

Dualité onde-particule

Chapitre 11

I - Fondements de la mécanique quantique

1 Effet photoélectrique

Une plaque en potassium K est éclairée avec une lampe à vapeurs de mercure Hg. A l'aide de plusieurs filtres optiques, on sélectionne les différentes longueurs d'onde λ émises par la lampe. On mesure l'énergie cinétique E_c des électrons arrachés à la plaque métallique. Les résultats expérimentaux sont regroupés dans le tableau ci-dessous.

| | | | | | | | | |
|----------------|-----|------|------|------|------|------|-------|-------|
| λ [nm] | 254 | 297 | 334 | 365 | 405 | 436 | 546 | 577 |
| E_c [eV] | 2,6 | 1,89 | 1,43 | 1,11 | 0,77 | 0,55 | aucun | aucun |

1. L'énergie cinétique des électrons arrachés dépend-elle de la puissance de la lampe ?
2. Exprimer l'énergie E_c des électrons en fonction de longueur d'onde λ utilisée, du travail de sortie du potassium et éventuellement de constantes physiques.
3. Que faut-il tracer pour obtenir une relation affine ?
4. Dédurre la valeur de la constante de Planck des résultats expérimentaux.
5. Expliquer pourquoi pour certaines fréquences, aucun électron n'est arraché. Déterminer le travail de sortie du potassium.

2 Gaz classique, gaz quantique

On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique.

1. (a) Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.
(b) Calculer la longueur d'onde de de Broglie correspondante et la comparer à la distance moyenne entre deux atomes.
(c) On s'attend à ce que les effets quantiques puissent jouer un rôle quand la longueur d'onde de de Broglie devient du même ordre de grandeur que la distance entre atomes. Expliquer pourquoi et dites si ce gaz vous semble relever de la mécanique quantique.
2. Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome fournit un électron. L'ensemble de ces électrons constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est

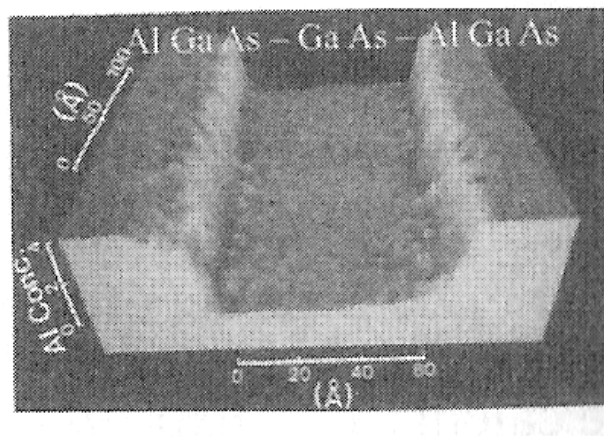
de l'ordre de l'eV. La distance moyenne entre électrons est supposée égale à la distance moyenne entre atomes.

- (a) Reprendre les arguments développés pour le gaz hélium dans le cas du gaz d'électrons libres dans le métal. On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes : $M_{\text{Cu}} = 63 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $\mu_{\text{Cu}} = 8.9 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- (b) La conduction de l'électricité dans un métal relève-t-elle de la mécanique quantique ?

II - Puits de potentiel

3 Absorption par un puits quantique

On considère une hétérostructure composée d'un empilement de couches semi-conductrices AlGaAs - GaAs - AlGaAs. Cette structure permet le confinement d'un électron du matériau dans une région de l'espace définie par la forme de la structure. On modélise l'hétérostructure par un puits de potentiel de profondeur infini de largeur L compris entre $x = 0$ et $x = L$. L'origine des potentiels est fixée au fond du puits.



On cherche des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger d'énergie E pour un électron de masse effective m^* confiné dans le puits. On rappelle que la partie spatiale de la fonction d'onde φ est solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} = E\varphi(x) \quad (1)$$

1. Montrer que la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps est de la forme

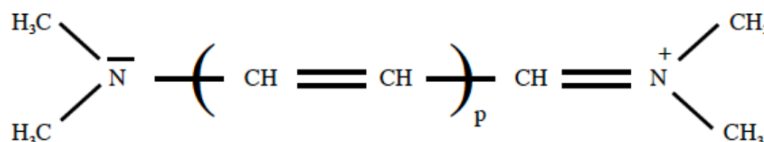
$$\varphi_n(x) = A_n \sin(k_n x) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

et donner l'expression de k_n en fonction de L et de n .

- Déterminer les constantes A_n .
- Tracer $|\varphi_n(x)|^2$ en fonction de x pour $n = 1$ et $n = 2$. Commenter.
- Donner l'expression des niveaux d'énergie E_n en fonction de m^* , L , \hbar et n .
- Quelles relations doivent vérifier les fréquences émises ou absorbées par cette hétérostructure?
- Calculer les longueurs d'onde correspondantes λ_{21} et λ_{31} , pour un puits à semi-conducteurs à base d'arséniure de gallium (AsGa), d'épaisseur $L = 60 \times 10^{-10}$ m et tel que $m^* = 0,067m_e$ où $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg est la masse de l'électron.
- À quel domaine du spectre appartiennent les longueurs d'onde obtenues à la question précédente? Proposer une application pratique de tels puits quantiques.

4 Colorants organiques et modèle de Kuhn

En 1949, Hans Kuhn proposa, pour calculer les propriétés électroniques d'une molécule présentant des liaisons conjuguées, comme celle représentée ci-dessous, d'oublier le squelette d'atomes de carbone, d'azote et d'hydrogène, et d'attribuer les propriétés optiques dans le domaine visible au seul nuage d'électrons. Dans le modèle simple, Kuhn proposa que les N électrons des doubles liaisons conjuguées sont prisonniers d'un puits de potentiel infiniment profond, de longueur L .



- La molécule ci-dessus appartient à la famille des cyanines symétriques. En incluant les atomes d'azote qui font partie du chromophore, quel est, en fonction de p , le nombre N d'électrons délocalisés ? On note ℓ la longueur moyenne d'une liaison. Dans son modèle, Kuhn propose $L = N\ell$.
- En exploitant l'analogie avec la corde vibrante, retrouver les valeurs des différents niveaux d'énergie en fonction de \hbar , de la masse de l'électron m_e , de L . On introduira le nombre quantique n .
- On admet que les électrons se répartissent dans les différents niveaux d'énergie en respectant les règles de Hund et de Pauli. Justifier que l'existence d'une bande d'absorption se traduit par une transition électronique entre le niveau occupé le plus haut et le niveau libre le plus bas de l'atome. Identifier ces deux niveaux.

4. En déduire l'expression de la longueur d'onde du rayonnement absorbé en fonction de m, c, h, L et N .

Pour la famille des cyanines symétriques, les longueurs d'onde suivantes ont été mesurées

| | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| p | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| λ_0 [nm] | 313 | 416 | 519 | 625 | 735 |

5. On donne $\ell = 0.139$ nm. Comparer les valeurs expérimentales aux valeurs du modèle de Kuhn. Quelles peuvent être les origines des écarts constatés ?

5 Oscillateur harmonique

Considérons une particule quantique de masse m confinée spatialement dans un potentiel $V^*(x)$ qui se comporte comme un piège. Ce piège peut, par exemple, correspondre à un piège optique avec laser comme nous l'avons vu en TD d'électrostatique. Le mouvement de la particule au voisinage de sa position d'équilibre est analogue à un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 dont l'énergie potentielle s'écrit $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$.

La fonction d'onde spatiale associée à l'état stationnaire fondamental de l'oscillateur harmonique s'écrit $\varphi(x) = A \exp(-x^2/a^2)$.

- Déterminer la constante A .
- Représenter l'allure de la probabilité de présence de la particule $\rho_P(x)$. En déduire sans calcul la position moyenne de la particule $\langle x \rangle$ dans l'état quantique fondamental.
- Déterminer l'expression de a en fonction de \hbar, m et ω_0 . En déduire l'expression de l'énergie E de cet état quantique et commenter.
- Soit x_m l'amplitude du mouvement de l'oscillateur mécanique classique quand son énergie vaut E_0 . Comparer x_m et a . Calculer la probabilité pour la particule d'être en dehors de l'intervalle $[-x_m, x_m]$.
- Exprimer $\langle x^2 \rangle$ en fonction de a . En déduire l'indétermination quantique Δx sur x .
- Soit p la quantité de mouvement de la particule et Δp l'indétermination quantique sur p . On admet que $\langle p \rangle = 0$. Montrer que :

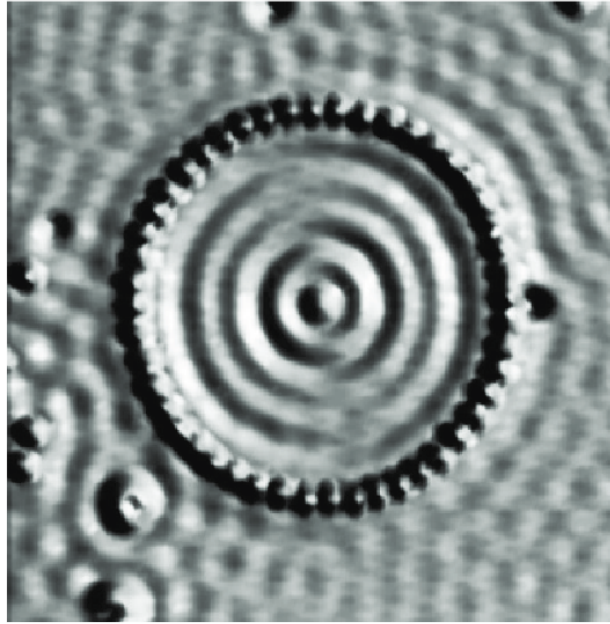
$$E_0 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 \Delta x^2 + \frac{\Delta p^2}{2m} \quad (3)$$

En déduire l'expression de Δp et commenter le résultat.

Aide au calcul: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad ; \quad \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} e^{-2u^2} du \approx 1.05$

6 Enclos quantique

En 1993, Crommie, Lutz et Eigler ont positionné 48 atomes de fer le long d'un cercle, sur une surface de cuivre, afin d'emprisonner des électrons dans cet enclos quantique. Une image de cet enclos, réalisée à l'aide d'un microscope à effet tunnel, est représentée sur la figure ci-contre. On propose d'estimer l'énergie des électrons piégés. On donne le rayon de l'enclos: $R = 7,13 \text{ nm}$ et la masse effective des électrons: $m^* = 0,38m_e$ où $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ est la masse d'un électron dans le vide.



L'image représente en niveaux de gris une grandeur proportionnelle à la densité locale d'électrons. On peut donc dire que l'image permet de visualiser la densité de probabilité de présence.

1. En utilisant un modèle de puits de potentiel infiniment profond unidimensionnel, estimer l'énergie des électrons piégés grâce à la figure. Discuter la validité des hypothèses retenues. Avez-vous réalisé une estimation par excès ou par défaut de l'énergie des électrons?
2. Pour obtenir une évaluation plus précise de l'énergie des électrons dans le cadre du modèle du puits de potentiel infiniment profond, on propose de tenir compte de la géométrie circulaire de l'enclos. On recherche une solution stationnaire en coordonnées polaires de la forme:

$$\Psi(r, \theta, t) = \varphi(r, \theta) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \text{ avec } \varphi(r, \theta) = f(r)g(\theta) \text{ et } n \text{ entier}$$

On donne l'expression de l'équation de Schrödinger indépendante du temps en coordonnées polaires:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\mathcal{L}(\varphi) + V\varphi = E\varphi \text{ avec } \mathcal{L}(\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

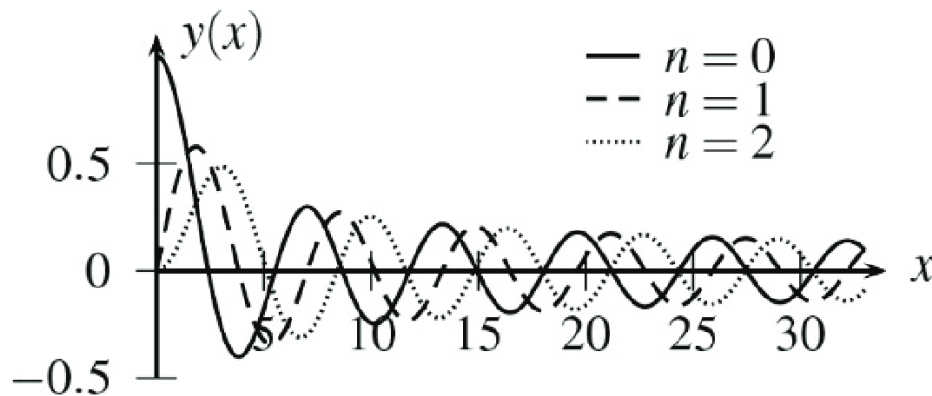
- En écrivant la condition de normalisation de la fonction d'onde $\Psi(r, t)$, montrer qu'on peut imposer $|g(\theta)| = 1$.
- En utilisant l'équation de Schrödinger indépendante du temps et les propriétés de périodicité de la fonction d'onde, montrer que $g(\theta) = e^{in\theta}$ où n est un nombre entier positif.
- Rechercher ensuite l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$ et la transformer en faisant le changement de variable $x = kr$ où $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$.

La figure ci-dessous fournit une représentation graphique de plusieurs solutions de l'équation différentielle suivante:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (4)$$

pour $n = 0, 1, 2$ et on précise que $y(x = 0) = 0$ pour $n \geq 1$.

- Estimer l'énergie E des électrons. Comparer avec le résultat obtenu précédemment.



7 Expansion soudaine d'un puits infiniment profond (très difficile)

On examine la dynamique d'une particule localisée dans un puits infiniment profond lorsque, à un certain instant (pris comme origine), la dimension du puits passe de a à λa ($\lambda > 1$). Les nouveaux états propres normalisés sont notés $\varphi_{n\lambda}(x)$.

On rappelle l'expression des états propres d'un puits de potentiel infini de largeur a :

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (5)$$

1. Ecrire les expressions des $\varphi_{n\lambda}(x)$ Quelles sont les énergies $E_{n\lambda}$? Observer que si λ est irrationnel, les deux spectres ne présentant aucune coïncidence.
2. A $t < 0$ la particule est dans l'état fondamental $\varphi_1(x)$. On écrit à l'instant $t > 0$:

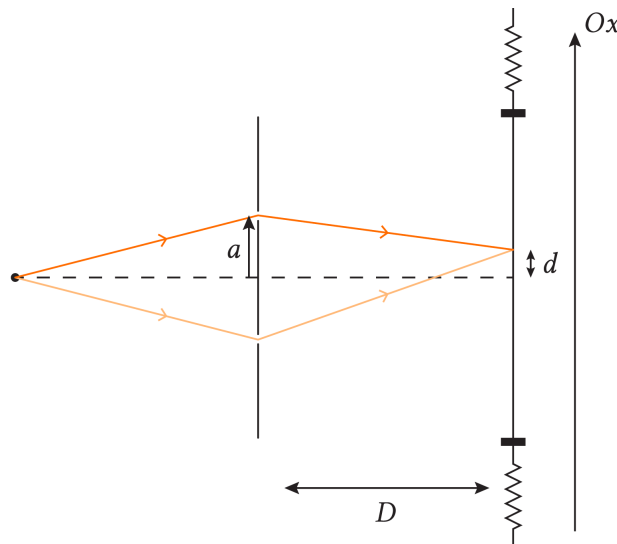
$$\psi(x, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} c_n e^{-i \frac{E_{n\lambda} t}{\hbar}} \varphi_{n\lambda}(x) \quad (6)$$

Trouver les coefficients c_n . Combien vaut la somme $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |c_n|^2$? Examiner le cas particulier où λ est un certain entier n_0 .

3. On admet que la probabilité P_n de trouver l'énergie $E_{n\lambda}$ lors d'une mesure d'énergie est donnée par $P_n = |c_n|^2$. Discuter l'allure de cette probabilité selon la valeur de λ . Quelle est la moyenne d'une série de telles mesures ?
4. Montrer que la valeur moyenne du carré de l'énergie, E^2 , est donnée par une série divergente ; qu'en est-il de la variance de l'énergie ? Analyser l'origine de ce fait.
5. Discuter la possibilité du processus inverse (compression du puits, $\lambda < 1$).

III - Principe d'indétermination

8 Fentes d'Young



On dispose de fentes d'Young et on envoie des électrons de masse m un par un à travers les fentes, avec une vitesse v que l'on supposera conservée. On note D la distance fente-écran, et a l'écart entre les bifentes. On repère un point M de l'écran par sa coordonnée d .

1. On maintient d'abord l'écran fixe : c'est l'expérience classique, mais en remplaçant les photons par des électrons.
 - (a) Expliquer pourquoi les électrons ont une nature ondulatoire, et donner la longueur d'onde associée.
 - (b) Calculer l'interfrange i correspondant.

On voudrait savoir par quelle fente les électrons sont passés. Pour cela, on utilise maintenant un écran mobile. Lorsqu'un électron impacte l'écran, il lui transmet une impulsion que l'on peut mesurer. On attend que l'écran soit revenu à sa position d'équilibre avant d'envoyer un nouvel électron.
2.
 - (a) En utilisant les lois de la mécanique classique, établir l'expression de la quantité de mouvement transmise par l'électron à la plaque selon l'axe (Ox) , en fonction notamment de d et de a .
 - (b) Expliquer alors comment la mesure de cette quantité de mouvement permet de savoir par quelle fente l'électron est passé.
 - (c) En déduire à quelle précision il faut mesurer la quantité de mouvement. Quelle est l'écart-type Δp_x de la distribution de quantité de mouvement associée ?
3.
 - (a) A partir du principe d'indétermination de Heisenberg, déterminer une condition sur l'écart-type Δx de la position d'impact de l'électron sur l'écran.
 - (b) En supposant la distribution de probabilité de position de l'électron uniforme sur un segment $[d - \frac{\delta}{2}, d + \frac{\delta}{2}]$, en déduire une condition sur δ .
 - (c) Peut-on toujours observer les franges ?

IV - Modèles de l'atome d'hydrogène

9 Autour de l'atome d'hydrogène

La mécanique quantique a permis d'interpréter une observation expérimentale datant du début du siècle précédent : les énergies observables pour l'atome d'hydrogène sont quantifiées. C'est-à-dire que seul un ensemble discret d'énergies peuvent être observées :

$$E_n = -\frac{E_{\text{ref}}}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \quad (7)$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression littérale puis la valeur numérique de la constante positive E_{ref} , qui caractérise l'atome d'hydrogène.

1. (a) Un atome d'hydrogène se compose d'un proton de charge électrique e et d'un électron de charge électrique $-e$. On note $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$. Quelle est la dimension de k ?
- (b) On se propose maintenant d'établir une expression pour l'énergie E_{ref} de l'atome d'hydrogène. Une modélisation rapide permet d'identifier les paramètres dont elle dépend : k, h et m , la masse de l'électron. Sachant que E_{ref} suit une loi de puissance, déterminer alors l'expression de E_{ref} par analyse dimensionnelle, à une constante de proportionnalité sans dimension a près.
2. L'analyse dimensionnelle ne peut nous fournir la valeur numérique du premier niveau d'énergie de l'atome d'hydrogène (présence de la constante a). On cherche alors à obtenir cette valeur à partir de mesures expérimentales.

Un atome peut passer d'un état d'énergie E_n vers un état d'énergie inférieur E_m , ($n > m$) en émettant un photon dont la longueur d'onde λ peut être mesurée. Cette longueur d'onde est reliée à la différence d'énergie entre les deux niveaux de l'atome d'hydrogène par la formule de Rydberg :

$$\frac{hc}{\lambda} = E_{\text{ref}} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (8)$$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide ($c = 3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$) et h la constante de Planck ($h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$). On considère le tableau de mesures suivant valable pour le cas $m = 1$ et pour n variant de 2 à 6 :

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $\lambda \text{ (m)}$ | $121,3 \cdot 10^{-9}$ | $101,0 \cdot 10^{-9}$ | $98,2 \cdot 10^{-9}$ | $95,0 \cdot 10^{-9}$ | $93,6 \cdot 10^{-9}$ |

- (a) Vérifier que le modèle proposé (eq. (8)) est validé par ce relevé expérimental pour le cas $m = 1$ (série de Lyman).
- (b) En déduire la valeur de E_{ref} en Joule puis en eV.

10 Modèle de Bohr

Au début du XX^{e} siècle, les observations expérimentales de l'atome d'hydrogène sont nombreuses et concordent sur l'existence d'un spectre de raies atomiques. Les théories classiques ne sont pas en mesure d'expliquer ces observations. Il faut attendre 1913 pour que Niels Bohr propose le premier modèle quantique de l'atome d'hydrogène. Ce modèle s'appuie sur les hypothèses suivantes:

- l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r sur laquelle il ne rayonne pas;
- l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur lorsqu'il change de trajectoire circulaire;

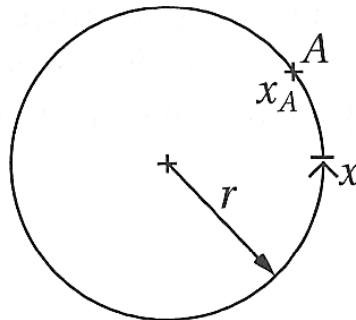
- *hypothèse de quantification*: les rayons des orbites accessibles à l'électron sont quantifiés. On note r_n, v_n et E_n respectivement le rayon de l'orbite, la vitesse de l'électron et son énergie sur l'orbite repérée par le nombre quantique principal n qui est un nombre entier naturel non nul.

On considère un atome d'hydrogène constitué d'un proton (charge e , masse M) et d'un électron (charge $-e$, masse m), le proton est supposé immobile.

1. Montrer que l'on peut négliger la force gravitationnelle GMm/r^2 devant la force électrostatique $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$.
2. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système E_m .

Selon l'hypothèse de quantification de Bohr, seules certaines orbites autour du noyau sont accessibles à l'électron, elles correspondent aux états stationnaires de l'atome d'hydrogène.

On considère un point A d'une orbite circulaire de Bohr de rayon r . La position d'un point sur l'orbite circulaire est repérée par son abscisse curviligne x qui varie dans l'intervalle $[0, 2\pi r[$ modulo $2\pi r$. Pour que cette orbite soit stable, l'onde de de Broglie doit revenir à elle-même après un tour sur l'orbite.



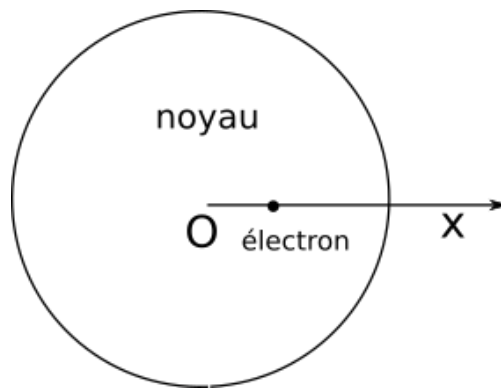
3. Exprimer les conditions aux limites portant sur les fonctions d'onde spatiale d'un état stationnaire φ_n ainsi que sur sa dérivée φ'_n pour qu'une orbite circulaire de rayon r_n soit stable.
4. Par une étude graphique, donner la relation liant le rayon de l'orbite de l'électron r_n et la longueur d'onde de de Broglie de l'électron λ_n . Représenter sur un cercle la fonction d'onde spatiale $\varphi_4(x)$ associée à l'état quantique de nombre quantique $n = 4$.
5. Relier le rayon de l'orbite de l'électron r_n à sa vitesse v_n .
6. En admettant que la stabilité de l'atome d'hydrogène est atteinte pour la valeur de r_n qui rend l'énergie mécanique E_n minimale, déterminer l'expression de r_n en fonction de n et de r_1 et exprimer r_1 en fonction de ϵ_0, m, e et h . Calculer la valeur de r_1 qui est appelée le rayon de Bohr.

7. Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_n de l'électron sur l'orbite repérée par le nombre quantique principal n . Écrire E_n sous la forme $E_n = -E_1/n^2$ en précisant l'expression de E_1 en fonction de ϵ_0, m, e et h . Déterminer l'état fondamental de l'atome d'hydrogène et calculer son énergie en électron-volt.
8. Représenter graphiquement, sur un axe vertical orienté vers le haut, les niveaux d'énergie successifs E_n de l'atome d'hydrogène (l'axe gradué en eV). Quel est son énergie d'ionisation à partir de l'état fondamental $n = 1$?

11 Un autre modèle de l'atome

On propose dans cet exercice d'estimer la taille d'un atome d'hydrogène à partir du modèle de Thomson et du principe d'incertitude de Heisenberg.

L'électron est supposé ponctuel, de charge $-e$ et de masse m alors que le noyau, de charge positive $+e$ est modélisé par une distribution de charge homogène sphérique de densité volumique de charges ρ et de rayon a . La masse du noyau est très grande devant celle de l'électron, de sorte que le noyau est considéré comme fixe, centré sur l'origine O de l'axe des x .



1. Déterminer l'expression de ρ en fonction des autres données.
2. Déterminer le champ électrique créé par le noyau au niveau de l'électron d'abscisse x .
3. Montrer que l'abscisse $x(t)$ de l'électron vérifie une équation différentielle de type oscillateur harmonique, et en donner la forme de la solution pour une position initiale $x_0 < a$ et une vitesse initiale nulle.
4. En appliquant le principe de Heisenberg au mouvement de l'électron, montrer que le rayon a de l'atome doit être supérieur à une valeur minimale que l'on exprimera en fonction de m, e, ϵ_0 et \hbar .

12 Le deutérium

On s'intéresse au deutérium (également appelé hydrogène lourd). Le deutérium (symbole D ou bien ${}^2\text{H}$) est un des deux isotopes stables de l'hydrogène. Le noyau du deutérium ${}^2\text{H}$, connu sous le nom de deuton, contient un proton et un neutron, tandis que le noyau de l'isotope le plus répandu de l'hydrogène ne contient qu'un proton, ${}^1\text{H}$. L'abondance naturelle du deutérium dans les océans de la Terre sous forme d'eau semi-lourde (HDO) ou lourde (D_2O) est d'environ un atome pour 6 420 atomes d'hydrogène.

On donne :

| | |
|-------------------------------------|---|
| Célérité de la lumière dans le vide | $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Constante de Planck | $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{Hz}^{-1}$ |
| Constante de Dirac | $\hbar = h/2\pi = 1.0 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ |
| Masse de l'électron | $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Masse du proton | $m_p = 1.673 \times 10^{-27} \text{ kg} \gg m_e$ |
| Masse du neutron | $m_n = 1.675 \times 10^{-27} \text{ kg} \simeq m_p$ |

1. Quelle est la proportion en masse du deutérium dans l'hydrogène océanique ?
2. Quelle est la proportion en masse du deuton (le noyau) dans le deutérium (l'atome) ?
3. Comparer les proportions (en nombres de molécules) de l'eau lourde D_2O et de l'eau semi-lourde HDO dans les océans. On précisera les hypothèses nécessaires à cette comparaison.

Le premier échantillon d'eau lourde a été isolé par le physicien Gilbert Lewis en 1933 puis une production industrielle par électrolyse a été mise en pratique par l'entreprise norvégienne Norsk Hydro de 1934 à 1943.

4. Citez des applications industrielles de l'eau lourde.

Un atome d'hydrogène (ou de deutérium) est constitué d'un électron unique, de charge $-e$, de masse m_e , soumis à l'interaction coulombienne d'un noyau supposé fixe à l'origine O des coordonnées. Les valeurs E_n de l'énergie de cet électron sont quantifiées et données par la relation

$$E_n = -\frac{E_0}{2n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{m_e e^4}{(4\pi\epsilon_0 \hbar)^2} \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

L'état fondamental est celui d'énergie minimale, il correspond donc à $n = 1$ et sa valeur numérique est $E_1 = -\frac{E_0}{2} = -13.6 \text{ eV}$.

5. On appelle série de Balmer l'ensemble des raies d'émission d'un atome d'hydrogène associées à une transition d'un niveau excité E_n (avec $n > 2$) vers le niveau $n = 2$.
- (a) Exprimer les longueurs d'onde λ_n associées à ces transitions en fonction de E_0 , n , de la constante de Planck h et de la célérité de la lumière dans le vide c .
 - (b) Calculer numériquement les longueurs d'onde λ_3 et λ_4 ; quel est le domaine spectral associé ?

On peut établir, et on admettra, que la prise en compte des (faibles) mouvements du noyau atomique amène à remplacer, dans toutes les équations ci-dessus, la masse

m_e par $m'_e = \frac{m_e}{1 + m_e/M}$ où M est la masse du noyau : $M = m_p$ dans le cas de l'hydrogène ordinaire ^1H et $M = m_n + m_p$ dans le cas de l'hydrogène lourd (ou deutérium) ^2H ou D.

6. Pour une des raies de la série de Balmer, on note λ_n (avec $n > 2$) la longueur d'onde émise par un atome d'hydrogène ordinaire, λ'_n la longueur d'onde émise par un atome de deutérium et $\delta = \frac{\lambda'_n - \lambda_n}{\lambda_n}$ l'écart relatif associé. Montrer que $\delta \simeq -\frac{m_e}{km_p}$ où k est une entier que l'on déterminera ; calculer δ ; quelle conséquence en déduisez-vous quant à l'identification spectroscopique du deutérium ?