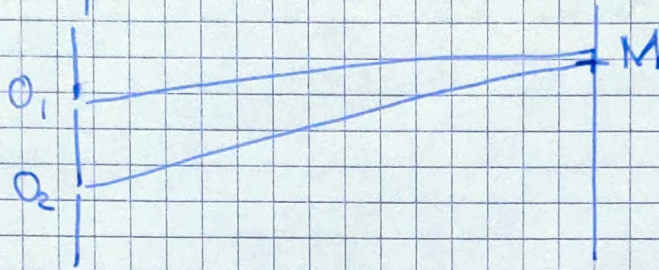


Corrigé - DM 9

1. C'est une division de front d'onde, les interférences ne sont donc pas localisées.

2.



O_1 et O_2 peuvent être considérées comme des sources ponctuelles cohérentes et en phase, alors :

$$\begin{aligned} \delta(M) &= (O_2M) - (O_1M) = \underbrace{n_{\text{air}}}_{=1} \left[\sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2} \right] \\ &= D \left(\sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{2} + y\right)^2}{D^2}} - \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{a}{2} - y\right)^2}{D^2}} \right) \quad \downarrow \text{DL à l'ordre 2 en } x, y, a \\ &= \frac{1}{2D} \left(\left(\frac{a}{2} + y\right)^2 + y^2 - \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 - y^2 \right) \\ &= \frac{1}{2D} \times 2x \times a = \boxed{\frac{ax}{D}} \end{aligned}$$

Notons I_0 l'intensité émise par chaque trou au point M, par la formule de Fresnel :

$$I(M) = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos\left(2\pi \frac{\delta}{\lambda}\right)$$

D'où $I_{\text{max}} = 4I_0$ et :

$$\boxed{I(M) = \frac{I_{\text{max}}}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \right)}$$

3. On voit que $I(M)$ dépend de x mais pas de $y \Rightarrow$ on a sur l'écran des franges rectilignes. L'interfrange est la distance entre deux maxima d'intensité soit :

$$\frac{2\pi a(x+i)}{\lambda D} = \frac{2\pi ax}{\lambda D} + 2\pi \quad \text{d'où} \quad \boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

or $\lambda = \frac{c}{\nu}$ soit : $\boxed{i = \frac{cD}{\nu a}}$

4. On voit que $I(M)$ ne dépend pas de y . Ainsi, on peut remplacer les trous par des fentes selon (Oy) en effet, ceci ne fait que translater la figure d'interférences selon (Oy) et ne la modifie donc pas (tant que $y \ll D$).

Ceci permet d'augmenter la luminosité.

5. On peut écrire l'intensité comme l'intégrale sur les intensités émises par chaque bande spectrale:

$$\begin{aligned}
 I(M) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2J_\nu d\nu \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\nu ax}{cD}\right) \right) \\
 &= \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} 2J_\nu d\nu \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{\nu ax}{cD}\right) \right) \quad \begin{array}{l} \text{car } J_\nu = 0 \\ \text{si } |\nu - \nu_0| > \frac{\Delta\nu}{2} \end{array} \\
 &= \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left(\Delta\nu + \int_{\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}} \cos\left(2\pi \frac{\nu ax}{cD}\right) d\nu \right) \\
 &= \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left(\Delta\nu + \frac{cD}{2\pi ax} \left(\sin\left(2\pi \left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right) \frac{ax}{cD}\right) - \sin\left(2\pi \left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right) \frac{ax}{cD}\right) \right) \right) \\
 &= \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left(\Delta\nu + \frac{cD}{\pi ax} \sin\left(2\pi \frac{\nu_0 ax}{cD}\right) \sin\left(\frac{\pi ax \Delta\nu}{cD}\right) \right) \\
 &= \frac{I_{\max}}{2} \left(1 + V(M) \sin\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right)
 \end{aligned}$$

où $I_{\max} = 4I_0$ et $V(M) = \text{sinc}\left(\frac{\pi ax \Delta\nu}{cD}\right)$

6. Les franges disparaissent pour $\frac{\pi ax \Delta\nu}{cD} = \pi$

soit $\delta = \frac{ax}{D} = L_c = \frac{c}{\Delta\nu}$

Or $\nu \times \lambda = c \Rightarrow \frac{\Delta\nu}{\nu} \approx \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \Rightarrow \Delta\nu = \frac{\nu}{\lambda} \Delta\lambda = \frac{c \Delta\lambda}{\lambda^2}$

$\Rightarrow L_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$

on retrouve la formule établie dans le cours avec une autre définition de L_c (longueur d'un train d'onde)

7. On a des trains d'onde de longueur L_c , ainsi :

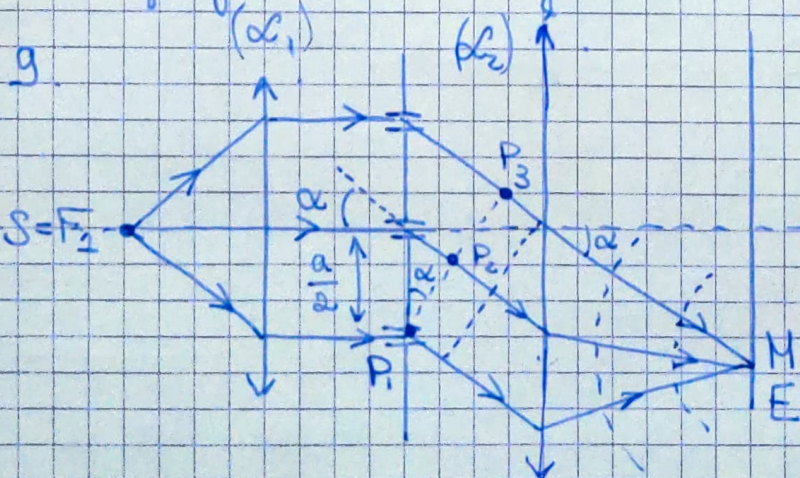
$$\tilde{\nu}_c = \frac{L_c}{c} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda c}$$

Le nombre d'interférences visibles et l'ordre d'interférences à la première annulation de contraste, soit (par définition de L en Q6) :

$\frac{1}{2} N = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{L_c}{\lambda_0}$
on compte les franges entre $p=0$ et l'annulation
il y en a autant de l'autre côté

8. Source	λ_0 [nm]	$\Delta\lambda$ [nm]	$\tilde{\nu}$ [s]	L [m]	N
Laser	632,991	0,001	$6,7 \cdot 10^{-10}$	0,2	$6 \cdot 10^5$
Raie H_α	656,2	0,1	$7,2 \cdot 10^{-12}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^3$
Lumière blanche	500	20	$2,1 \cdot 10^{-14}$	$6 \cdot 10^{-6}$	24

On voit que le laser est très cohérent et la lumière filtrée très peu cohérente. En pratique, on a un champ d'interférences limité par le cône de diffraction qui nous empêche de voir plus que ~ 10 franges $\Rightarrow$ il va y avoir les mêmes observations dans les trois cas



En un point M on observe à l'infini donc on regarde les rayons qui sortent parallèles des trous d'Young.

10. On a tracé des surfaces d'onde inverse. Par principe de retour inverse de la lumière $(P_1M) = (P_2M) = (P_3M)$. On en déduit la différence de marche :

$$\delta_{3/2} = \delta_{2/3} = \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{a}{2} \tan \alpha = \frac{a}{2} \times \frac{x}{f}$$

Alors on peut calculer l'amplitude lumineuse en M :

$$I = \langle (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)^2 \rangle$$

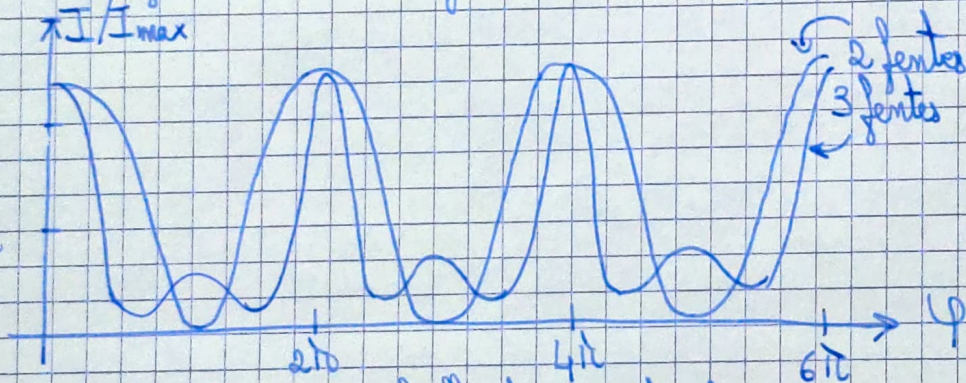
$$= \underbrace{\langle \delta_1^2 \rangle + \langle \delta_2^2 \rangle + \langle \delta_3^2 \rangle}_{\text{intensités de chaque source}} + 2 \underbrace{(\langle \delta_1 \delta_2 \rangle + \langle \delta_2 \delta_3 \rangle + \langle \delta_1 \delta_3 \rangle)}_{\text{analogues aux termes d'interférence à deux ondes}}$$

Ainsi : $\swarrow$ intensité de 1 fente

$$I = 3I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \times \left(\cos\left(\frac{2\pi \delta_{3/2}}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi \delta_{2/1}}{\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi \delta_{3/1}}{\lambda}\right) \right)$$

$$I = 3I_0 + 2I_0 (2\cos(\varphi) + \cos(2\varphi))$$

11. Pour deux fentes on avait juste $I = I_0(1 + \cos(\varphi))$



Avec 3 fentes les zones brillantes sont plus lumineuses ($I_{\max} = 9I_0$ au lieu de $I_{\max} = 4I_0$) et aura plus fines.

12. On mesure $\Delta\varphi = 4\pi$ entre les centres des deux franges brillantes (claires) des bords : $\Delta\varphi = 4\pi \Leftrightarrow \Delta x = 3,0 \text{ mm}$

Soit : $2 = \frac{a \Delta x}{\lambda_f} \Leftrightarrow a = \frac{2\lambda_f}{\Delta x} = \boxed{0,21 \text{ mm}}$

où a est la distance entre les deux fentes les plus éloignées.