

Corrigé - DM 8

Détection des ondes gravitationnelles

I - Principe de fonctionnement

1. Le rayon ayant parcouru le chemin 1 a parcouru un chemin optique $L_1 + 2L_1 + L_1$ et a subi une transmission par la séparatrice, une réflexion, et une réflexion par M_1 , donc :

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 e^{j(\omega t - \frac{n\omega}{c}(L_1 + 2L_1 + L_1))} \times r_s \times t_s \times \overbrace{(-1)}^{=r_1}$$

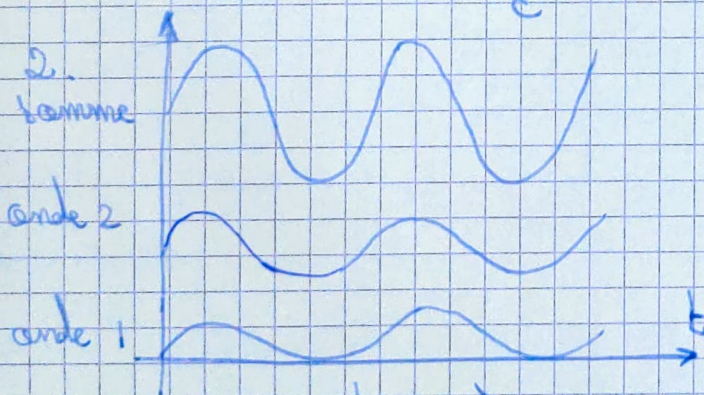
De même :

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_0 e^{j(\omega t - \frac{n\omega}{c}(L_2 + 2L_2 + L_2))} \times r_s \times t_s \times \overbrace{(-1)}^{=r_2}$$

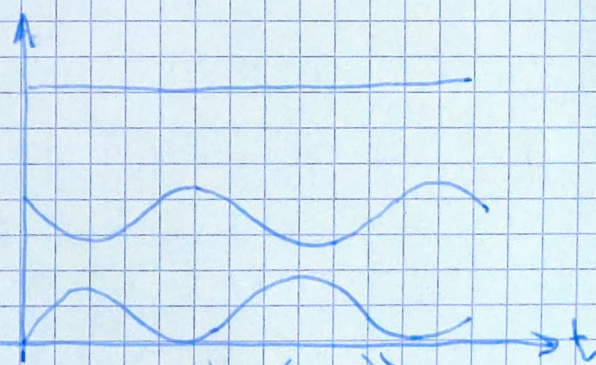
La différence de phase est bien :

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = \frac{n\omega}{c}(2L_1 - 2L_2) = \boxed{2n\omega(L_1 - L_2)}$$

avec $k = \|\vec{k}\| = \frac{\omega}{c}$.



$\Delta\phi = 2p\pi$
interférences constructives



$\Delta\phi = (2p+1)\pi$
interférences destructives

3. On a vu que :

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_2 \times e^{j\Delta\phi}$$

Donc : $\underline{x}_{tot} = \underline{x}_1 \left(\frac{1 + e^{j\Delta\phi}}{2} \right)$

$$= \underline{x}_1 \times e^{j\frac{\Delta\phi}{2}} \times 2 \cos\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

Et : $I = |\underline{x}_{tot}|^2 = |\underline{x}_1|^2 \times 4 \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 4 \left(\frac{r_s^2}{4} \frac{t_s^2}{4} \right) \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$

On retrouve la formule proposée avec $I_0 = 4 I_0^2 \lambda_0^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2$

4. On a :

$$I = I_0 \cos^2(nk(L_2 - L_1)) = I_0 \cos^2(nk(L_1^0 - L_2^0 + \delta d))$$

Où on sait que $nk(L_1^0 - L_2^0) = \frac{\Phi_0}{2}$ donc :

$$I = I_0 \cos^2\left(nk \delta d + \frac{\Phi_0}{2}\right)$$

5. Si $\delta d \ll \lambda_0$ alors $nk \delta d \ll 1$

$$\text{Or : } \cos\left(nk \delta d + \frac{\Phi_0}{2}\right) = \cos(nk \delta d) \cos\left(\frac{\Phi_0}{2}\right) - \sin(nk \delta d) \sin\left(\frac{\Phi_0}{2}\right)$$

$$\cos^2\left(nk \delta d + \frac{\Phi_0}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2nk \delta d + \Phi_0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{1 + \cos(2nk \delta d)}_{\approx 1} \cos \Phi_0 - \underbrace{\sin(2nk \delta d)}_{\approx 2nk \delta d} \sin \Phi_0 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \cos \Phi_0 - 2nk \delta d \sin \Phi_0 \right]$$

$$= \cos^2\left(\frac{\Phi_0}{2}\right) - nk \delta d \sin(\Phi_0)$$

$$\text{Alors : } \boxed{\delta I = - I_0 nk \delta d \sin(\Phi_0)}$$

δI correspond à une variation d'intensité maximale si $|\sin \Phi_0| = 1$ soit un déphasage $\Delta \Phi = \Phi_0 = \frac{\pi}{2}$ au repos, c'est à dire que les ondes sont en quadrature de phase (interférences ni constructives ni destructives).

6. Les longueurs sont modifiées de la valeur relative h avec un signe différent selon x et y :

$$\delta L_1 = +h L_1^0 \quad \text{et} \quad \delta L_2 = -h L_2^0$$

$$\text{D'où } \delta d = \delta L_1 - \delta L_2 = h(L_2^0 + L_1^0) = 2h L_0$$

Alors :

$$\delta I = - I_0 \cdot nk \cdot 2h L_0 \cdot \sin \Phi_0$$

Et $\delta I_{\max}$ est atteint pour $\sin \Phi_0 = 1$:

$$\boxed{\delta I_{\max} = - 2 I_0 \cdot nk h L_0}$$

7. On a $L_0 = 3 \cdot 10^3 \text{ m}$, $h_1 = 10^{-21}$; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec $\lambda = 1064 \text{ nm}$

Alors: $\delta d_{\max} = 2h_1 \cdot L_0 = \boxed{6 \cdot 10^{-18} \text{ m}}$

On a bien $\delta d_{\max} \ll \lambda_0 \sim 10^{-6} \text{ m}$ et :

$$\frac{\delta I_{\max}}{I_0} = 2h_1 L_0 \times nk = 2h_1 L_0 \times \frac{2\pi}{\lambda} \approx \boxed{3,5 \cdot 10^{-11}}$$

On a $\frac{\delta I_{\max}}{I_0} \ll 1$ et il faudrait une précision relative de 10^{-11} pour détecter l'onde : cela n'est pas réalisable. Il faut un dispositif plus complexe, même si prendre de grands bras a permis de maximiser $\frac{\delta I_{\max}}{I_0}$.

II - Prise en compte des réflexions multiples

8. On a l'onde $\underline{\delta}_0$ qui est directement réfléchi par $\mathcal{R}'_1$ sans rentrer dans le bras: $\underline{\delta}_0 = \underline{\delta}_{\text{inc}} \times r'_1$

L'onde $\underline{\delta}_1$ a parcouru un aller retour avec deux transmissions par $\mathcal{C}_1$ et une réflexion par $\mathcal{R}_1$:

$$\begin{aligned} \underline{\delta}_1 &= \underline{\delta}_{\text{inc}} \times t'_1 \times e^{i\left(\frac{m}{c} \times 2L_1\right)} \times \underbrace{\left(-1\right)}_{=r_1} \times t_1 \\ &= -\underline{\delta}_{\text{inc}} \times t_1^2 e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1} \end{aligned}$$

Enfin: $\underline{\delta}_p$ a parcouru le même trajet que $\underline{\delta}_{p-1}$ mais avec en plus:

- * un aller-retour $\rightarrow \times e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1}$
- * une réflexion sur $\mathcal{R}'_1 \rightarrow \times (-r'_1)$
- * une réflexion sur $\mathcal{R}_1 \rightarrow \times (-1)$

$$\text{Soit } \underline{\delta}_p = \underline{\delta}_{p-1} \times r'_1 e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1}$$

$$\text{On en déduit, pour } p \geq 1: \underline{\delta}_p = -\underline{\delta}_{\text{inc}} \times t_1^2 \times r_1^{p-1} e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1 p}$$

9. On a:

$$\begin{aligned} \underline{\delta}'_1 &= \sum_{p=0}^{\infty} \underline{\delta}_p = \underline{\delta}_0 + \sum_{p \geq 1} -\underline{\delta}_{\text{inc}} \times t_1^2 \times r_1^{p-1} e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1 p} \\ &= \underline{\delta}_0 - \underline{\delta}_{\text{inc}} t_1^2 \times e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1} \sum_{k \geq 0} \left(r_1 e^{\frac{-2j\pi\nu}{c} L_1} \right)^k \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \sum_{k=0}^{\infty} \left(r_1' e^{-\frac{2j\pi\omega}{c} L_1} \right)^k = \frac{1}{1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1}} \quad (k = \frac{\omega}{c})$$

Et donc:

$$\begin{aligned} \underline{s}_1' &= \underline{s}_{\text{inc}} \left[r_1' - t_1'^2 \times \frac{e^{-2j\pi k L_1}}{1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1}} \right] \\ &= \underline{s}_{\text{inc}} \times \frac{r_1' (1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1}) - (1 - r_1'^2) e^{-2j\pi k L_1}}{1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1}} \quad \text{car } t_1'^2 + r_1'^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\underline{s}_1' = \underline{s}_{\text{inc}} \times \frac{r_1' - e^{-2j\pi k L_1}}{1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1}}$$

$$\begin{aligned} 10. \text{ On a ici: } |R_1|^2 &= R_1 R_1^* = \frac{(r_1' - e^{-2j\pi k L_1})(r_1' - e^{2j\pi k L_1})}{(1 - r_1' e^{-2j\pi k L_1})(1 - r_1' e^{2j\pi k L_1})} \\ &= \frac{r_1'^2 + 1 - 2r_1' \cos(2\pi k L_1)}{1 + r_1'^2 - 2r_1' \cos(2\pi k L_1)} = 1 \end{aligned}$$

Autrement dit: $|\underline{s}_1'|^2 = |\underline{s}_{\text{inc}}|^2$: l'intensité lumineuse émergente est la même que l'intensité lumineuse incidente. Le dispositif conserve l'énergie.

$$\begin{aligned} 11. \text{ On a alors } 2j\pi k L_1 &= 2j \left[\pi k L_1^0 + \pi k \delta L_1 \right] \\ &= 2j \left[\pi L_1^0 + \pi k \delta L_1 \right] \\ &= p_1 \times 2L_1 + 2j\pi k \delta L_1 \end{aligned}$$

$$\text{Et: } e^{-2j\pi k L_1} = e^{-2j\pi k \delta L_1} \approx 1 - 2j\pi k \delta L_1 \quad \text{car } \pi k \delta L_1 \ll 1$$

$$\text{Le résultat est immédiat: } R_1 \approx - \frac{1 - r_1' - 2j\pi k \delta L_1}{1 - r_1' + 2j\pi k r_1' \delta L_1}$$

12. On a $\pi k \delta L_1 \ll 1$ donc:

$$\begin{aligned} R_1 &\approx - \left(1 - \frac{2j\pi k \delta L_1}{1 - r_1'} \right) \left(1 - \frac{2j\pi k r_1' \delta L_1}{1 - r_1'} \right) \\ &\approx -1 + 2j\pi k \delta L_1 \times \frac{1 + r_1'}{1 - r_1'} \quad \text{au 1^{er} ordre en } \pi k \delta L_1 \end{aligned}$$

$$\text{Or: } \tan(\phi'_1) = \frac{\text{Im}(R_1)}{\text{Re}(R_1)} = - \frac{1+r'_1}{1-r'_1} \times \underbrace{2nk\delta L_1}_{\ll 1}$$

$$|\tan \phi'_1| \ll 1 \text{ donc } \phi'_1 \approx \tan \phi'_1.$$

De même:

$$\phi'_2 \approx - \frac{1+r'_2}{1-r'_2} \times 2nk\delta L_2 = - \frac{1+r'_1}{1-r'_1} \times 2nk\delta L_2$$

car les miroirs sont identiques ($r'_1 = r'_2$).

$$\text{On trouve } \Delta\phi' = \phi'_1 - \phi'_2 + \phi_0$$

$$\boxed{\Delta\phi' = - \frac{1+r'_1}{1-r'_1} 2nk\delta d + \phi_0}$$

13. On a alors:

$$\Delta\phi' - \phi_0 = - \frac{1+r'_1}{1-r'_1} \times \underbrace{2nk\delta d}_{\frac{\delta I}{I_0} = 3,5 \cdot 10^{-11} \text{ calculé en Q7}}$$

$$\approx \boxed{7,0 \cdot 10^{-9}}$$

C'est déjà nettement plus élevé que 10^{-11} donc plus facile à mesurer. On avait $\Delta\phi - \phi_0 = 2nk\delta d$ en Q1.

Donc tout se passe comme si on avait multiplié $\Delta\phi - \phi_0$ (et donc la longueur des bras, car $L_0 \propto \delta d \propto \Delta\phi - \phi_0$)

par $\frac{1+r'_1}{1-r'_1}$ soit

$$\boxed{L_{\text{eff}} = L_0 \cdot \frac{1+r'_1}{1-r'_1} = 297 \text{ km}}$$