Lycée Baimbridge, MP 2025-2026

à rendre pour le 4 décembre 2025

Physique Chimie

DM 10

Structure et énergie des étoiles
(Adapté de Mines MP 2024)

Les étoiles à l'équilibre seront ici décrites comme des boules homogènes de masse M et de rayon R en équilibre sous l'action de leur propre gravitation et d'une force antagoniste qui s'oppose à l'effondrement de l'étoile : il s'agit de la pression de confinement, une propriété strictement quantique.

1 Energie gravitationnelle

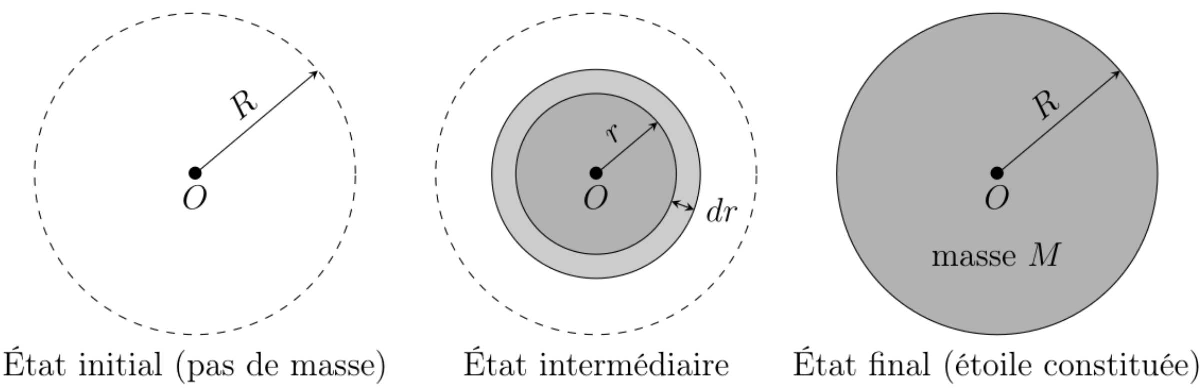

Figure 1: Constitution progressive de l'étoile

Du fait de la symétrie sphérique de l'étoile, on va définir son énergie gravitationnelle W_g comme l'énergie mécanique qu'un opérateur fournit à l'étoile pour la constituer, à partir de gaz sans interaction car pris à grande distance, en couches concentriques de rayon croissant. Ce calcul sera effectué pour une évolution quasi–statique, l'opérateur agissant à tout instant pour compenser exactement les forces gravitationnelles.

☐ **1** – Donner et justifier physiquement le signe de W_g. Expliquer pourquoi on nomme parfois $E_\ell = -W_g$ l'*énergie de liaison* de l'étoile.

☐ **2** – Exprimer la masse volumique ρ, supposée uniforme et constante, de l'étoile en fonction de M et R. En déduire, en fonction de M, R et r, les expressions de m (masse déjà constituée dans une sphère de rayon r) et de $\mathrm{d}m$ (masse à apporter pour faire passer ce rayon de r à $r + \mathrm{d}r$).

☐ **3** – Justifier que la contribution $\mathrm{d}W_g$ à l'énergie gravitationnelle de cet accroissement (passage de r à $r + \mathrm{d}r$) s'écrit $\mathrm{d}W_g = -\mathcal{G}\frac{m\mathrm{d}m}{r}$. Calculer l'énergie gravitationnelle totale W_g de l'étoile en fonction de $\mathcal{G}, M$ et R.

2 Pression de confinement quantique

L'étoile sphérique étudiée ici, de rayon R, de masse M et de volume V est essentiellement constituée de N atomes hydrogène, donc de N protons de masse m_p et d'autant d'électrons de masse $m_e \ll m_p$, chacune de ces particules étant confinée dans un volume $\theta = V/N$. On va montrer que le principe d'incertitude impose à chacun des atomes une énergie cinétique dite de confinement quantique. Celle-ci sera évaluée dans un modèle très simplifié, chaque particule restant libre de toute interaction mais confinée dans un volume cubique de côté a tel que $a^3 = \theta$.

☐ **4** – Exprimer a en fonction de M, R et m_p seulement.

On rappelle l'équation de Schrödinger pour un état stationnaire de fonction d'onde $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$ correspondant à une particule de masse m :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} \tag{1}$$

☐ **5** – La particule étant confinée à l'intervalle $x \in [0, a]$, exprimer la fonction d'onde spatiale $\psi_1(x)$ et l'énergie e_1 de l'état fondamental en fonction de h, m et a. Justifier que cette relation illustre le principe d'indétermination de Heisenberg.

En trois dimensions, l'équation de Schrödinger pour un état stationnaire se généralise de la forme suivante :

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

☐ **6** – Que deviennent ces expressions de la fonction d'onde et de l'énergie de l'état fondamental dans un modèle confiné à trois dimensions, $x \in [0, a], y \in [0, a], z \in [0, a]$? On pourra chercher la solution sous la forme $\Psi(M,t) = \varphi_x(x)\varphi_y(y)\varphi_z(z)e^{-i\omega t}$.

Si la question n'est pas aboutie, on pourra utiliser le résultat de la Q5 pour la suite.

☐ **7** – En déduire que l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile se met sous la forme $E_c = \gamma M^{5/3}/R^2$ dans laquelle on exprimera γ en fonction de h, m_p et m_e.

3 Le cas des naines blanches

On s'intéresse ici aux naines blanches, étoiles dans lesquelles la pression due au confinement quantique (avec l'énergie cinétique exprimée en fonction de M et R dans la partie II) est nettement supérieure aux effets de l'agitation thermique (que l'on négligera donc ici) et compense seule les effets de la gravitation (avec l'énergie de gravitation exprimée également en fonction de M et R dans la partie I).

La particularité de ces étoiles (essentiellement composées de carbone) et la prise en compte des dégénerescences des états d'énergie des électrons introduisent des facteurs numériques dans l'expression de γ obtenue dans un cas simple en partie II. Ces spécificités ne modifient toutefois pas l'expression de l'énergie cinétique totale due au confinement de l'étoile. En 1926, Fowler propose la valeur $\gamma = 1.6 \cdot 10^6$ SI pour les naines blanches. On utilisera cette valeur dans le reste du problème.

☐ **8** – Pour une étoile de ce type, déterminer le rayon R_{eq} qui assure un minimum de l'énergie totale.

☐ **9** – Calculer numériquement R_{eq} dans le cas d'une masse égale à celle du Soleil ($M \approx 2.0 \times 10^{30}$ kg) et conclure.

En 1931, le physicien indien Chandrasekhar explique qu'il faut prendre en compte le caractère relativiste des électrons confinés dans les naines blanches. Il en déduira un modèle plus correct pour ces étoiles.

☐ **10** – En estimant la vitesse des électrons dans le modèle de Fowler justifier l'argument de Chandrasekhar.