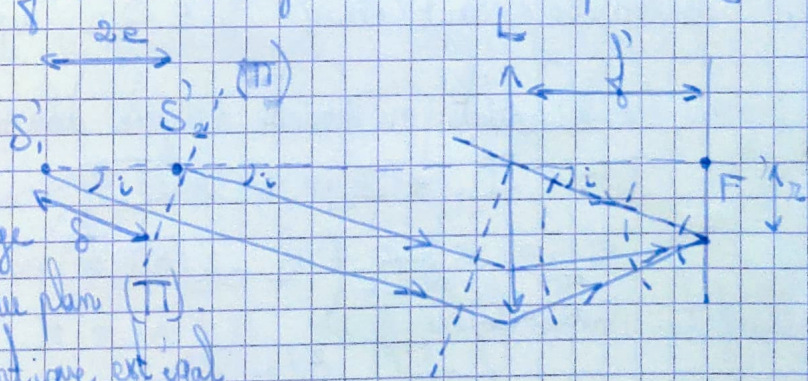


Correction - TD 9 Interféromètre de Michelson

I - Le Michelson en lame d'air

1 - Anneaux d'égalé inclinaison

1. On veut une configuration en lame d'air, donc on place les miroirs perpendiculaires l'un par rapport à l'autre.
2. Pour observer les interférences les plus contrastées il faut se placer au lieu de localisation des interférences, c'est-à-dire à l'infini. On place donc l'écran dans le plan focal image de L .
3. L'interféromètre est équivalent à deux sources séparées d'une distance $2e$, en faisant l'image de la source primaire par les miroirs:



On cherche le déphasage δ des ondes au niveau du plan (II).

Ensuite, les chemins optiques est égal par principe de retour inverse de la lumière.

On remarque que :
$$\delta = 2e \times \cos i$$

4. On trace le rayon parallèle aux rayons émergent des sources secondaires fictives et passant par le centre de la lentille.

On voit donc que : $\cos i = \frac{r}{f} \Rightarrow \boxed{r = f \cos i}$

5. Il faut prendre $f = 1 \text{ m}$ car $r \propto f$
6. On a au centre de l'écran : $\delta = 2e = 10 \mu\text{m}$
Soit une ordre $p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{10}{0.6} = 16,7$.

Les anneaux brillants s'observent pour p entier c'est-à-dire lorsque $p \in [0, 16]$ ici ; l'anneau le plus proche du centre a donc $p=16$.

7. On a vu $r = f \cdot \tan i$ et $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i$.
Pour les premiers anneaux on peut supposer i petit, alors :

$$\tan i \approx i \quad \cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2}$$

$$\text{Et en notant } p_0 = \frac{2e}{\lambda} = 16,7 \text{ on a } i = \sqrt{2(1 - \frac{p}{p_0})}$$

$$\text{D'où : } r_p = f \sqrt{2(1 - \frac{p}{p_0})} \quad \text{AN : les trois premiers anneaux}$$

sont $p=16$, $p=15$ et $p=14$, alors :

$$r_{16} = 28,3 \text{ cm}$$

$$r_{15} = 44,7 \text{ cm}$$

$$r_{14} = 56,6 \text{ cm}$$

2 - Mesure de l'accélération de la pesanteur

Le détecteur mesure l'éclairement sur l'axe optique, la différence de marche vaut alors $\delta = 2e$ avec en chute libre : $\frac{d^2e}{dt^2} = g$

1. l'éclairement au point C est donné par :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right) \quad (\text{formule de Fresnel})$$

$$\stackrel{(I_1=I_2=I_0)}{=} 2I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)\right)$$

$$= 4I_0 \cos^2\left(\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

$$\text{Alors : } I = 0 \Leftrightarrow \pi \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{\lambda}{2}(2p+1) \quad p \in \mathbb{N}$$

$$\text{Mais } \delta = 2e = \frac{2gt^2}{2} = gt^2 \quad \text{donc :}$$

$$2gt_p^2 = \lambda(2p+1)$$

On mesure :

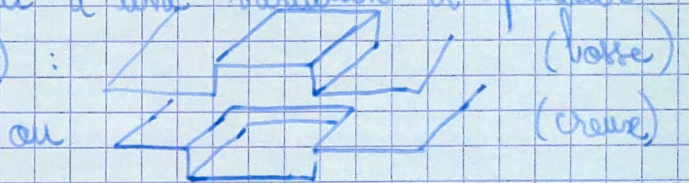
p	0	1	2	3	4	5
$t_p(\text{ms})$	0,18	0,32	0,4	0,47	0,53	0,60

On fait une régression linéaire de $\lambda(2p+1)$ en fonction de $2t_p^2$ et on trouve $g = 9,89 \text{ m.s}^{-2}$ soit assez proche de la valeur tabulée.

II - Coin d'air

3 - Défaut d'un miroir

1. Le défaut est présent là où les franges sont décalées.
Puisque le décalage des franges forme une marche, ceci indique que le défaut a une variation d'épaisseur uniforme (il est "plat") :



On ne peut pas savoir si on a une bosse ou un creux car on ne sait pas si les miroirs sont inclinés vers gauche ou la droite de la figure observée.

2. Il faut augmenter l'interfrange sur la figure d'interférences ce qui peut se faire :

- * en augmentant le grandissement (bouger la lentille)
- * en augmentant la longueur d'onde (prendre un laser rouge)
- * en diminuant l'angle entre les miroirs

3. On sait qu'en coin d'air $\delta = 2\alpha x \approx \alpha x$.

On a aussi $\delta = \lambda \times p$ où p est l'ordre d'interférence.

Ainsi : $\lambda p = 2\alpha \cdot x$ hors du défaut.

(D'où l'interfrange i tel que $2\alpha i = \lambda \Leftrightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha}$.)

Au niveau du défaut il y a un déphasage supplémentaire de

$$p = \frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ cm}} = 0,1 \text{ soit } \delta = 0,1 \lambda = 53,2 \text{ nm.}$$

Or $\delta = 2 \cdot e$ où e est la profondeur du défaut.

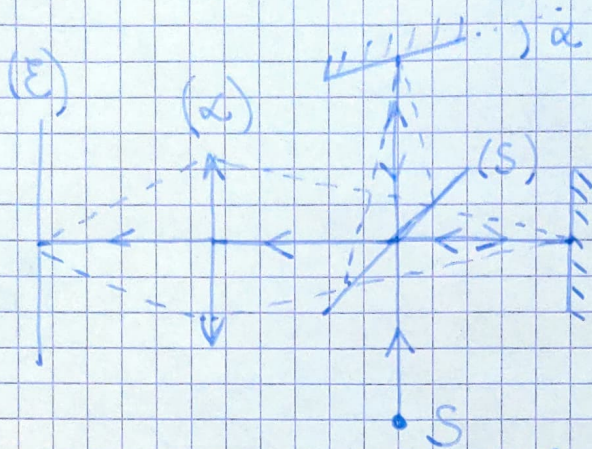
$$\text{Donc } e = \frac{\delta}{2} = 26,6 \text{ nm}$$

4. Dans ce cas on a $2e_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{2}$ soit $e_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{4} = 53,2 \text{ nm}$

4 - Mesure de l'indice optique d'un gaz

1. On met un petit angle α entre les miroirs et on fait

l'image des miroirs sur l'écran :



2. Les franges sont observables sur les miroirs. Elles sont dites localisées car si on se place ailleurs on a une perte de contraste, des franges d'interférence n'ont pas une source étendue.

3. La distance lentille - écran doit être égale, au moins à $4f'$ ce qui exclut $f' = 1\text{ m}$. On veut une lentille convergente donc il faut choisir entre 5 cm et 20 cm.

Notons $D = 2\text{ m}$ la distance miroir - écran et x la distance miroir - lentille alors :

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} = \frac{1}{f'}$$

$$D'où \quad x^2 - Dx + f'D = 0 \quad \Delta = D^2 - 4Df' = D(D - 4f')$$

Et on choisit la plus petite solution pour maximiser le

$$\text{grandissement : } x = \frac{1}{2} \left(D - \sqrt{D(D - 4f')} \right) = \frac{D}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4f'}{D}} \right)$$

$$\text{On trouve : } \begin{cases} x = 5,1 \text{ cm} & \text{si } f' = 5 \text{ cm} \\ x = 22,5 \text{ cm} & \text{si } f' = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

La première solution est impossible au vu de la taille d'un Michelson donc on prend $f' = 20\text{ cm}$ et $x = 22,5\text{ cm}$.

4. On constate que les franges sont décalées de $\frac{1}{2}$ ordre au niveau du maximum de décalage, pour lequel la différence de marche vaut $\delta = 2(n_{\text{verre}} - n_{\text{air}}) \times d$ diamètre de la tige

$$\text{On } \delta = \lambda \text{ donc : } n_{\text{verre}} - n_{\text{air}} = \frac{\lambda}{2d} = \boxed{3,2 \cdot 10^{-4}}$$

III - Cohérence

5 - Tomographie par cohérence optique

1. a. L'onde de référence a parcouru un chemin optique
 $(SL_2) = L + \frac{\lambda}{2} + L + h + \frac{\lambda}{2} = \lambda + 2L + h$
reflexions

D'où: $\frac{1}{2} \delta_1 = \frac{1}{2} A_0 \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (L + \lambda + h) \right) \right]$

b. Et on a:

$$(SL_2)_1 = \frac{\lambda}{2} + d + \frac{\lambda}{2} + d + h = \lambda + 2d + h$$

$$(SL_2)_2 = \frac{\lambda}{2} + d + ne + \frac{\lambda}{2} + ne + d + h = \lambda + 2d + 2ne + h$$

Ainsi:

$$\delta_1 = \frac{1}{4} A_0 \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (2d + \lambda + h) \right) \right]$$

$$\delta_2 = \frac{1}{4} A_0 \exp \left[j \left(\omega t - \frac{\omega}{c} (2d + 2ne + \lambda + h) \right) \right]$$

c. La lentille ne change rien car elle conjugue l'infini et l'écran, et on peut écrire par principe de superposition:

$$\begin{aligned} \delta_{tot} &= \delta_1 + \delta_2 \\ &= \frac{A_0}{4} e^{j\omega(t - \frac{2d + \lambda + h}{c})} \left[e^{-2ne j \frac{\omega}{c}} + 1 + 2e^{-j \frac{\omega}{c} ne} \right] \end{aligned}$$

$$d. I = \langle \delta_{tot}^2 \rangle = \frac{A_0^2}{16} \left[1 + 4 + 1 + 2 \cos\left(\frac{2\omega}{c} ne\right) + 2 \cos\left(\frac{2\omega}{c} (L - ne)\right) + 4 \cos\left(\frac{2\omega}{c} (L - ne)\right) \right]$$

$$I_{tot} = \frac{I_0}{8} \left[3 + \cos\left(\frac{4\pi ne}{\lambda}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi L}{\lambda}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi (L - ne)}{\lambda}\right) \right]$$

On a trois termes d'interférences, les termes constants en revanche s'ajoutent pour former un terme d'intensité moyenne.

e. On a $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

Donc on peut écrire:

$$I_{\text{tot}} = \frac{I_0}{8} \left[3 + \cos\left(\frac{4\pi n e}{\lambda}\right) + 4 \cos\left(\frac{4\pi n e}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(2l - n e)\right) \right]$$

$$= \frac{3}{8} I_0 + \frac{I_0}{8} \cos\left(\frac{4\pi n e}{\lambda}\right) \left[1 + 4 \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}(2l - n e)\right) \right]$$

terme sinusoïdal en fonction de l

2. a. Pour que les termes soient contrastés, il faut $\delta < l_c$
la longueur de cohérence de la source soit :

* $\delta = 2n e < l_c$ pour le 1^{er} terme

* $|2l| < l_c$ pour le 2^e terme

* $|2l - n e| < l_c$ pour le 3^e terme

} termes responsables
des oscillations en fonction de l

b. En supposant qu'on voit des interférences si au moins un des termes 2 et 3 est contrasté, ces interférences disparaissent lorsque

$$l \geq \frac{l_c}{2} \quad \text{ou} \quad l \leq -\frac{l_c}{2} \quad \text{2^e terme}$$

$$l \geq \frac{l_c}{2} + n e \quad \text{ou} \quad l \leq -\frac{l_c}{2} + n e \quad \text{3^e terme}$$

Donc on observe des franges pour :

$$-\frac{l_c}{2} \leq l \leq \frac{l_c}{2} + n e$$

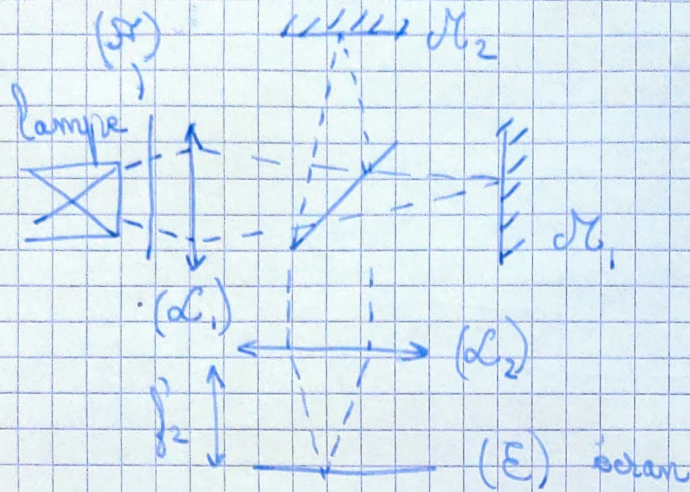
c. En mesurant la taille de cette plage, on en déduit $l_c = n e$. Connaissant Δv , on peut alors remonter à l_c ($l_c = c t_c = \frac{c}{\Delta v}$) et on en déduit e .

Si la source est large spectalement, l_c sera plus petit donc $\frac{n e}{l_c}$ sera plus grand et on diminuera l'incertitude relative de la mesure.

IV - Spectroscopie

6 - Raie verte du mercure

1. On place une lentille pour observer les anneaux



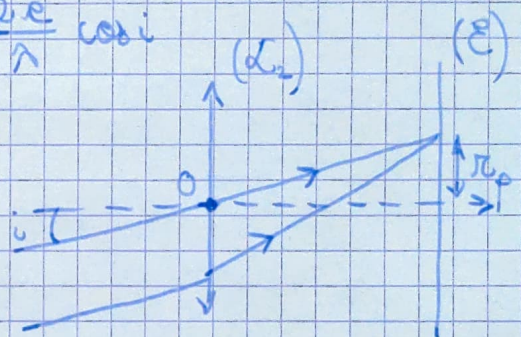
(F) : filtre

----- rayons particuliers indiquant la configuration choisie pour (L_1) et (L_2)

2. La différence de marche vaut : $\delta = 2e \cos i$

On en déduit : $\rho = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \cos i$

3. On peut tracer le trajet de deux rayons qui interfèrent à l'infini arrivant sur (L_2) .



On aura : $x_p = f_2 \times \tan i$

Dans l'approximation des petits angles : $\begin{cases} \tan i \approx i \\ \cos i \approx 1 - \frac{i^2}{2} \end{cases}$

D'où : $\rho \approx \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{x_p^2}{2f_2^2}\right)$

4. On a un nombre d'anneaux brillants tel que $\rho_{\max} = \left\lfloor \frac{2e}{\lambda} \right\rfloor$

et $\rho_{\min} = \left\lfloor \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{R^2}{2f_2^2}\right) \right\rfloor$ d'où :

$$N = \left\lfloor \frac{2e}{\lambda} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{R^2}{2f_2^2}\right) \right\rfloor + 1$$

Si $\frac{2e}{\lambda} \gg 1$ alors $N \approx \frac{eR^2}{\lambda f_2^2}$

5. On a plus d'anneaux visibles donc on a caractérisé en augmentant l'épaisseur e de la lame d'air.

Or : $x_p^2 = 2f_2^2 \left(-\frac{\lambda \rho}{2e} + 1\right)$ donc si e augmente

x_p augmente : les anneaux se sont déplacés vers l'extérieur.

6. On a $\Delta v \cdot \Delta t = 1 \Leftrightarrow \Delta v \times T_c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{c}{\Delta v}$

Or : $v = \frac{c}{\lambda}$ donc $\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$ et :

$$\Delta \nu \sim \frac{\nu}{\lambda} \Delta \nu \sim \frac{c}{\lambda^2} \Delta \lambda.$$

$$\text{Ainsi: } L_c = \frac{c}{\Delta \nu} = \boxed{\frac{\lambda^2}{\Delta \lambda}}.$$

Ici on mesure $L_c \approx 4 \text{ mm}$.

$$\text{D'où: } \Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{L_c} \sim \boxed{7 \cdot 10^{-11} \text{ m}}. \quad \text{On voit bien qu'il s'agit d'une raie très fine.}$$

7- Doublet du sodium

1. On a $\mu = \frac{\delta}{\lambda_m} = \frac{2d\alpha}{\lambda_m}$ en supposant que les miroirs sont au contact optique. On observe donc des franges rectilignes.
2. Comme on a deux raies, on a une perte de contraste par perte de cohérence temporelle. Cette observation indique que la longueur de cohérence (longueur des trains d'onde) est de l'ordre de $L_c = 0,15 \text{ mm}$.
3. On a deux longueurs d'onde distinctes et on suppose les rayonnements émis à chaque longueur d'onde incohérents. Alors on peut sommer les éclaircissements de chaque raie, avec:

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \frac{I_0}{2} + \frac{I_0}{2} + 2\sqrt{\frac{I_0}{2}\frac{I_0}{2}} \cos\left(2\pi \cdot \frac{\delta}{\lambda \pm \frac{\Delta \lambda}{2}}\right) \\ &= I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda \pm \frac{\Delta \lambda}{2}}\right) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} \left(1 \pm \frac{\Delta \lambda}{2\lambda}\right)\right) \right] \quad \text{car } \Delta \lambda \ll \lambda \end{aligned}$$

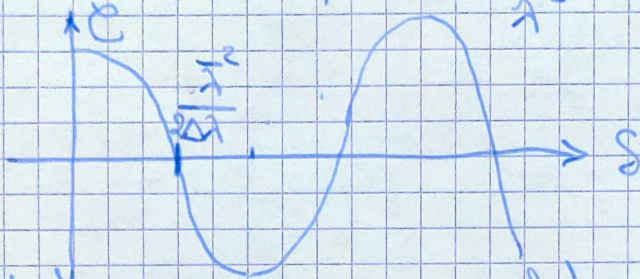
Ainsi:

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= I_+ + I_- = I_0 \left[2 + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} \left(1 + \frac{\Delta \lambda}{2\lambda}\right)\right) + \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda} \left(1 - \frac{\Delta \lambda}{2\lambda}\right)\right) \right] \\ &= 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi \delta \Delta \lambda}{\lambda^2}\right) \cos\left(\frac{2\pi \delta}{\lambda}\right) \right] \end{aligned}$$

Le terme de contraste est alors donné par:

$$C = \cos\left(\frac{\pi S \Delta\lambda}{\lambda^2}\right) = \cos\left(\frac{\lambda \Delta\lambda}{\lambda^2} \times (2\alpha x + 2d)\right).$$

On a perte de contraste pour $\frac{\pi S \Delta\lambda}{\lambda^2} = k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$:



On en déduit qu'à la première annulation de contraste:

$$2d = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4d} = 0,58 \text{ nm}.$$

4. On peut retrouver cette formule en remarquant que la perte de contraste correspond à une variation d'ordre d'interférence

$$\Delta p = \frac{1}{2} \text{ soit } |p_+ - p_-| = \frac{1}{2} \text{ ou encore:}$$

$$S \left(\frac{1}{\lambda_-} - \frac{1}{\lambda_+} \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2d \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4d}.$$

On retrouve la formule précédente (bien plus rapidement!)

5. La longueur de cohérence est la longueur au-delà de laquelle on a bavillonnage. Ici $L_c = S$ (1^{er} bavillonnage)

$$= 2d = \boxed{0,3 \text{ mm}}$$

$L_c \gg \lambda$ ce qui montre que les raies sont très proches l'une de l'autre.

8 - Largeur spectrale d'un filtre

1. L'interféromètre étant réglé en lame d'air on se place à l'infini et on prend un écran situé dans le plan focal image de la lentille. On observe des anneaux centrés sur l'axe optique.

2. On a $\delta = 2e \cos i$ (formule générale)
 Ici $i=0$ car le détecteur est sur l'axe optique
 et $e = v_0 t$ donc $\delta_0 = 2v_0 t$.

3. On utilise la formule de Fresnel avec $I_1 = I_2 = \frac{dI_0}{2}$
 et $\Delta\varphi = 2\pi \frac{\delta_0}{\lambda} = 2\pi \frac{v}{c} \cdot \delta_0$. Alors:

$$dI(D) = \frac{dI_0}{2} + \frac{dI_0}{2} + 2\sqrt{\frac{dI_0}{2} \cdot \frac{dI_0}{2}} \cos\left(2\pi \frac{v}{c} \cdot \delta_0\right)$$

$$dI(D) = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi v}{c} v_0 t\right)\right).$$

4. Ces ondes sont incohérentes car elles n'ont pas même fréquence.
 On peut donc sommer toutes les intensités:

$$\begin{aligned} I(D) &= \int_{v_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} dI(D) = \int_{v_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} A d\nu \left[1 + \cos\left(\frac{4\pi\nu}{c} v_0 t\right)\right] \\ &= A \Delta\nu + \frac{Ac}{4\pi v_0 t} \left[\sin\left(\frac{4\pi\nu}{c} v_0 t\right) \right]_{v_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{v_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \quad \text{sinc - king} \\ &= A \Delta\nu + \frac{2Ac}{4\pi v_0 t} \times \sin\left(\frac{4\pi v_0}{c} v_0 t\right) \sin\left(\frac{2\pi \Delta\nu}{c} v_0 t\right) \quad 2\sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2} \\ \boxed{I(D) = I_0 \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{2\pi \Delta\nu}{c} v_0 t\right) \sin\left(\frac{4\pi v_0}{c} v_0 t\right)\right]} \end{aligned}$$

où on a utilisé $I_0 = A \Delta\nu$ et $\text{sinc } x = \frac{\sin x}{x}$.

5. Le contraste vaut $C = \text{sinc}\left(\frac{2\pi \Delta\nu}{c} v_0 t\right)$ et s'annule la première fois pour $\frac{2\pi \Delta\nu}{c} v_0 t = \pi \Leftrightarrow \Delta\nu = \frac{c}{2v_0 t}$

$$\Leftrightarrow \Delta\nu = 6,8 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$$

Et on compte 10 oscillations en 2,2 ns soit:

$$\frac{2v_0}{c} v_0 t = 10 \Leftrightarrow v_0 = \frac{10c}{2v_0 t} = \boxed{6,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$\lambda_0 = \frac{c}{v_0} = \boxed{442 \text{ nm}} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{v_0} \Delta\nu = \boxed{44 \text{ nm}}$$

V - Lumière Blanche

9 - Mesure de l'épaisseur d'un film alimentaire

1. On a :
- * une lampe blanche
 - * une lentille faisant converger les rayons sur les miroirs
 - * les deux miroirs parallèles
 - * une 2^e lentille en sortie du Michelson, on place l'écran dans son plan focal image

On observe des anneaux de franges variées (franges de Newton)

2. Une fois qu'on a mis le film on n'est plus au contact optique. Certaines longueurs d'onde interfèrent constructivement et d'autres destructivement : on a un blanc d'ordre supérieur.

3. La différence de marche δ est telle qu'on a des interférences destructives pour cette longueur d'onde :

$$\delta = (2k+1) \times \frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{1}{\delta}$$

4. On ne connaît pas k précisément, mais on peut écrire $k = k_0 + k'$ avec $k_0 \in \mathbb{Z}$ inconnu et on mesure λ pour k' qui varie (λ diminue si k' augmente)

k'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lambda [\text{nm}]$	740	670	645	595	570	550	530	515	500	485

On a alors : $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\delta} \times k' + \frac{2k_0+1}{2} \times \frac{1}{\delta}$

On trace $\frac{1}{\lambda}$ en fonction de k' , on trouve $\frac{1}{\delta} = 7,6 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$

Or $\delta = 2ne \Leftrightarrow e = \frac{\delta}{2n} = \frac{1}{2n \cdot \frac{1}{\delta}} = \boxed{4,4 \mu\text{m}}$