

Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

à rendre pour le 20 novembre 2025

Physique Chimie

DM 8

Détection des ondes gravitationnelles (Adapté de ENS PSI 2017)

La relativité générale prévoit l'existence d'ondes gravitationnelles émises par des corps massiques accélérés. L'amplitude de cette onde est extrêmement faible mais est d'autant plus grande que les corps impliqués possèdent des masses importantes. Il faut donc se tourner vers le cosmos pour espérer détecter le rayonnement gravitationnel. On peut donner l'exemple de deux événements produisant des ondes gravitationnelles d'amplitudes remarquables :

- l'effondrement gravitationnel d'une étoile en fin de vie conduisant à la création d'un supernovæ ;
- la coalescence de deux étoiles à neutrons ou de deux trous noirs.

Les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière en perturbant la géométrie de l'espace-temps perpendiculairement à la direction de propagation. Ainsi, la distance entre deux masses situées dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde est modifiée à son passage. Les longueurs suivant les axes orthogonaux (Ox) et (Oy) sont modifiées de la même valeur relative $h(\vec{r}, t)$ mais de signe opposé (voir figure). Par exemple, une longueur ℓ va varier d'une petite quantité $\delta\ell = h \times \ell$.

Cette variation relative pour une onde se propageant selon l'axe (Oz) s'écrit :

$$h(z, t) = h_1 \cos(2\pi f_{OG}(t - z/c)) \quad (1)$$

avec $h_1 \approx 10^{-21}$ au voisinage de la Terre pour les événements cosmiques présentés précédemment. La détection directe d'ondes gravitationnelles annoncée le 11 février 2016 a été réalisée à l'aide d'un détecteur interférométrique. Celui-ci est fondé sur la notion d'interférences lumineuses. La géométrie du système de détection suit celle d'un interféromètre de Michelson.

Une unique source laser de longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 1064\text{nm}$ est dirigé vers une lame séparatrice semi-réfléchissante inclinée à 45° qui distribue la moitié de la puissance dans deux directions $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. On appelle bras les parties du montage

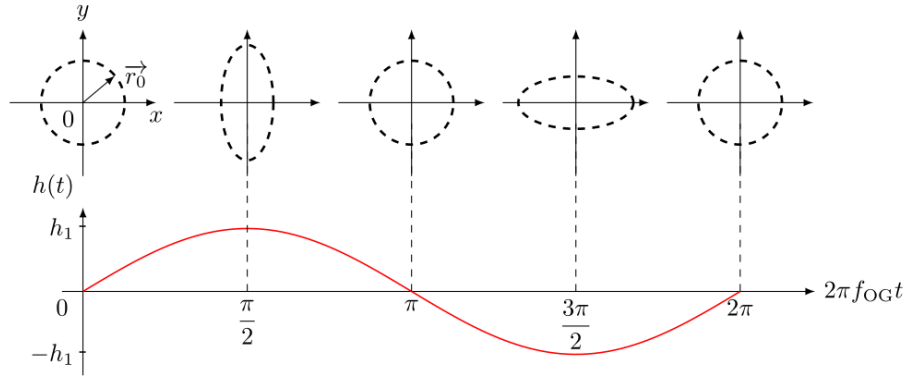


Figure 1: Effet d'une onde gravitationnelle sur unede l'instrument est asservi assemblée de particules ponctuelles disposées en cercle en fonction du temps.

correspondantes de longueur respective L_1 et L_2 (voir figure). Chacun des bras est terminé par un miroir de très haute réflectivité qui renvoie la lumière vers la lame séparatrice. Un détecteur en sortie permet d'observer la combinaison des ondes lumineuses provenant des deux bras de l'interféromètre.

La différence de parcours de la lumière dans chacun des deux bras est à l'origine des interférences lumineuses observées au niveau du détecteur. En effet les deux ondes débouchent du système avec des phases différentes dues à la différence de distance parcourue ce qui est de nature à provoquer des interférences.

1 Principe de fonctionnement

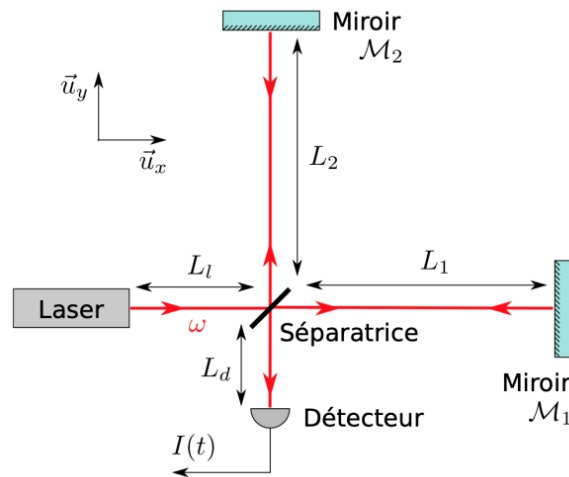


Figure 2: Interféromètre de Michelson

Une version simple de l'interféromètre de Michelson est présentée sur la figure ci-dessus avec ses notations. On décrit la source laser par une onde plane progressive harmonique

dont l'amplitude instantanée complexe est :

$$\underline{s}(\vec{r}, t) = s_0 e^{j(\omega t - n \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2)$$

avec n l'indice du milieu traversé et $\|\vec{k}\| = \omega/c$. Le vecteur d'onde $\vec{k}$ est dirigé selon $\vec{u}_x$ en sortie du laser et dans le bras de longueur L_1 , et selon $\vec{u}_y$ dans le bras de longueur L_2 et à l'arrivée sur le détecteur. On définit les coefficients complexes de réflexion r et de transmission t par :

$$\underline{s}_r = r \underline{s}_i \quad \text{et} \quad \underline{s}_t = t \underline{s}_i \quad (3)$$

avec s_i, s_r et s_t les amplitudes complexes des ondes incidente, réfléchie et transmise. Pour la lame séparatrice, on note r_s (respectivement t_s) le coefficient de réflexion (respectivement de transmission). Les coefficients de réflexion des miroirs $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont $r_1 = r_2 = -1$.

□ **1** – Écrire l'expression de l'amplitude instantanée complexe $\underline{s}_1$ reçue au niveau du détecteur pour la partie du faisceau ayant réalisé un aller-retour dans le bras de longueur L_1 depuis la source du laser. Faire de même pour la seconde partie du faisceau (amplitude $\underline{s}_2$). Comme sur le schéma, on notera L_1 et L_d les distances respectives du laser et du détecteur au centre de la lame séparatrice et on suppose que $\vec{r} = \vec{0}$ au niveau du laser. Montrer que la différence de phase entre les ondes $\underline{s}_1$ et $\underline{s}_2$ est :

$$\Delta\phi = 2nk(L_1 - L_2) \quad (4)$$

□ **2** – Sur un schéma, représenter deux ondes de longueur d'onde λ_0 déphasées de $\Delta\phi = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, puis leur somme. Faire de même pour deux ondes déphasées de $\Delta\phi = (2p + 1)\pi$. Indiquer dans quels cas, on a des interférences constructives ou destructives.

□ **3** – L'intensité optique mesurée sur le détecteur est $I = \langle |\underline{s}_{tot}|^2 \rangle_\tau$, où les chevrons $\langle \cdot \rangle_\tau$ représentent la moyenne temporelle sur un temps $\tau \gg 1/\omega$. Sachant que $\underline{s}_{tot} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$, montrer que :

$$I = I_0 \cos^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right) = I_0 \cos^2(nk(L_1 - L_2)) \quad (5)$$

avec I_0 que l'on déterminera.

En l'absence d'onde gravitationnelle, on note respectivement L_1^0 et L_2^0 les longueurs des bras de l'interféromètre alignés selon les axes x et y . À la suite du passage d'une onde gravitationnelle $h(t)$, les longueurs des bras sont modifiées respectivement de $\delta L_1(t)$ et $\delta L_2(t)$ de telle sorte que :

$$L_1(t) = L_1^0 + \delta L_1(t) \quad \text{et} \quad L_2(t) = L_2^0 + \delta L_2(t) \quad (6)$$

La longueur des bras de l'instrument est asservie de façon à ce que $nk(L_1^0 - L_2^0) = \frac{\phi_0}{2}$ avec ϕ_0 une phase dont on déterminera la valeur optimale à la question 5.

□ 4 – On pose $d = L_1 - L_2$ et $\delta d = \delta L_1 - \delta L_2$. Montrer que l'intensité en sortie de l'interféromètre est :

$$I = I_0 \cos^2 \left(nk\delta d + \frac{\phi_0}{2} \right) \quad (7)$$

□ 5 – Linéariser cette expression en supposant que $\delta d \ll \lambda_0$ et montrer que la variation d'intensité δI due au passage de l'onde gravitationnelle s'écrit :

$$\delta I = -I_0 nk\delta d \sin(\phi_0) \quad (8)$$

Pour quelles valeurs de ϕ_0 cette variation d'intensité est-elle maximale ? À la lumière de vos réponses à la question 2, comment est donc réglé l'interféromètre au repos ?

□ 6 – On pose $L_0 = (L_1^0 + L_2^0)/2$. À l'aide du texte d'introduction, relier la différence de longueur maximale entre les deux bras lors du passage d'une onde gravitationnelle δI_{max} à I_0, k, h_1, n et L_0 .

□ 7 – Pour le détecteur Virgo situé en Italie, les bras mesurent 3 km au repos. Pourquoi utiliser un interféromètre si grand ? Donner un ordre de grandeur de δd_{max} et $\delta I_{max}/I_0$. On prendra $n = 1$. Vérifier l'approximation $\delta d_{max} \ll \lambda_0$ et commenter la valeur de $\delta I_{max}/I_0$. La détection d'onde gravitationnelle est-elle réalisable ?

2 Prise en compte des réflexions multiples (difficile)

D'après les résultats précédents sur l'interféromètre de Michelson simple, la sensibilité de détection des ondes gravitationnelles est limitée par la taille des bras de l'instrument. Or construire des bras de longueur bien supérieure à 3 km représente un défi technologique, géographique et financier bien trop important, à moins d'aller dans l'espace. Pour contourner ce problème les scientifiques ont eu l'idée d'ajouter au dispositif deux cavités Fabry-Pérot symbolisées sur la figure suivante par deux paires de miroirs. Dans ces cavités la lumière réalise plusieurs aller-retours et augmente ainsi artificiellement son temps de parcours.

Dans les questions suivantes, nous allons donc étudier une cavité Fabry-Pérot comme décrite sur la partie droite de la figure. Un miroir $\mathcal{M}'_i$ semi-réfléchissant de coefficients de réflexion r'_i et de transmission t'_i est placé en vis-à-vis du miroir $\mathcal{M}_i$ de réflectivité supposée parfaite ($r_i = -1, t_i = 0$), à une distance L_i . On admettra que pour une onde venant de la gauche, au niveau de $\mathcal{M}'_i$ on a $r'_i > 0$ réel et pour une onde venant de la droite le coefficient de réflexion vaut $-r'_i$.

L'onde incidente est une onde plane monochromatique progressive notée s_{inc} avec les mêmes conventions que précédemment. On note s_p la p -ième onde émergeant du dispositif, déphasée par rapport au champ incident après p allers-retours à l'intérieur de la cavité, tel que sur la figure. L'indice optique dans la cavité vaut n . Dans les questions suivantes, on s'intéresse à la cavité Fabry-Pérot situé dans le bras $i = 1$.

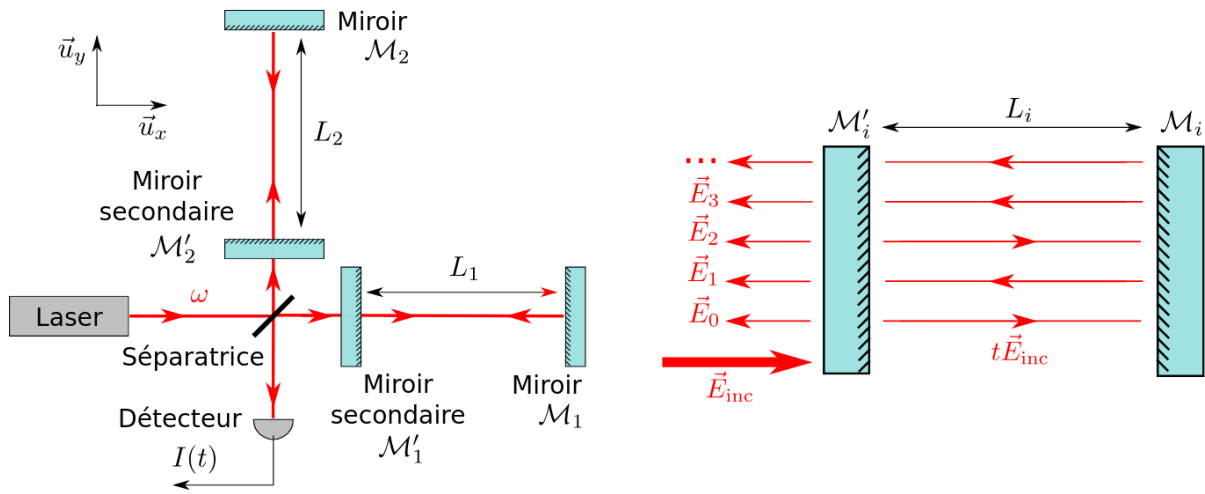


Figure 3: Gauche : interféromètre de Michelson avec cavités Fabry-Pérot. Droite : étude d'une cavité Fabry-Pérot.

□ 8 – Ecrire l'onde $\underline{s}_0$ en fonction de $\underline{s}_{inc}$, puis $\underline{s}_1$ en fonction de $\underline{s}_{inc}$, L_1 la longueur de la cavité sur le bras 1 et des coefficients de réflexion et de transmission. Déterminer l'onde $\underline{s}_p$ en fonction de $\underline{s}_{p-1}$ pour $p \geq 2$. En déduire l'expression de $\underline{s}_p$ en fonction de $\underline{s}_{inc}$ pour $p > 1$.

□ 9 – L'onde totale émergente de la cavité 1 est $\underline{s}'_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \underline{s}_p$. Montrer que :

$$\underline{s}'_1 = \frac{r'_1 - e^{-2jnkL_1}}{1 - r'_1 e^{-2jnkL_1}} \underline{s}_{inc} \quad (9)$$

On admettra que $(t'_1)^2 + (r'_1)^2 = 1$.

□ 10 – On pose R_1 tel que $\underline{s}'_1 = R_1 \underline{s}_{inc}$. Montrer que $|R_1|^2 = 1$ pour toute longueur L_1 . Qu'est-ce que cela signifie physiquement ?

□ 11 – On dit que la cavité Fabry-Pérot est accordée lorsque $nkL_1^0 = p_1\pi$ avec $p_1 \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour une cavité accordée :

$$R_1 \approx -\frac{1 - r'_1 - 2jnk\delta L_1}{1 - r'_1 + 2jnk r'_1 \delta L_1} \quad (10)$$

avec $\delta L_1 \ll \lambda$. On rappelle qu'on a défini précédemment $L_1 = L_1^0 + \delta L_1$ avec δL_1 la variation de longueur due au passage d'une onde gravitationnelle.

□ 12 – Calculer $\phi'_1 = \text{Arg}(R_1)$ et montrer que la différence de phase au niveau du détecteur $\Delta\phi = \phi'_1 - \phi'_2 + \phi_0$ vaut :

$$\Delta\phi' = -\frac{1 + r'_1}{1 - r'_1} 2nk\delta d + \phi_0 \quad (11)$$

avec ϕ'_2 le résultat obtenu pour ϕ'_1 mais transposé à la cavité 2 de longueur L_2 (avec $r'_1 = r'_2$).

□ **13** – Pour l'interféromètre Virgo, $r'_1 = 0.98$. Donner un ordre de grandeur de $\Delta\phi' - \phi_0$. L'interféromètre de Michelson muni de deux cavités Fabry-Pérot se comporte comme un interféromètre simple mais avec une longueur de bras bien supérieure. Évaluer la longueur effective de ces bras et commenter l'utilité de ce dispositif.