

DM7 - Correction L'arc-en-ciel

1. Dans le plan d'incidence, on a un rayon réfléchi et un rayon réfracté. On a $n \sin r = \sin i$.

2. On peut remarquer que $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ (déviations à chaque dioptre rencontré) avec :

$$\Delta_1 = \Delta_3 = i - r \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \pi - 2r$$

D'où : $\Delta = \pi - 4r + 2i$

soit $\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin(x)$

(avec $i = \arcsin x$ et $r = \arcsin \frac{x}{n}$)

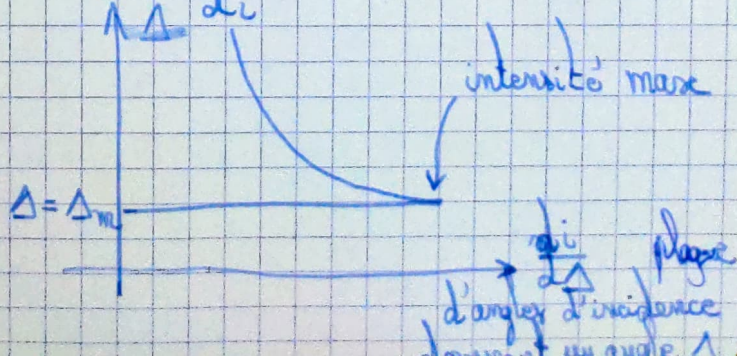
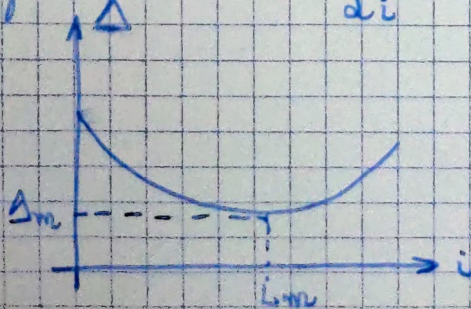
3. $\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{4}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Leftrightarrow 4(1 - x^2) = n^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4 - n^2 \Leftrightarrow$$

$$x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

4. Si on suppose que la lumière a la même probabilité d'arriver selon n'importe quel angle d'incidence, alors on aura plus de lumière dans une direction Δ pour laquelle de nombreuses valeurs de i donnent Δ , c'est-à-dire dans une direction pour laquelle, à Δ fixe, di est très grand $\Rightarrow \frac{d\Delta}{di} \ll 1$ soit $\frac{d\Delta}{di} = 0$.



DM7 - Correction L'arc-en-ciel

1. Dans le plan d'incidence, on a un rayon réfléchi et un rayon réfracté. On a $n \sin r = \sin i$.

2. On peut remarquer que $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3$ (déviation à chaque dioptré rencontré) avec :

$$\Delta_1 = \Delta_3 = i - r \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \pi - 2r$$

D'où : $\Delta = \pi - 4r + 2i$

soit

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) + 2 \arcsin(\sin i)$$

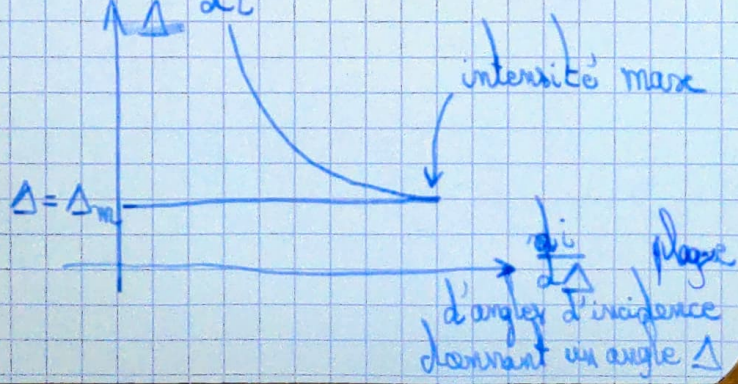
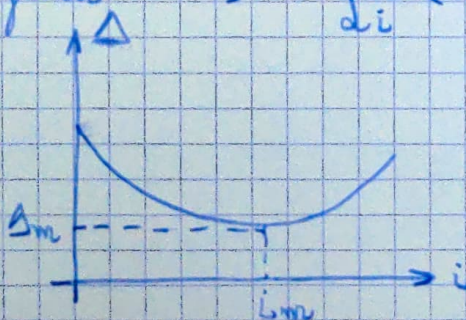
(avec $i = \arcsin x$ et $r = \arcsin \frac{x}{n}$)

3. $\frac{d\Delta}{dx} = -\frac{4}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$\frac{d\Delta}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n^2 - x_m^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^2}} \Leftrightarrow 1 + (1 - x_m^2) = n^2 - x_m^2$$

$$\Leftrightarrow 3x_m^2 = 4 - n^2 \Leftrightarrow x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

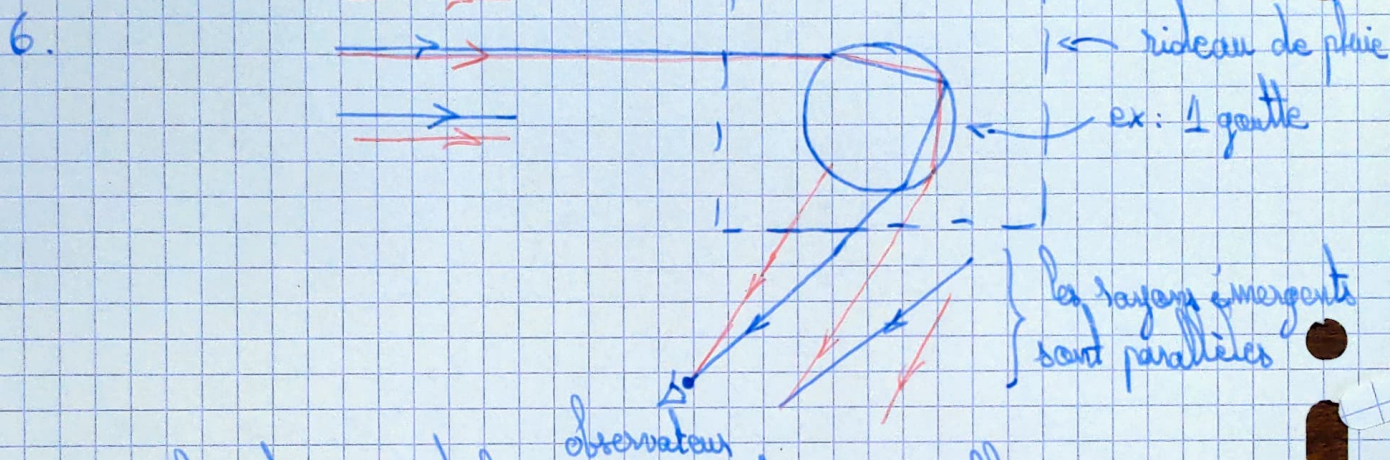
4. Si on suppose que la lumière a la même probabilité d'arriver selon n'importe quel angle d'incidence, alors on aura plus de lumière dans une direction Δ pour laquelle de nombreuses valeurs de i donnent Δ , c'est-à-dire dans une direction pour laquelle, à $d\Delta$ fixe, di est très grand $\Rightarrow \frac{d\Delta}{di} \ll 1$ soit $\frac{d\Delta}{di} = 0$.



5. $x_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ et $\Delta_m = \pi - 4 \arcsin \frac{x_m}{n} + 2 \arcsin x_m$

On trouve:

	x_m	Δ_m
Violet	0,8556	139,4°
Rouge	0,8624	137,5°



L'observateur voit le rouge au dessus du bleu.

II - Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel

7. On a $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi c}{\lambda_1} \sim \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{-7}} \sim \boxed{3 \cdot 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}$
(pour $\lambda = 600 \text{ nm}$)

8. Cela dépend du capteur utilisé, ici c'est l'œil donc $\boxed{Z \approx 1 \text{ ms}}$

9. On a par principe de superposition:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1 + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2 + \varphi_2)$$

Et:

$$I(P) = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle + 2 \langle x_1 x_2 \rangle$$

$$= I_1 + I_2 + a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 + \omega_2)t - (k_1 + k_2)x + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 x_1 - k_2 x_2) + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle$$

La première moyenne est toujours nulle, on a donc:

$$I(P) = I_1 + I_2 + a_1 a_2 \langle \cos((\omega_1 - \omega_2)t - (k_1 x_1 - k_2 x_2) + \varphi_1 - \varphi_2) \rangle$$

avec un terme d'interférences non nul si et seulement si $\omega_1 = \omega_2$

(ou plus précisément si $(\omega_1 - \omega_2) \tau \leq 1$)

10. Alors:

$$I(P) = I_1 + I_2 + a_1 a_2 \cos(k_1 x_1 - k_2 x_2)$$

Or $a_1 = \sqrt{I_1}$ $a_2 = \sqrt{I_2}$ et:

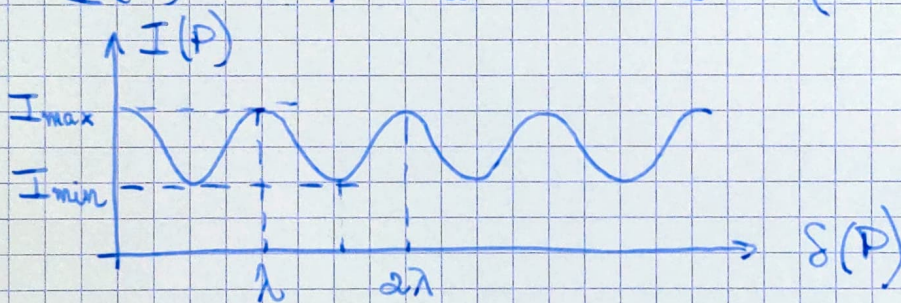
$$k_1 x_1 - k_2 x_2 = \frac{\omega}{c} (n_1 x_1 - n_2 x_2) = \frac{\omega}{c} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta$$

où $\delta = n_1 x_1 - n_2 x_2 = (S_1 P) - (S_2 P)$ est la différence de chemin optique entre les rayons.

Ainsi:

$$I(P) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

11.



On a des franges claires et sombres avec
$$\begin{cases} I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \\ I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \end{cases}$$

On constate sur la photo que $I_{\min} = 0$

Or $I_{\min} = (\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2$ donc $\boxed{I_1 = I_2}$ les deux sources ont même intensité.

12. Ces rayons interfèrent à l'infini car ils émergent parallèlement du système optique.

13. On verra des interférences constructives si $\exists p \in \mathbb{Z}, \delta = p\lambda$
Soit: $D(\cos i_2 - \cos i_1) - 2Dn(\cos r_2 - \cos r_1) = p\lambda$

$$\Leftrightarrow (\cos i_2 - \cos i_1) - 2n(\cos r_2 - \cos r_1) = \frac{p\lambda}{D}$$

$$\frac{p\lambda}{D} - \frac{(p-1)\lambda}{D} = \frac{\lambda}{D} \text{ et plus grand pour les petites gouttes donc}$$

pour ces gouttes on s'attend à avoir un écart angulaire plus

grand entre les franges.

14. On a alors $r_1 = \arcsin\left(\frac{\sin i_1}{n}\right) = 35,24^\circ$

$$r_2 = \arcsin\left(\frac{\sin i_2}{n}\right) = 44,19^\circ$$

Pour observer la frange d'ordre -2 il faut que :

$$-\frac{2\lambda}{D} = \cos i_2 - \cos i_1 - 2n(\cos r_2 - \cos r_1) = -0,177$$

$$\text{D'où : } D = \frac{2\lambda}{0,177} = \boxed{7,91 \mu\text{m}}$$

Cette valeur correspond au diamètre typique d'une gouttelette dans un nuage mais c'est un peu trop petit pour une goutte de pluie (plutôt 1 mm).