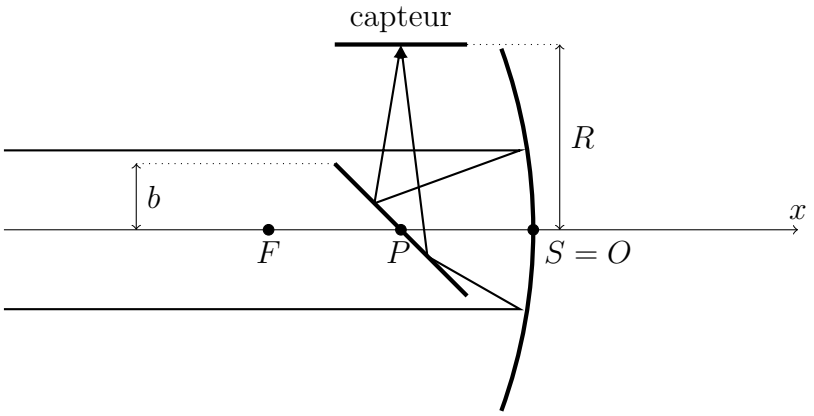
☐ **2** – On considère un rayon incident arrivant à une distance b de l'axe parallèlement à l'axe. Déterminer l'abcisse x du point A' auquel ce rayon coupe l'axe en fonction de b et ρ_c.

☐ **3** – Dans les conditions de Gauss, montrer qu'il y a stigmatisme approché, et déterminer la distance focale $f = \overline{FS}$ du miroir en fonction de ρ_c.

☐ **4** – Le système reçoit le rayonnement d'une source astronomique à l'infini ; cette source est vue sous l'angle $\alpha = 1\,\text{minute d'arc}$. Déterminer la taille de son image dans le plan focal en F du système.

☐ **5** – Quelle est la longueur focale f' d'une lentille mince unique qui donnerait une image de même taille ? Commenter.

En pratique, pour des raisons d'obstruction, on ne peut pas placer de capteur directement au foyer image du télescope. On utilise donc un miroir plan que l'on place sur un point P entre les points F et S pour que l'image se forme sur un capteur situé juste à l'extérieur du télescope.



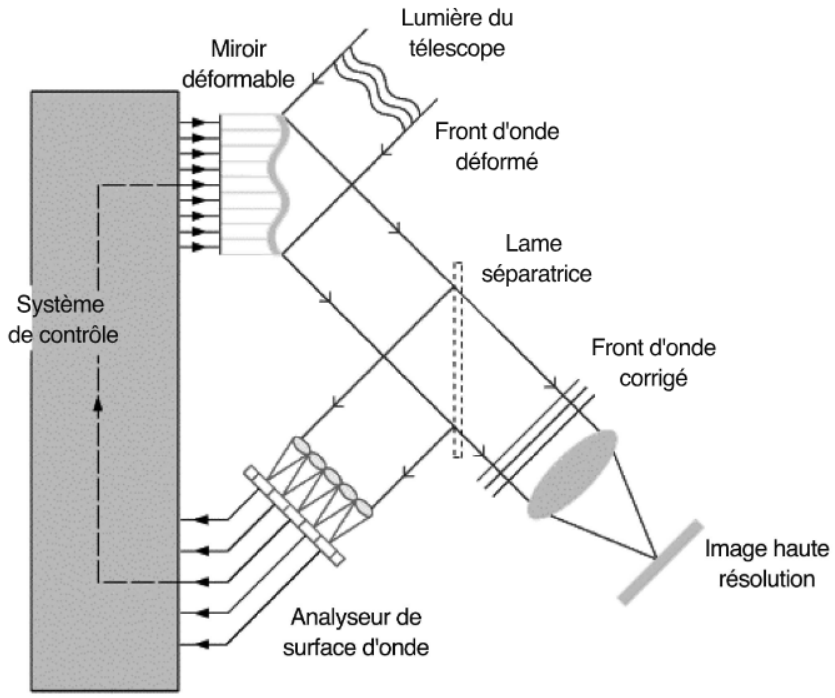
☐ **6** – Le capteur obstrue partiellement le miroir primaire. Calculer le rapport r/R optimal pour que, pour une source ponctuelle située à l'infini sur l'axe, le miroir secondaire collecte tous les rayons réfléchis par le miroir. En déduire la surface collectrice effective du télescope et commenter.

☐ **7** – Calculer la taille de la tache de diffraction d'un point à l'infini sur l'axe sur le capteur. Quel est l'avantage d'utiliser un miroir par rapport à une lentille ?

1.2 Optique adaptative

Lorsque l'on utilise un télescope avec un miroir de grande taille, les images des astres sont dégradées en raison de la propagation à travers la turbulence atmosphérique. Cette propagation introduit des différences de marche spatiales et temporelles aléatoires sur les faisceaux optiques. Les ondes incidentes sur le télescope, issues d'une source lointaine, ne sont donc plus des ondes planes. Un système d'optique adaptative (figure ci-dessous) est constitué d'un analyseur de front d'onde qui est en charge de la mesure en temps réel des perturbations du faisceau lumineux après sa réflexion sur le miroir M_1. Ce système est couplé à un miroir déformable permettant d'introduire sur le faisceau des différences de marche opposées à celles de la turbulence pour en assurer la correction en temps réel.

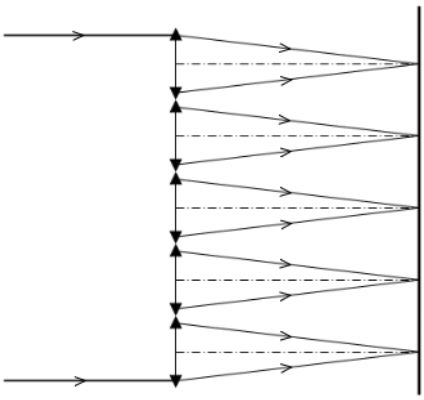
Nous cherchons ici à étudier comment il est possible de mesurer localement la courbure ou l'inclinaison du front d'onde afin de pouvoir la corriger en agissant sur le miroir mobile.



1.2.1 Mesure de pentes sur le profil du front d'onde

Le principe de l'analyseur de front d'onde de type Shack-Hartman est représenté par la figure suivante. Une fraction du signal optique est prélevée et traverse une galette de N microlentilles. Chaque microlentille est de taille carrée, de côté a_μ, de distance focale f. Les N microlentilles pavent un cercle de diamètre $q \approx a_\mu \sqrt{4N/\pi}$.

Pour éclairer la galette de microlentilles, le faisceau incident collecté par le miroir primaire du télescope a été mis en forme par une optique secondaire. L'ensemble primaire + secondaire est modélisé par un montage afocal équivalent constitué de deux lentilles minces convergentes, formant une lunette de grossissement angulaire G ; soit D le diamètre de la première lentille (égal au diamètre du miroir primaire). On suppose le diamètre de la seconde suffisamment grand pour n'intercepter aucun rayon ayant traversé la première.



☐ **8** – La galette de microlentilles est placée dans le plan conjugué de la première lentille à travers la seconde. Justifier ce choix.

☐ **9** – L'onde incidente étant inclinée d'un angle i_0, que devient l'inclinaison i en sortie du montage afocal ? Faire un schéma.

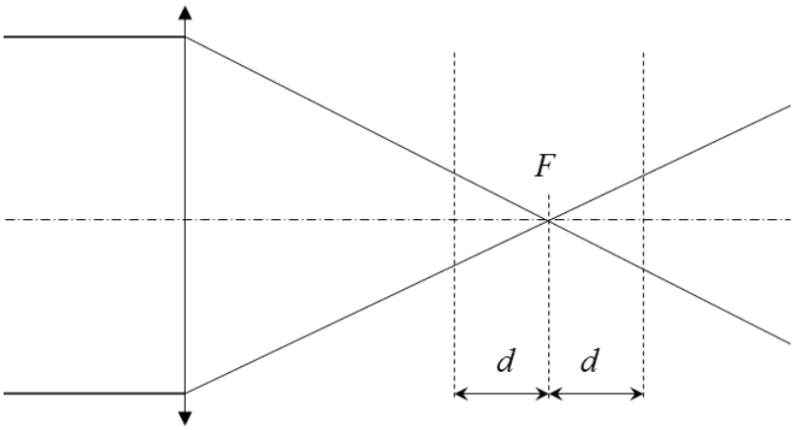
☐ **10** – Quelle relation nécessaire et suffisante doit vérifier le grossissement G du montage afocal, pour un éclairement total de la galette, sans perte de lumière ? Faire un schéma.

On suppose qu'une microlentille analysant une fraction du front d'onde perturbé reste éclairée par une onde localement plane.

☐ **11** – Montrer sur un schéma les différentes positions possibles de l'image dans le plan focal de la galette de microlentilles, générées par un front d'onde plan initialement orthogonal à l'axe, puis localement incliné d'un angle i suite à la turbulence. En déduire le principe de la mesure.

1.2.2 Mesure de courbure du profil du front d'onde

Le dispositif présenté ci-dessous permet de mesurer directement la courbure du front d'onde incident. Lorsqu'il est non perturbé, le front d'onde plan incident est focalisé au foyer F d'une lentille de distance focale f'. Un détecteur plan intercepte le faisceau alternativement en amont et en aval du foyer, sa position étant rapidement modulée d'un pas d de part et d'autre de F.



Le faisceau incident, perturbé, n'est pas localement plan ; il possède au niveau de la lentille une courbure C analogue à celle d'une calotte sphérique de rayon p : $C = 1/p$, p étant algébrique et compté du sommet de la calotte vers le centre.

☐ **12** – En quelle position p', comptée à partir de la lentille, le faisceau converge-t-il ?

Par la suite, on notera $\Delta p' = p' - f'$. On suppose que le faisceau incident illumine en totalité la lentille d'aire A_0.

☐ **13** – En déduire dans ce cas que les aires éclairées pour les deux positions du détecteur valent respectivement :

$$A_{\pm} = A_0 \left(\frac{d \mp \Delta p'}{f' + \Delta p'} \right)^2$$

☐ **14** – On note $\Delta\Phi = \dfrac{\Phi_+ - \Phi_-}{\Phi_+ + \Phi_-}$ la différence relative entre les flux lumineux $_{\pm}$ collectés par unité de surface. En faisant l'hypothèse d'un éclairement uniforme et d'une courbure faible, exprimer $\Delta\Phi$ en fonction de C ; conclure.

2 Thermodynamique de l'atmosphère

Données : Masse molaire de l'oxygène : 16 g/mol. Masse molaire de l'azote : 14 g/mol. Masse molaire du carbone : 12 g/mol.
Constante des gaz parfaits : $R = 8.314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}mol^{-1}}$.

2.1 Gradient de température dans l'atmosphère

On considère dans cette section des modèles d'atmosphères de complexité croissante, afin d'isoler les processus physiques qui gouvernent le profil de température vertical de l'atmosphère. Dans toute cette partie, on définit $\gamma = C_p/C_v$, où C_p est la capacité calorifique molaire à pression constante de l'air, et C_v est sa capacité calorifique molaire à volume constant.

2.1.1 Deux questions préliminaires

☐ **15** – Question préliminaire : on considère une parcelle d'atmosphère cylindreique, de section horizontale S, située entre deux altitudes z et $z + \mathrm{d}z$. Ecrire l'équilibre mécanique de cette parcelle et en déduire la loi de l'hydrostatique :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g$$

où ρ est la masse volumique de l'air. (Les 3/2 peuvent aborder cette question que nous traiterons en cours en décembre, mais sont invités à admettre le résultat et poursuivre en cas de difficulté.)

☐ **16** – Rappelez quels sont les deux constituants principaux de l'atmosphère ainsi que leurs proportions. En déduire une valeur approchée de la masse molaire moyenne M de l'air.

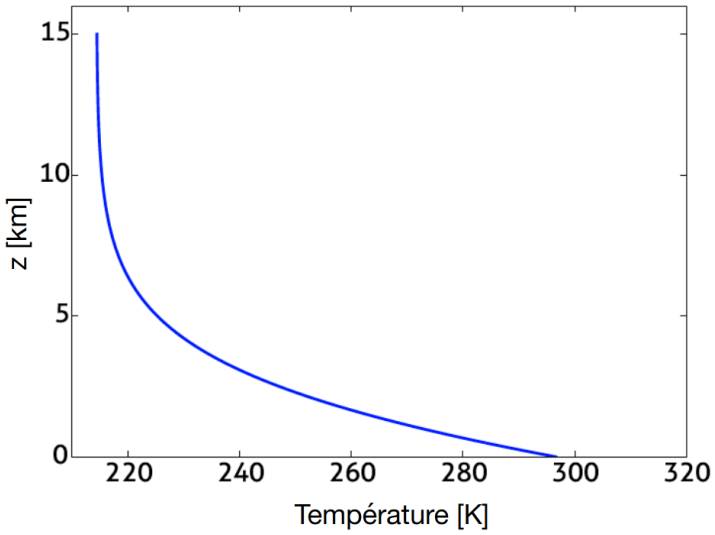
2.1.2 Modèle radiatif

On considère tout d'abord les processus radiatifs : on admet qu'un système plan infini à température T émet par rayonnement un flux surfacique d'énergie $\varphi = \sigma T^4$ (en watts par mètre carré), le flux étant dirigé vers l'extérieur. Dans les situations considérées ci-après, ce flux correspond à du rayonnement infrarouge. Le coefficient $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$ est appelé constante de Stefan. On néglige la courbure de la Terre, et on considère donc la surface de la Terre comme localement plate.

☐ **17** – Dans un premier modèle, on considère que la surface terrestre absorbe un flux solaire incident $I = 220\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$, considéré uniforme et indépendant du temps. A l'équilibre, la Terre ré-émet l'intégralité de l'énergie reçue par rayonnement vers le haut. En déduire la température d'équilibre de surface T_0 de la Terre dans ce modèle. Faites une application numérique. Commentez le résultat.

☐ **18** – Un raffinement du modèle consiste à inclure une atmosphère infiniment fine située à une hauteur h au-dessus de la surface de la Terre. Cette atmosphère est transparente au rayonnement solaire incident, mais elle est entièrement absorbante pour le rayonnement infrarouge émis par la Terre. Elle atteint une température d'équilibre T_a, si bien qu'elle rayonne elle aussi un flux d'énergie σT_a^4 vers le haut, mais aussi un flux σT_a^4 vers le bas. Calculez la température T_a d'équilibre de l'atmosphère, ainsi que la nouvelle température d'équilibre T_0 de surface de la Terre. Faites une application numérique. Commentez le résultat obtenu. Comment s'appelle l'effet mis en évidence par ce modèle simple ?

On complexifie le modèle en prenant en compte l'absorption et la ré-émission de rayonnement par chaque tranche élémentaire d'atmosphère. Pour un profil donné du coefficient d'absorption de rayonnement infrarouge par l'atmosphère, ce modèle conduit au "profil radiatif" de température représenté ci-dessous.



2.1.3 Instabilité convective

On cherche désormais à vérifier la stabilité du profil établi précédemment. On considère pour cela une atmosphère ayant un profil de température initial $T(z)$ quelconque (les profils de densité $\rho(z)$ et de pression $P(z)$ se déduisent de ce profil de température par l'équilibre hydrostatique et la loi des gaz parfaits). On isole une parcelle de fluide à l'altitude initiale z_i qui constitue le système fermé étudié. Ce système est initialement à la température $T_i = T(z_i)$, et à la pression $P_i = P(z_i)$. On suppose qu'une perturbation externe déplace la parcelle considérée à l'altitude $z_i + \mathrm{d}z$, de façon adiabatique et quasi-statique (réversible), où $\mathrm{d}z$ représente un déplacement infinitésimal. Le système s'équilibre donc rapidement à la pression $P_f = P(z_i + \mathrm{d}z)$.

☐ **19** – Calculez la température T_f du système à l'issue de cette transformation, en fonction de P_i, P_f, T_i, R et C_p.

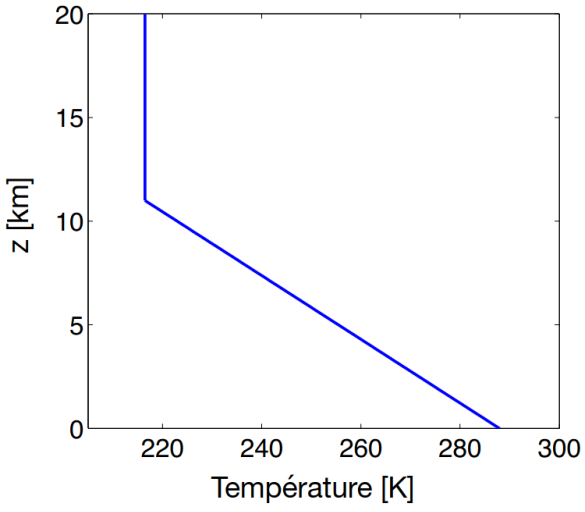
☐ **20** – Discutez le mouvement vertical ultérieur de la parcelle d'atmosphère, selon que $T_f < T(z_i + \mathrm{d}z)$ ou $T_f > T(z_i + \mathrm{d}z)$. Quelle situation correspond à une atmosphère stable ? à une atmosphère instable ? On appelle ce phénomène l'instabilité convective.

☐ **21** – Le cas où $T_f = T(z_i + \mathrm{d}z)$ s'appelle le cas "marginalement stable". Exprimer le gradient de température vertical $\Gamma = \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$ de l'atmosphère dans cette situation marginalement stable en fonction de la masse molaire M de l'air, sa capacité thermique molaire à pression constante C_p et l'accélération de la pesanteur g. Faire une application numérique en considérant l'air comme un gaz parfait diatomique ($\gamma = 7/5$).

☐ **22** – Après avoir estimé le gradient de température dans les hautes et basses couches de ce modèle d'atmosphère, indiquez approximativement quelle partie de l'atmosphère est stable, et laquelle est instable, suivant ce modèle.

Le phénomène d'instabilité convective fait que le modèle purement radiatif de la figure précédente n'est pas satisfaisant. A terme, l'instabilité convective conduit à des mouvements verticaux importants (appelés convection) qui mélangent l'air et affectent fortement le profil de température mesuré dans l'atmosphère réelle. Ainsi, à toute altitude z où le profil de température est instable, la convection se produit jusqu'à ce que le profil de température retrouve localement un gradient de température proche du gradient marginalement stable déterminé précédemment. Cette région de l'atmosphère où l'instabilité convective joue un rôle prépondérant s'appelle la troposphère. La couche d'atmosphère qui n'est pas affectée par cette instabilité s'appelle la stratosphère.

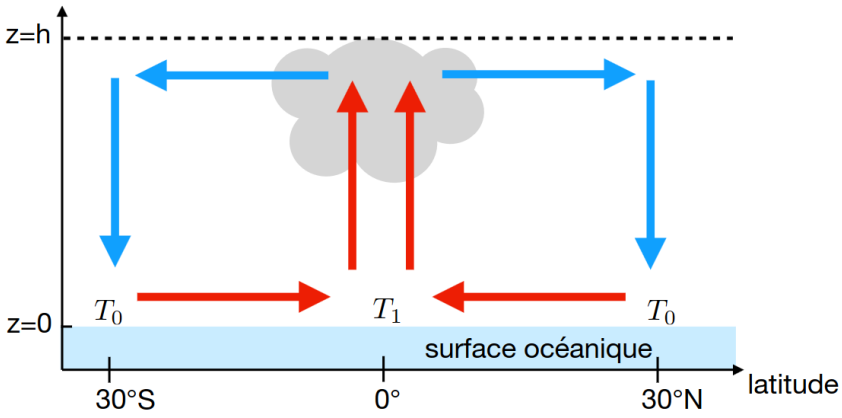
☐ **23** – Commentez alors l'allure qualitative du profil de température du modèle simplifié d'atmosphère standard utilisé en aéronautique et fourni ci-dessous, en lien avec le profil du modèle purement radiatif de la figure précédente. Identifiez en particulier la troposphère et la stratosphère.



2.1.4 Gradient de température en présence d'humidité

Le gradient de température mesuré dans la troposphère est moins raide aux latitudes équatoriales. Nous cherchons à expliquer ce phénomène en prenant en compte la présence d'humidité dans l'atmosphère.

On observe en effet dans les tropiques la circulation dite de Hadley, représentée sur la figure 3. Au voisinage immédiat de l'océan équatorial, l'air se charge en vapeur d'eau jusqu'à saturation. La fraction molaire en vapeur d'eau initiale, x_v , est alors de 4 %, et la température de l'ordre de 30°C. Cette atmosphère humide consiste en de nombreuses parcelles isolées d'atmosphère, identiques au système précédent, qui ont un mouvement ascendant depuis le niveau de la mer $z = 0$ jusqu'au sommet de la troposphère, à une altitude $h = 10\,\text{km}$. On suppose que toute la vapeur est condensée lorsqu'une telle parcelle atteint l'altitude h. L'air redescend ensuite vers la surface dans les régions subtropicales, où des ceintures désertiques sont généralement observées (déserts du Sahara, Atacama, Kalahari).



☐ **24** – Pourquoi la température de surface est-elle supérieure au voisinage de l'équateur (T_1), par rapport aux latitudes subtropicales ($T_0 < T_1$)? Commentez alors la structure de cette circulation : direction des mouvements d'air, présence de précipitations équatoriales, etc.

Nous cherchons à déterminer les propriétés de cette circulation en régime stationnaire. Pour cela, on considère un système ouvert, traversé par un courant atmosphérique. L'air atmosphérique y pénètre à l'altitude z_e avec une enthalpie massique h_e, et en sort à l'altitude z_s avec une enthalpie massique h_s. On suppose qu'il y reçoit un transfert thermique massique q. L'atmosphère étant libre, le fluide ne reçoit pas de travail utile.

☐ **25** – Etablir le premier principe industriel pour ce système.

Soit x_v la fraction molaire de vapeur d'eau dans la phase gazeuse. Cette fraction est supposée très faible devant 1 : $x_v \ll 1$. On admet que lorsqu'il y a condensation, l'eau liquide apparaıt sous la forme de fines gouttelettes qui restent en suspension dans la parcelle d'atmosphère, et qui ne tombent pas sous l'effet de la gravité.

☐ **26** – A partir du premier principe industriel, montrer qu'au cours des mouvements adiabatiques de l'atmosphère, on a conservation de l'énergie statique humide molaire définie par :

$$e = C_p T + Mgz + x_v \Delta_{\text{vap}} H$$

où $\Delta_{\text{vap}} H$ est l'enthalpie molaire de vaporisation de l'eau.

☐ **27** – En supposant que le mouvement vertical dans les nuages est très rapide, on peut supposer que la partie ascendante de la cellule de Hadley est adiabatique. En déduire le gradient de température $\Gamma_m = \dfrac{T(h) - T(0)}{h}$ observé dans les tropiques.

☐ **28** – Donnez la valeur numérique du gradient de température de l'atmosphère humide Γ_h, en considérant l'atmosphère comme un gaz parfait diatomique. On donne l'enthalpie de vaporisation de l'eau : $\Delta_{\text{vap}}H = 4.1 \cdot 10^4\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}$. Commentez le résultat, en lien avec le profil du modèle international d'atmosphère standard fourni en figure 2.

☐ **29** – On observe que le gradient de température est le même dans la partie descendante de la cellule de Hadley (dans les subtropiques). Ceci est dû à un équilibrage par des ondes mécaniques que nous n'étudions pas ici. Le mouvement descendant est-il adiabatique ? Quel est le mécanisme moteur de la cellule de Hadley ?

2.2 Formation des nuages

On cherche dans cette partie à décrire le mécanisme de formation des nuages.

2.2.1 Thermodynamique du nuage

☐ **30** – On considère une parcelle d'atmosphère à une altitude donnée dans le profil de température marginalement stable. On suppose de plus que cette parcelle est initialement à la pression de vapeur saturante en vapeur d'eau. On imagine que cette parcelle subit un léger déplacement vers le haut, de façon quasi-statique et adiabatique (réversible). Expliquez qualitativement pourquoi, sous certaines conditions, la parcelle peut néanmoins continuer son mouvement ascendant alors même que l'atmosphère environnante n'est pas instable. Que voit-on alors apparaitre dans le ciel ?

On considère un système constitué d'eau liquide et d'un mélange gazeux air-vapeur d'eau. On note P_v la pression partielle de vapeur dans le gaz, et $P_{\text{sat}}(T)$ la pression de vapeur saturante. Le système considéré contient un nombre fixe de molécules d'air, et un nombre total fixe $n_{\text{tot}} = n_l + n_v$ de moles d'eau, où n_l est le nombre de moles d'eau liquide et n_v le nombre de moles de vapeur d'eau. On suppose la température T et la pression P imposées.

☐ **31** – Démontrer que l'enthalpie libre G est un potentiel thermodynamique. En déduire la relation entre le potentiel chimique $\mu_l(T)$ de l'eau liquide, supposé ne dépendre que de la température, et le potentiel $\mu_v(T, P_v = P_{\text{sat}}(T))$ de la vapeur d'eau à la pression de vapeur saturante.

2.2.2 Formation des gouttelettes

En réalité, en l'absence de surface de condensation, on observe que les goutelettes d'eau ne peuvent pas se former lorsque $P_v = P_{\text{sat}}(T)$: pour qu'elles se forment suffisamment

rapidement, l'atmosphère doit être sursaturée en vapeur d'eau, c'est-à-dire qu'il faut que $P_v > P_{\text{sat}}(T)$. On définit ainsi la sursaturation :

$$\eta = \frac{P_v}{P_{\text{sat}}(T)} > 1$$

On s'intéresse donc désormais à l'évolution d'une gouttelette d'eau liquide dans une atmosphère sursaturée. L'existence d'une interface de surface A entre le liquide et le gaz conduit à un terme d'énergie de surface supplémentaire, σA, qu'il convient d'ajouter à l'énergie du système (ou au potentiel thermodynamique considéré). Le coefficient σ est une constante positive appelée tension de surface. Son unité est le $\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}$.

☐ **32** – Après avoir rappelé la définition du potentiel chimique, exprimer la différentielle de l'enthalpie libre du système en fonction de $\sigma, A, \mu_l, \mu_v, n_l$ et/ou leurs différentielles.

☐ **33** – On suppose que la phase liquide consiste à tout instant en une gouttelette d'eau sphérique de rayon r et de masse volumique constante $\rho_0 = 1000\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Exprimez la différentielle de l'enthalpie libre en fonction de $\mu_l, \mu_v, \rho_0, r, \sigma, M_{\text{H}_2\text{O}}$ et $\text{d}r$, où $M_{\text{H}_2\text{O}}$ est la masse molaire de l'eau.

☐ **34** – Intégrez cette relation pour obtenir l'enthalpie libre $G(r)$ (à une constante près, qui ne joue pas de rôle dans ce qui suit). Tracez l'allure de $G(r)$ pour μ_l et μ_v fixés. On distinguera les cas $\mu_l < \mu_v$ et $\mu_l > \mu_v$.

☐ **35** – Discutez l'évolution de la gouttelette suivant son rayon initial, en distinguant à nouveau les cas $\mu_l < \mu_v$ et $\mu_l > \mu_v$. Quand cela est pertinent, on identifiera une valeur remarquable r_c de r, dont on donnera l'expression en fonction des mêmes paramètres qu'à la question 36. On définira également une énergie d'activation E_a pour l'apparition de la phase liquide, lorsque l'on part uniquement d'un mélange gazeux air-vapeur d'eau, dont on donnera l'expression en fonction de ces mêmes paramètres.

☐ **36** – On modélise la phase gazeuse comme un mélange de gaz parfaits. Exprimez le potentiel chimique de la vapeur d'eau dans ce cas, er déduisez-en le rayon critique au-delà duquel une gouttelette croıt spontanément en fonction de la sursaturation η et de $M_{\text{H}_2\text{O}}, \sigma, \rho_0, R$ et T.

2.2.3 Simulation de la croissance de la goutte

Dans cette sous-partie, on cherche à modéliser numériquement l'évolution de la sursaturation en fonction du temps. On considère un mélange initial air-vapeur d'eau. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ on a une sursaturation initiale $\eta_0 = 2$.

☐ **37** – A partir de vos connaissances sur la loi d'Arrhénius, proposez une expression pour la dépendance de la vitesse de formation de l'eau $v = \dfrac{1}{n_{\text{tot}}}\dfrac{\text{d}n_l}{\text{d}t}$ en fonction de la sursaturation $\eta(t)$ (cette expression sera obtenue à une constante multiplicative près notée A). On supposera que la réaction est d'ordre 1. Commentez cette dépendance en η.

☐ **38** – En déduire que l'évolution de $\eta(t)$ peut se modéliser par l'équation suivante :

$$\dot{\eta} + A\eta \exp\left(-\frac{C}{\ln(\eta)^2}\right) = 0$$

où l'on exprimera la constante C en fonction de $M_{\mathrm{H_2O}}, \sigma, \rho_0, R$ et T.

Dans la suite, on prendra pour simplifier $A = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ et $C = 1$ car oun souhaite juste étudier le comportement qualitatif de cette équation différentielle.

On souhaite utiliser la méthode d'Euler, qui consiste à résoudre une équation différentielle mise sous la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ par le schéma suivant :

$$y(t + \Delta t) = y(t) + f(t, y(t)) \times \Delta t$$

☐ **39** – Compléter la fonction suivante permettant de modéliser la formation de la gouttelette. Préciser la siginification de la variable `eta`.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Constantes du probleme
A = 1. #en s-1
C = 1.

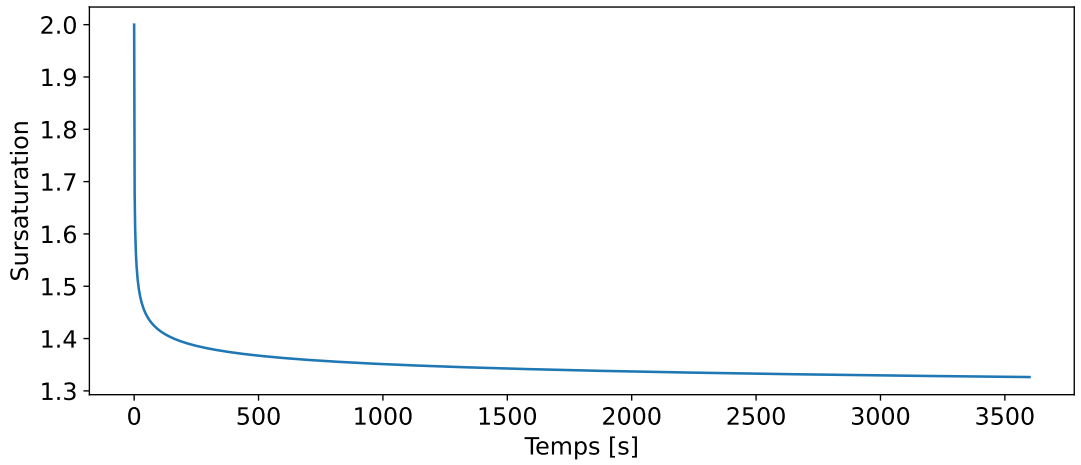
#Conditions initiales
eta0 = 2. # température initiale en Kelvins

#Pas de temps et durée de la simulation
dt = 1.  #pas de temps
t_tot = 3600. #s  temps total de 30mn
valeurs_t = np.arange(0,t_tot,dt)
N = len(valeurs_t)

#Initialisation des tableaux de temps, de temperature et de masse
valeurs_eta = np.zeros((N))

#Resolution par la methode d'Euler
eta = eta0
for i in range(N) :
    valeurs_eta[i] = eta
    INSTRUCTIONS A INSERER
```

On utilise le code et on obtient les résultats ci-dessous.



☐ **40** – Expliquer l'allure de la courbe. Justifier que l'on a théoriquement une convergence vers $\eta = 1$. Pourquoi n'observe-t-on pas cette convergence ?

2.2.4 Sursaturation à l'équilibre

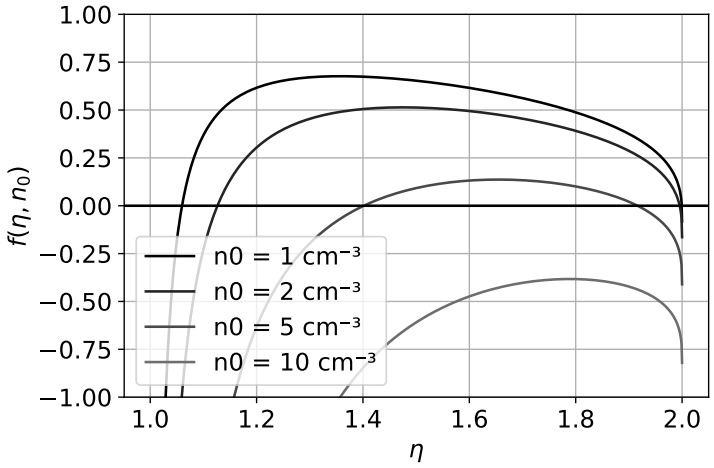
Le modèle de la partie précédente basé sur une analogie avec la loi d'Arrhénius est très simplifié. On prend désormais en compte la présence de noyaux de condensation dans l'atmosphère, de petites particules en suspension (pussières, sel) sur lesquels les gouttes se forment. On note n_0 la densité volumique de ces particules, chaque particule occupe alors un volume moyen $V = \dfrac{1}{n_0^3}$. On suppose ainsi que la goutte précédemment étudiée se forme dans ce volume V.

☐ **41** – On part d'une sursaturation initiale η_0. En utilisant la conservation de la quantité de matière en eau, établir l'expression du rayon r de la goutte en fonction de $\eta, \eta_0, R, T, n_0, M_{\mathrm{H_2O}}, \rho_0$ et $P_{\mathrm{sat}}(T)$. Montrer alors que la sursaturation à l'équilibre satisfait l'équation suivante :

$$f(\eta, n_0) = (\eta_0 - \eta)^{1/3} - \frac{a n_0}{\ln(\eta)} = 0$$

On exprimera la constante a en fonction de $R, T, M_{\mathrm{H_2O}}, \rho_0, \sigma$ et $P_{\mathrm{sat}}(T)$ et on justifiera que $f(\eta, n_0) \propto r - r_c$.

On cherche à résoudre cette expression par une méthode numérique. On suppose que la fonction `f(eta,n0)` a été définie préalablement dans Python, ainsi que sa dérivée par rapport à η, notée `derivee_f(eta,n0)`. On donne ci-dessous sa représentation graphique à $T = 300\,\mathrm{K}$ pour une sursaturation initiale $\eta_0 = 2$ et pour différentes valeurs de n_0 :



☐ **42** – Lorsque l'équation possède des solutions, laquelle des deux est stable et laquelle est instable ?

☐ **43** – Comment évolue la sursaturation à l'équilibre en fonction de la concentration n_0 en noyaux de condensation ? Expliquer ce résultat apparemment contr-intuitif et expliquer pourquoi il ne peut pas y avoir de condensation dans notre modèle si n_0 est trop élevé.

Méthode dichotomique

On propose pour commencer de résoudre l'équation à l'aide du code suivant :

```
eta_min = COMPLETER
eta_max = COMPLETER

precision = 0.01 #precision souhaitee

while eta_max-eta_min > precision :
    eta_m = (eta_max+eta_min)/2
    if f(eta_m,n0)*f(eta_min,r0)<0 :
        eta_max = eta_m
    else :
        eta_min = eta_m

print("eta_eq se situe entre",eta_min," et ",eta_max)
```

☐ **44** – Expliquer le fonctionnement du code. Proposer une valeur initiale pour `eta_min` et `eta_max` qui fonctionne pour toutes les valeurs de n_0 indiquées sur la figure (sous réserve qu'une solution existe).

Méthode de Newton

En pratique, la méthode dichotomique a une convergence très lente lorsque l'on souhaite une bonne précision. On privilégie en général la méthode de Newton, et on utilise la suite $eta_{n+1} = eta_n - \dfrac{f(\eta_n)}{f'(\eta_n)}$, fabriquée à partir de la fonction f et de sa dérivée f (dérivée prise par rapport à η), dont on admet qu'elle converge vers un zéro de la fonction f qui est la valeur de η recherchée.

☐ **45** – À l'aide d'une représentation graphique la plus complète possible, illustrer quelques étapes du principe de convergence de la suite η_n vers un zéro de la fonction f.

On utilise la fonction suivante :

```
def cherche_eta(valeur_initiale,precision):
    eta = valeur_initiale
    [instruction1]
    while residu > precision:
        eq = [instruction2]
        deq = [instruction3]
        eta_old = eta
        eta = eta - eq/deq
        residu = [instruction4]
    return eta
```

☐ **46** – Proposer les quatre instructions à insérer pour le bon fonctionnement du code. Proposer une valeur pour `valeur_initiale`.