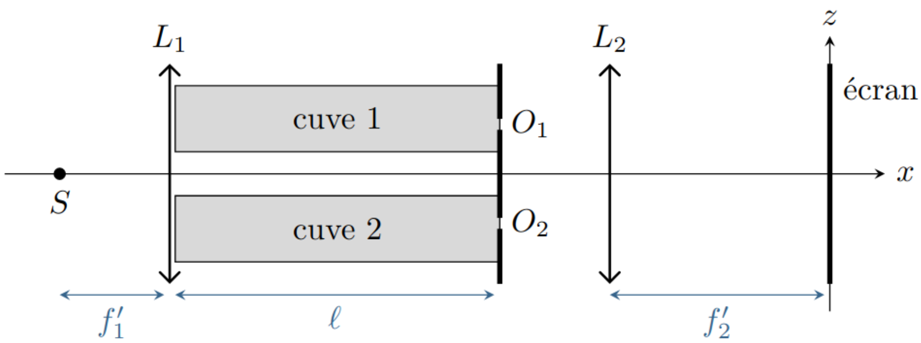
Interférences par division de front d'onde
Chapitre 10

I - Trous d'Young

1 Interféromètre de Rayleigh

L'interféromètre étudié dans cet exercice a été conçu à la fin du XIXe siècle par lord Rayleigh en vue de déterminer l'indice optique de gaz. Il est directement dérivé du dispositif des fentes d'Young. Une source primaire S monochromatique ($\lambda = 577\,\mathrm{nm}$) est placée au foyer objet d'une lentille L_1 et éclaire deux fentes O_1 et O_2 de grande dimension dans la direction (Oy) distantes de a. Les interférences sont observées dans le plan focal image d'une seconde lentille L_2. Deux cuves de même longueur $\ell = 20.0\,\mathrm{cm}$ contenant les gaz étudiés sont intercalées entre la lentille L_1 et les fentes.



1. Représenter sur le schéma les deux rayons qui interfèrent en un point de l'écran d'ordonnée z quelconque.

2. En notant n_1 et n_2 les indices des gaz contenus dans les cuves, déterminer la différence de marche $\delta(z)$.

3. Déterminer l'interfrange. Sa mesure peut-elle être utilisée pour déterminer les indices des gaz ?

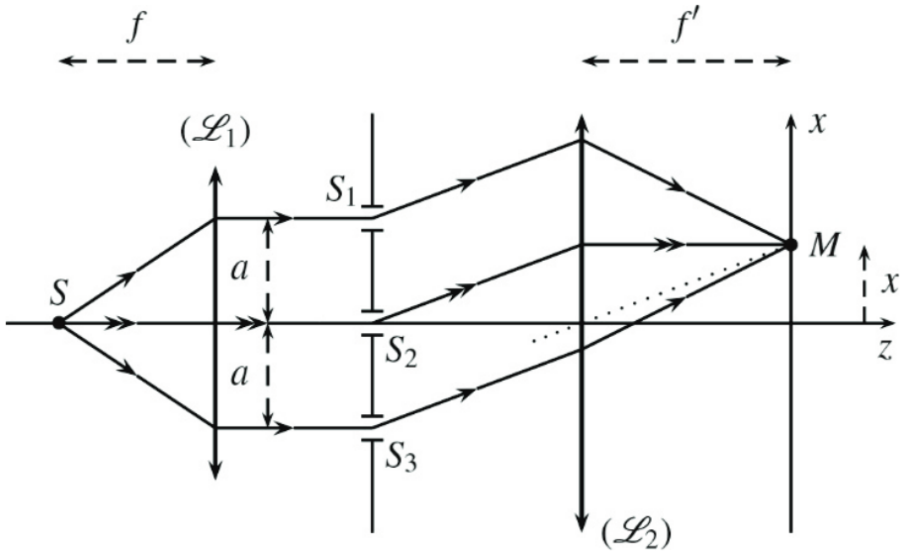
   Cet interféromètre peut être utilisé pour mesurer l'indice n_{air} de l'air. Pour cela, le vide est fait dans la cuve 2. On repère alors sur l'écran un point M où se trouve une frange brillante, puis on laisse la cuve 2 se remplir lentement d'air. Au cours de l'expérience, on observe alors le défilement en M de 101 franges brillantes, et en fin d'expérience la frange d'interférences y est sombre.

4. Que valent les indices n_1 et n_2 en début d'expérience ? en fin d'expérience ? Expliquer pourquoi les franges d'interférences semblent défiler en M pendant que la cuve se remplit.

5. En déduire l'indice n_{air} de l'air.

2 Trois trous d'Young

Trois trous d'Young S_1, S_2 et S_3, distants de a, sont éclairés par une source ponctuelle, émettant une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0, placée au foyer principal objet d'une lentille convergente L_1. On observe les interférences à l'infini, c'est-à-dire en un point M dans le plan focal d'une lentille convergente L_2 de distance focale image f'.

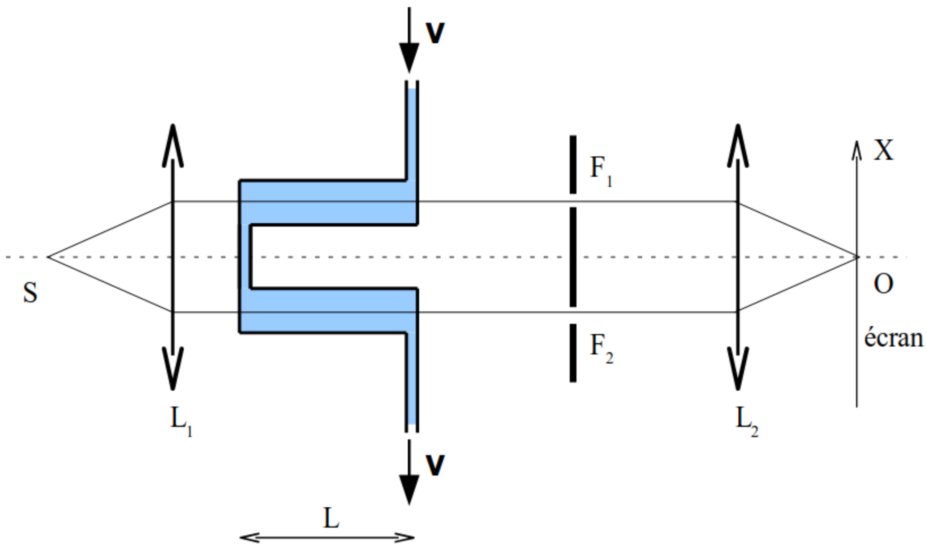


1. Les trois ondes qui interférent au point M sont-elles cohérentes? Justifier votre réponse.
2. Évaluer la différence de marche $\delta_{12}(M)$ puis $\varphi_{12}(M) = \varphi(M)$ du rayon passant par S_1 par rapport au rayon passant par S_2. Exprimer de même $\delta_{32}(M)$ et $\varphi_{32}(M)$.
3. Dans le cas de deux sources S_1 et S_2 par exemple, on pose $\underline{s_i} = a_i e^{j(\omega t - \varphi_i(M))}$, retrouvez la formule de Fresnel sur l'éclairement en écrivant $\mathcal{E}(M) = \frac{1}{2}K\underline{s}\ \underline{s}^*$.
4. On considère à nouveau les trois sources. Exprimez $\underline{s_3}$ et $\underline{s_1}$ en fonction de $\underline{s_2}$ et $\varphi(M)$. En déduire l'éclairement observé sur l'écran et représenter ses variations en fonction de la position du point d'observation M.

3 Expérience de Fizeau

En 1851, Fizeau réalisa une expérience pour étudier la vitesse de la lumière dans un milieu transparent en mouvement. Son principe repose sur la mesure des franges d'interférence entre deux signaux lumineux issus de la même source, mais se propageant dans un sens différent à travers un tube où circule un courant d'eau.

On considère une source S émettant à une longueur d'onde $\lambda_0 = 530\,\text{nm}$ et située au foyer objet d'une lentille convergente de focale f_1'. A la sortie de la lentille, la lumière passe



par un tuyau en U dont chaque ramification a une longueur $L = 1.50\,\mathrm{m}$. Ensuite, elle passe par deux trous d'Young distants de a.

On laisse couler de l'eau à une vitesse V dans ce tube de sorte que l'eau s'éloigne de la fente F_1 et coule vers la fente F_2. La lumière arrive ensuite sur une lentille convergente de focale f_2' et le résultat est observé sur un écran situé au foyer image de la lentille.

1. Dans un milieu transparent comme l'eau, la vitesse de la lumière est inférieure à sa vitesse dans le vide c. Donner l'expression de cette vitesse v_0 en fonction de c et de l'indice de réfraction $n_0 = 1.33$ de l'eau immobile.

2. On veut déterminer la vitesse de la lumière dans l'eau en mouvement. On appelle $\mathcal{R}$ le référentiel du laboratoire et $\mathcal{R}_0$ le référentiel où l'eau est localement au repos (référentiel qui bouge avec l'eau). Déterminer la vitesse de la lumière par rapport à $\mathcal{R}$ dans l'eau en mouvement dans les deux cas qui interviennent ici.

3. Exprimer en fonction de c, L, n_0, V la différence entre les durées de parcours Δt des deux ondes qui interfèrent en O au centre de l'écran ($X = 0$). Quelle est l'expression de la différence de marche en O ? On travaillera au premier ordre en V/c.

4. En justifiant à l'aide d'une figure, donner l'expression de la différence de marche en un point quelconque M de l'écran. Déterminer l'intensité $I(M)$ en un point d'abscisse X de l'écran. Vérifier qu'à vitesse d'écoulement nulle, on retrouve la figure d'interférence usuelle.

5. Pour quelle valeur minimale V_{min} de V observe-t-on une frange sombre en O ?

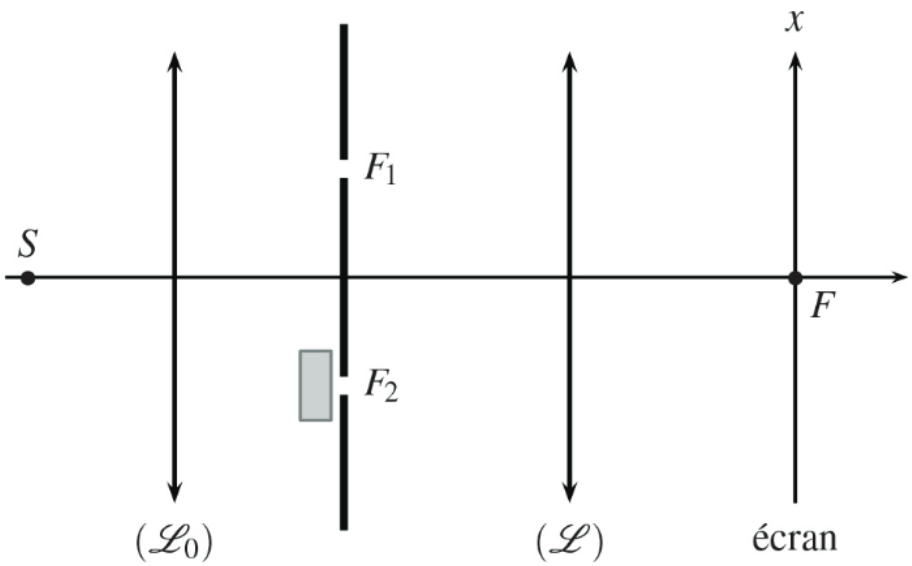
   En réalité, pour observer le décalage des franges d'interférences, il faut faire couler l'eau au moins deux fois plus vite quela valeur théorique, ce qui est un effet relativiste. Cette expérience a ainsi contribué à soutenir la théorie de la relativité, dans laquelle la loi de composition des vitesses est modifiée : lorsqu'on compose deux vitesses v_1 et v_2, on n'a plus $v = v_1 + v_2$ mais :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \tag{1}$$

6. Montrer que la théorie de la relativité est compatible avec le résultat de l'expérience.

4 Frange achromatique (difficile)

On considère le dispositif des fentes d'Young en lumière monochromatique avec observation dans le plan focal image d'une lentille L, la source S étant placée au foyer objet d'une lentille L_0:



1. (a) Décrire la figure d'interférence observée ainsi que la répartition de l'intensité vibratoire $\mathcal{I}(x)$ sur l'écran.
   (b) Application numérique : $F_1F_2 = a = 1.0\,\text{mm}$; $\lambda_0 = 600\,\text{nm}$; $f' = 50\,\text{cm}$. Calculer l'interfrange.
2. (a) Une lame de verre d'épaisseur e, d'indice n, est placée avant F_2 (voir figure). Déterminer la nouvelle position de la frange centrale. De combien d'interfranges s'est-elle déplacée?
   (b) Application numérique: $n = 1.500$ et $e = 0.01\,\text{mm}$.
3. On remplace désormais la source monochromatique par une source de lumière blanche. L'indice du verre varie avec la longueur d'onde dans le vide selon la loi de Cauchy:

$$n = A + \frac{B}{\lambda_0^2} \quad A = 1.489 \quad B = 0.004\,\mu\text{m}^2 \tag{2}$$

On appelle frange achromatique celle pour laquelle $\frac{\partial \Delta\varphi}{\partial \lambda_0} = 0$ pour $\lambda_0 = \lambda_{0m} = 600$ nm, longueur d'onde moyenne du spectre visible.

(a) Expliquer pourquoi cette frange porte ce nom.

(b) Déterminer la position de la frange achromatique. Donner, en interfrange, l'écart entre la frange achromatique et la frange centrale trouvée à la question précédente.

(c) Quelle sera l'allure de la figure d'interférences ? Quelles couleurs observe-t-on ?

4. Pour mesurer l'épaisseur e d'une lame à faces parallèles d'indice n, on mesure l'écart entre les positions, sur l'écran, de l'unique frange blanche (qui est aussi la mieux contrastée) avant et après l'introduction de la lame.

   (a) Quelle erreur relative commet-on sur la mesure de e si on considère que $n = 1.500$ indépendamment de la longueur d'onde?

   (b) Sachant que le dispositif des fentes de Young permet d'obtenir des différences de marche géométriques allant de 0 à $10\,\mu$m, quelle est la valeur maximale de e qui peut être mesurée par cette méthode ? Qu'observe-t-on si on prend une lame ayant $1,0$ mm d'épaisseur ? On rappelle que la longueur de cohérence de la lumière blanche peut être estimée en pratique à environ $3\,\mu$m.

5.

II - Contraste et cohérence

5 Interférométrie stellaire

Le Très Grand Télescope de l'Observatoire européen austral (ESO), en anglais Very Large Telescope (VLT), est un ensemble de quatre télescopes principaux et quatre auxiliaires. Il est situé à l'Observatoire du Cerro Paranal dans le désert d'Atacama, au nord du Chili, à une altitude de 2635 m. En combinant deux télescopes, il est possible de le faire fonctionner comme un interféromètre. Par un complexe jeu de miroirs et de fibres optiques, les ondes issues de l'étoile observée captées par les deux télescopes sont recombinées dans le laboratoire central de l'installation, où elles interfèrent. L'étude de la figure d'interférences générée donne alors accès à diverses informations sur l'étoile étudiée. Pour faire varier la différence de marche, les deux télescopes peuvent coulisser sur des rails longs de 65 m et rectilignes à mieux que 25 µm, ce qui permet de les séparer d'une distance allant jusqu'à 200 m.

Une modélisation équivalente du dispositif est celle d'un dispositif de trous d'Young, séparés d'une distance a variable, produisant des interférences observées dans le plan focal image d'une lentille équivalente. Les miroirs rencontrés sur le chemin des rayons réels induisent un déphasage additionnel de entre les deux rayons.

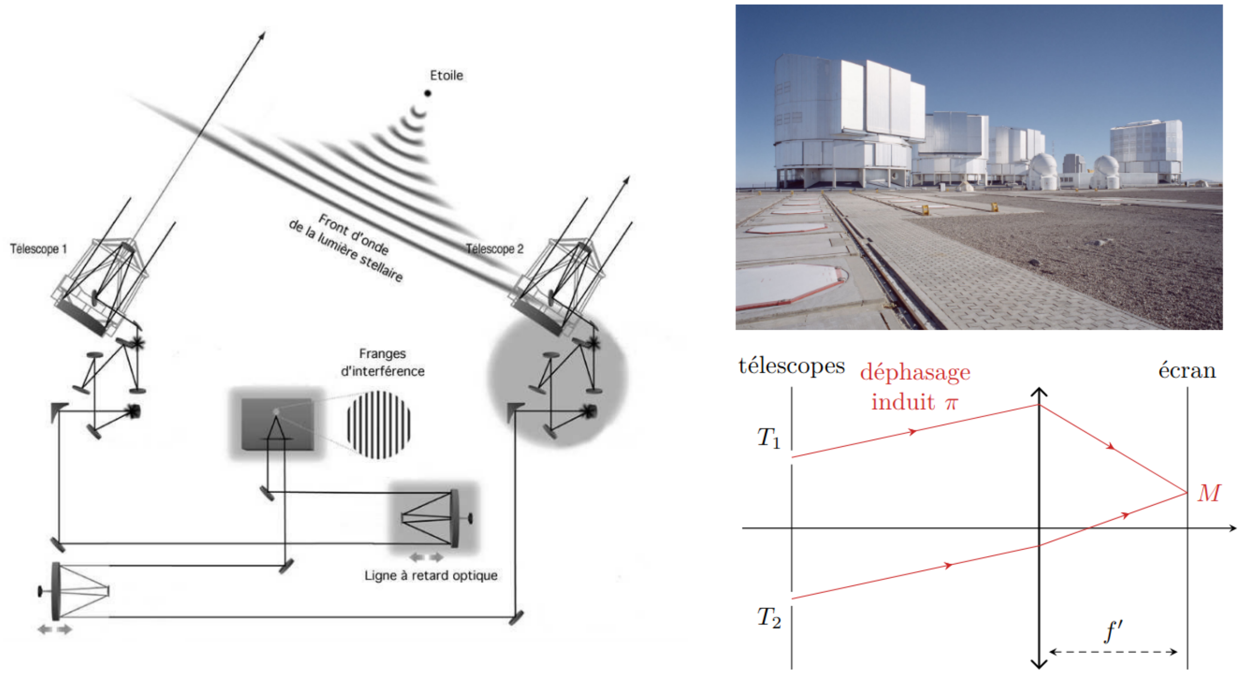


Figure 1: Schéma de principe et photo du VLT. Figure de gauche extraite de la thèse de Pierre Kervella.

Considérons dans un premier temps que l'interféromètre observe une étoile E_1 ponctuelle située à l'infini sur l'axe optique du montage, qui émet une radiation infra-rouge monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 2.0\,\mu\text{m}$.

1. Les rayons reçus par les deux télescopes sont-ils cohérents ? Montrer que la différence de chemin optique entre les deux rayons s'écrit :

$$\delta_1(x) = \frac{ax}{f'} + \frac{\lambda}{2} \tag{3}$$

2. En déduire l'intensité en tout point de l'écran, dont on notera I_0 la moyenne.

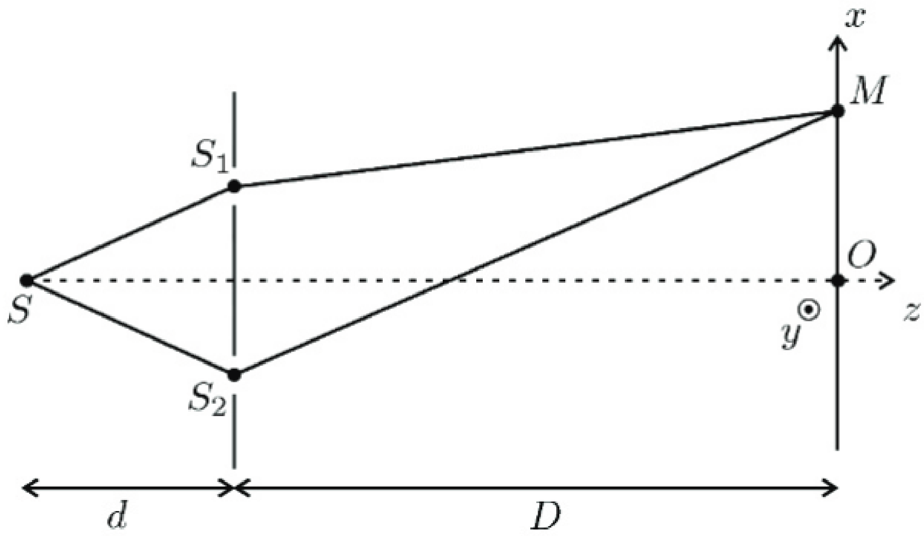
   Cette étoile est en fait l'une des composantes d'une étoile double, c'est-à-dire d'une paire d'étoiles en orbite l'une autour de l'autre. Les étoiles E_1 et E_2 sont supposées identiques, les rayons issus de E_2 arrivant sur l'interféromètre en formant un angle α avec l'axe optique.

3. Les rayons issus de E_1 et E_2 sont-ils cohérents ? Calculer l'intensité en tout point de l'écran. Commenter.

4. Proposer une méthode de détermination de l'angle α reposant sur les brouillages de la figure d'interférences. En appliquant cette méthode, quelle serait la limite de résolution angulaire du télescope, c'est-à-dire le plus petit écart α_{min} qu'il serait en mesure de détecter ?

6 Largeur de source

On considère deux trous S_1 et S_2 identiques, distants de a. Les distances D et d sont très grandes devant a. L'indice de l'air vaut 1. La source de lumière de longueur d'onde dans le vide λ_0 est placée en S.



1. Rappeler et démontrer la formule de Fresnel.

2. Quelle est l'allure de la figure d'interférences ? Déterminer l'expression de l'interfrange.

3. On tient compte de la largeur b de la source S. L'éclairement de la source E_0 est uniformément réparti entre $-b/2$ et $+b/2$.

   (a) Proposer une modélisation de la source comme un ensemble de sources quasi-ponctuelles. Ces sources sont-elles cohérentes ou incohérentes ?

   (b) Déterminer le contraste de la figure d'interférences.

   (c) Représenter graphiquement le contraste en fonction de b.

III - Réseaux

7 Spectrométrie

On souhaite déterminer la longueur d'onde λ de la raie du cadmium avec un réseau comptant $n = 500$ traits par millimètre.

1. Décrire un montage expérimental simple pour trouver cette longueur d'onde.

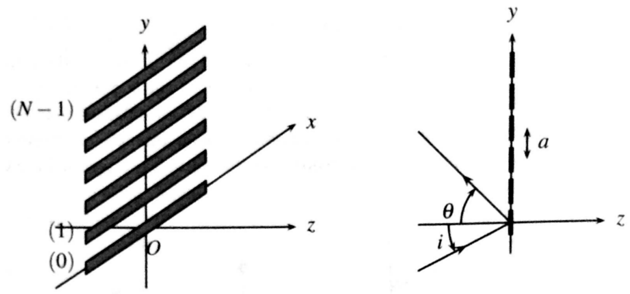
2. Établir la formule des réseaux reliant l'angle d'incidence i et l'angle d'émergence i_p où p est l'ordre d'interférences.

3. En faisant tourner le réseau, on observe un minimum de déviation D_m.
   (a) Justifier qu'au minimum de déviation $i = -i_p$.
   (b) En déduire une relation entre D_m, n et p.

4. On mesure pour l'ordre 2 un minimum de déviation de 27.8°. Déterminer λ.

8 Capacité de stockage d'un CD

Sur la surface d'un disque compact (CD) est gravée une piste unique en forme de spirale de pas a. Cette surface peut être modélisée, localement, par un ensemble de N miroirs parallèles identiques entre eux, régulièrement espacés d'une distance a. L'indice n_0 de l'air est confondu avec celui du vide.



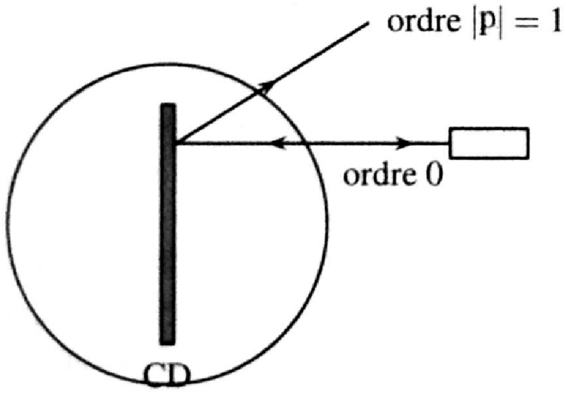
Attention, les angles sont ici algébriques: $i > 0$ et $\theta < 0$.

Seuls des faisceaux lumineux parallèles sont envisagés. La direction de la lumière incidente est contenue dans le plan (yOz). Les rayons lumineux réfléchis par le CD sont aussi contenus dans le plan (yOz). Le disque est éclairé sous un angle d'incidence i.

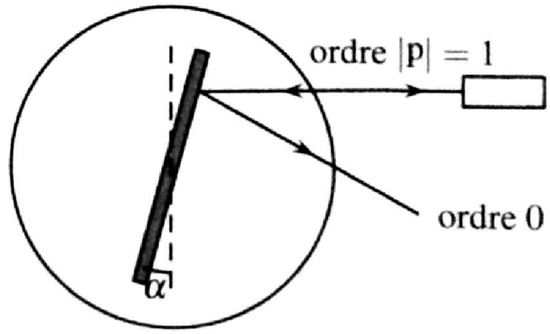
1. Par analogie avec le traitement effectué pour le réseau en transmission, déterminer l'expression de la différence de marche entre deux rayons réfléchis consécutifs.

2. Définir les directions θ_p, où p est un nombre entier, appelé ordre d'interférence, dans lesquelles les ondes réfléchies par les miroirs interfèrent de façon totalement constructive.

   On réalise l'expérience suivante. Le disque compact est éclairé en incidence normale. On tourne ensuite le disque d'un angle α afin que le faisceau diffracté par le disque dans l'ordre $|p| = 1$ soit dirigé dans la direction du faisceau lumineux incident.



Situation initiale



Après rotation du disque

3. Établir la relation liant a, λ_0 et α.

4. Pour $\lambda_0 = 650,0\,nm$, on mesure $\alpha = 12°40'$. En déduire une valeur numérique de a. Est-il possible d'observer la spirale gravée sur le disque à l'aide d'un microscope optique ?

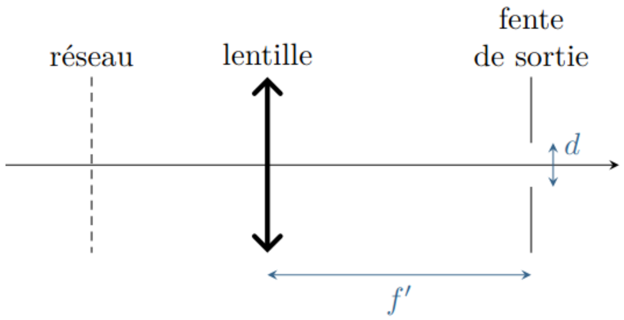
5. La spirale est gravée depuis l'intérieur du disque (rayon égal à $2,1\,cm$) vers l'extérieur (rayon égal à $5,9\,cm$). Estimer la longueur de cette spirale sur un CD.

6. Sur la spirale sont gravés des motifs (creux ou plats), d'une longueur ℓ voisine du micromètre. Chacun de ces motifs peut être associé à un bit de codage. En déduire une estimation de la capacité de ce CD en Mo, sachant qu'un Mo représente 10^6 octets et que chaque octet est un ensemble de 8 bits.

9 Monochromateur à réseau

Un monochromateur à réseau est un dispositif optique permettant de produire une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 réglable à partir d'une radiation polychromatique. On les retrouve par exemple dans tous les spectromètres destinés à l'identification d'espèces chimiques. Pour des raisons pratiques la plupart des monochromateurs utilisent des réseaux par réflexion, qui maximisent l'intensité lumineuse en sortie. Nous allons en étudier le principe sur le modèle simplifié représenté ci-contre, reposant sur un réseau par transmission.

Un réseau en transmission à $n = 500$ traits par millimètre est éclairé en éclairage parallèle par une source de lumière blanche non représentée sur le schéma. Les rayons incident et émergent forment respectivement des angles i_0 et i avec l'axe optique orthogonal au réseau. On cherche à isoler la longueur d'onde $\lambda_0 = 500\,\text{nm}$.



1. On souhaite observer l'ordre 2 sur l'axe optique pour la longueur d'onde λ_0 à isoler. En déduire l'inclinaison i_0 à donner à la source.

2. Considérons un rayon de longueur d'onde $\lambda_0 + \mathrm{d}\lambda$ avec $\delta\lambda \ll \lambda_0$. Déterminer l'angle i avec lequel il émerge du réseau. En déduire la dispersion angulaire du réseau au voisinage de λ_0, qui s'exprime en rad·nm^{-1}.

   En sortie du réseau se trouvent une lentille convergente et une fente de sortie de largeur d située dans le plan focal image de la lentille.

3. Déterminer les angles en sortie du réseau des rayons passant par les deux extrémités de la fente. En déduire la résolution $\Delta\lambda$ du monochromateur, c'est-à-dire la largeur spectrale du faisceau de sortie.

4. Comment choisir la largeur de la fente de sortie pour obtenir la radiation la plus pure possible ? En pratique, un compromis est à trouver : expliquer.

5. Comment choisir la distance focale de la lentille pour obtenir la radiation la plus pure possible ?

10 Réseau linéaire d'antennes

De nombreuses utilisations des ondes électromagnétiques demandent une bonne directivité : télécommunications, radar, radioastronomie, etc. Pour l'obtenir, on peut notamment associer plusieurs antennes élémentaires en réseau, ce qui est préférable à une antenne unique dont le rayonnement est très peu directif. C'est ce qu'exploitent par exemple les antennes de télévision en râteau, mais pour la réception. Des dispositifs analogues avec les ondes acoustiques sont utilisés dans les sondes d'échographie.

On s'intéresse dans cet exercice à un modèle simplifié de réseau linéaire de N antennes indicées de 0 à $N-1$, séparées d'une distance d. En première approche, on suppose que chaque antenne émet un rayonnement de longueur d'onde λ, isotrope dans le plan horizontal, toutes les antennes émettant en phase. On s'intéresse à l'onde totale en un point M, situé à grande distance du réseau, dans une direction formant un angle θ avec la normale au réseau. L'onde issue de l'antenne de référence 0 est prise comme référence :

$$s_0(M,t) = Ae^{i\omega t} \tag{4}$$

1. Montrer que le déphasage ϕ_1 entre l'onde 0 et l'onde 1 au point M vaut :

$$\phi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin\theta \tag{5}$$

   En déduire sans calcul le déphasage entre l'onde 0 et l'onde n au point M.

2. Montrer que l'amplitude totale au point M est donnée par :

$$s(M,t) = Ae^{i\omega t} \frac{e^{-iN\phi/2}}{e^{-i\phi/2}} \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} \tag{6}$$

   En déduire l'intensité correspondante.

3. Déterminer les directions dans lesquelles se trouvent les maxima d'intensité émis par le réseau d'antenne. Comment choisir d pour n'avoir qu'un unique maximum ? On supposera pour la suite $d = \lambda/2$.

4. Pour un réseau de N antennes, que vaut l'intensité au niveau d'un maximum ? Déterminer la largeur angulaire $\Delta\theta$ du pic de rayonnement correspondant, définie comme l'écart angulaire entre les deux annulations d'intensité de part et d'autre du maximum. Commenter l'influence du nombre d'antennes formant le réseau.

5. Pour contrôler la direction du maximum de rayonnement, les ondes émises par les antennes peuvent être déphasées : outre le déphasage géométrique précédemment discuté, le champ émis par deux antennes successives est déphasé de $\psi = cste$. Déterminer l'angle auquel se trouve le maximum d'intensité.