TP2 : Incertitudes

MP 2025-2026, Lycée Baimbridge

15 septembre 2025

Matériel

Résistance $10\,\mathrm{k}\Omega$, 2 multimètres, GBF, fils.

Objectif

Mesurer la valeur d'une résistance le plus précisément possible et caractériser l'incertitude de la mesure.

Compétences évaluées

— Utiliser un multimètre et sa notice
— Évaluer rigoureusement des incertitudes de mesure
— Réaliser une régression linéaire avec Python et estimer l'incertitude des coefficients de régression

Consignes pour le compte rendu de TP :
— Décrire le protocole expérimental utilisé
— Utiliser un maximum de schémas
— Répondre aux questions à l'aide des numéros
— Apporter un soin particulier aux chiffres significatifs et au traitement des incertitudes
— Si la question n'est pas aboutie, indiquer tout de même ce que vous avez fait, vos mesures, et ce que vous auriez fait si vous aviez eu plus de temps
— Ne pas y passer trop de temps, vous êtes avant tout là pour manipuler !

Dans ce TP, nous cherchons à mesurer une résistance en caractérisant précisément l'incertitude de la mesure.

Remarque : ce poly de TP est fortement inspiré du cours très complet sur les incertitudes de Maxime Champion (MPI Lycée Thiers). A consulter en ligne si vous voulez en savoir plus.

1 Introduction

1.1 Définition de l'incertitude

Dans ce TP, nous essayons de quantifier une incertitude sur une mesure. Qu'est-ce qu'une incertitude ?

Définition

> La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée incertitude-type et notée $u(x)$. Par définition, l'incertitude-type correspond à l'écart-type de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

On note souvent le résultat d'une mesure :

$$x \pm u(x) \tag{1}$$

Pour estimer l'incertitude type $u(x)$ sur une mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le même processus de mesure. On obtiendra des valeurs différentes qui peuvent être liées à :

— la précision des instruments de mesure ;
— des changements dans les conditions environnementales ;
— la personne réalisant l'expérience qui n'a pas toujours le même geste expérimental.

L'incertitude est caractéristique du protocole de mesure, il est donc normal d'obtenir des incertitudes différentes pour une même mesure réalisée avec des protocoles différents : certains protocoles sont plus précis et d'autres moins. Par exemple, on aura une incertitude bien plus faible en mesurant une distance avec un pied à coulisse plutôt qu'une règle.

1.2 Les chiffres significatifs

Le nombre de chiffres significatifs est le nombre de chiffres employés dans le facteur avant la puissance de 10 en notation scientifique. Par exemple, 1.60×10^{-19} a trois chiffres significatifs (le dernier zéro compte), et 0.00465 a également trois chiffres significatifs.

Il permet de donner un ordre de grandeur de l'incertitude associée à une mesure. En général, on le choisit de manière à ce que le dernier chiffre corresponde en ordre de grandeur à l'incertitude-type ou à un ordre de grandeur de moins.

Par exemple, si je mesure $L = 1\,\mathrm{m}$ avec une incertitude de seulement 15 mm on écrira $L = 1.000 \pm 0.015\,\mathrm{m}$.

1.3 Interprétation de l'incertitude type

L'incertitude type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Deux mesures x_1 et x_2 réalisées avec le même protocole seront typiquement différentes avec, en ordre de grandeur : $|x_2 - x_1| \approx u(x)$.

Si nous réalisons le même protocole de mesure un grand nombre de fois, nous pouvons nous attendre à ce que la distribution des mesures soit une gaussienne dont l'écart-type correspond à l'incertitude type de ce protocole de mesure. La moyenne ne correspond pas forcément à la valeur réelle que l'on a mesurée, elle peut en effet être entachée d'une erreur systématique.

2 Les incertitudes de type B

Dans une première partie, nous allons nous intéresser à l'estimation des incertitudes en l'absence de variabilité observée, ce qui signifie qu'en réalisant les mesures plusieurs fois on trouve toujours le même résultat. Cela signifie juste qu'à l'échelle de l'expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Dans ce cas il faut estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété

Dans le cas où l'on connaît une plage d'incertitude $[\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta]$ pour la variable x, l'incertitude type correspondante est :

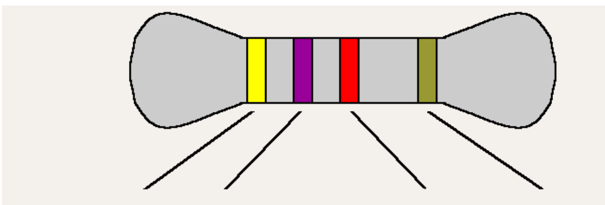
$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

Dans le cas particulier d'une lecture sur un appareil gradué, Δ est pris égal à une demi graduation et :

$$u(x) = \frac{1\,\text{graduation}}{\sqrt{12}} \tag{3}$$

Ce résultat se démontre en calculant l'écart-type d'une distribution uniforme.

Pour les appareils de mesure électroniques, le constructeur donne soit la valeur de Δ, soit $u(x)$ directement. De la même manière, les composants électroniques sont souvent tabulés avec une tolérance.



	1° anneau gauche **1° chiffre**	2° anneau gauche **2° chiffre**		Dernier anneau gauche **Multiplicateur**	Anneau droite **Tolérance**
noir	0	0		1	-
marron	1	1		10	1%
rouge	2	2		10^2	2 %
orange	3	3		10^3	-
jaune	4	4		10^4	-
vert	5	5		10^5	0.5 %
bleu	6	6		10^6	0.25%
violet	7	7		10^7	0.1 %
gris	8	8		10^8	0.005%
blanc	9	9		10^9	-
or	-	-		0.1	5 %
argent	-	-		0.01	10 %

FIGURE 1 – Code couleur pour lire la valeur d'une résistance et son incertitude relative (sa tolérance).

☐ **1** – Choisir une résistance et indiquer sa valeur et son incertitude type données par le constructeur en utilisant le code couleur présenté en figure 1.

☐ **2** – Proposer un premier protocole (protocole A) permettant de mesurer la résistance R avec le multimètre. Choisir le calibre permettant de minimiser l'incertitude. Estimer l'incertitude-type sur la mesure à partir de la notice du multimètre.

3 Comparer deux valeurs et leurs incertitudes

Nous souhaitons comparer la valeur mesurée et celle donnée par le constructeur.

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition

L'écart normalisé χ entre deux processus de mesure donnant les valeurs $x_1 \pm u(x_1)$ et $x_2 \pm u(x_2)$ est donné par :

$$\chi = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}} \tag{4}$$

Deux mesures sont en général considérées comme compatibles si leur écart normalisé est de l'ordre de 2 ou moins ($\chi \leq 2$).

Pourquoi utiliser cette métrique ? En fait, elle correspond à la valeur de $|x_1 - x_2|$ divisée par son incertitude. On s'attend à ce que $|x_1 - x_2| = 0 \pm u(|x_1 - x_2|)$, autrement dit $\chi = 0 \pm 1$. Ainsi si χ dépasse 2 on peut raisonnablement penser que les mesures sont incompatibles.

☐ **3** – Calculer l'écart normalisé entre la valeur de la résistance donnée par le constructeur et votre mesure. Que pouvez-vous conclure ?

4 Incertitudes composées

Nous allons maintenant utiliser la loi d'Ohm $U = RI$ pour mesurer indirectement la résistance. On se place en régime sinusoïdal et on envoie un signal aux bornes de la résistance, d'amplitude de l'ordre de quelques Volts.

☐ **4** – Proposer et mettre en œuvre un protocole B permettant de mesurer R en utilisant la loi d'Ohm.

Pour estimer l'incertitude sur R, il est maintenant nécessaire de combiner les incertitudes sur deux grandeurs : celles sur U est sur I. Pour cela on utilise les propriétés suivantes :

Incertitude sur une somme

Supposons $z = x + y$. Alors :

$$u(z) = \sqrt{u(x)^2 + u(y)^2} \tag{5}$$

Incertitude sur un produit

Supposons $z = x^\alpha y^\beta$. Alors :

$$\frac{u(z)}{z} = \sqrt{\left(\alpha\frac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\beta\frac{u(y)}{y}\right)^2} \tag{6}$$

☐ **5** – Exploiter l'une de ces formules et la notice du multimètre afin d'obtenir une valeur de R et son incertitude type par le protocole B.

☐ **6** – Cette mesure est-elle compatible avec la valeur donnée par le constructeur ? Et avec votre mesure avec le protocole A ?

5 Incertitudes de type A

Lorsque l'on peut faire varier les paramètres de mesure sans changer le protocole, il est possible de réaliser une estimation des incertitudes par une méthode entièrement statistique.

Par ailleurs, cette méthode a l'avantage de contraindre plus précisément la valeur mesurée. En effet, on ne va plus mesurer une seule valeur, mais mesurer la moyenne d'un grand nombre de valeurs ce qui va réduire l'incertitude.

L'incertitude est alors estimée à partir des n mesures réalisées.

Propriété

On réalise n fois le même protocole pour obtenir des mesures x_i. Le résultat de l'expérience est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ où $\bar{x}$ est la moyenne des mesures :

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{7}$$

σ est leur écart type :

$$\sigma = \frac{1}{n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \tag{8}$$

L'incertitude sur la moyenne des résultats est alors donnée par :

$$u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{9}$$

Ainsi on a une incertitude qui diminue lorsque le nombre de mesures augmente.

☐ **7** – Ici, quel paramètre peut-on faire varier en utilisant le protocole B ? Réaliser 10 mesures de R en prenant des valeurs raisonnables.

☐ **8** – Utiliser la méthode statistique pour obtenir une nouvelle estimation de la résistance R et son incertitude (protocole C).

6 Incertitude sur une régression linéaire

Lorsque l'on a une loi théorique, il est souvent possible de réaliser une régression linéaire permettant de déterminer une valeur à partir d'un des coefficients de la régression. Ainsi, à partir de points (x_i, y_i) on peut obtenir un paramètre a.

Un avantage majeur de cette méthode est qu'elle exploite directement la théorie et permet de prendre en compte toutes les mesures pour estimer une valeur.

☐ **9** – A partir des mesures réalisées à la question précédente, réaliser une régression linéaire pour estimer R.

En revanche, il est plus complexe d'estimer les incertitudes avec cette méthode. Pour cela, on peut utiliser une méthode dite de Monte Carlo : supposons que l'on a n mesures $x_i \pm u(x_i)$ et $y_i \pm u(y_i)$.

On va simuler m jeux de données à partir de ces mesures. Considérons un de ces jeux de données numéroté j ($1 \leq j \leq m$). Pour l'obtenir, on simule pour tout i des valeurs perturbées $x'_{i,j}$ et $y'_{i,j}$ à partir des lois normales correspondant aux incertitudes de chaque point. On réalise alors une régression linéaire sur ces points $(x'_{i,j}, y'_{i,j})$ avec $1 \leq i \leq n$ et on obtient une valeur a_j de notre paramètre physique. On calcule enfin l'incertitude type sur a comme l'écart-type des a_j.

☐ **10** – A l'aide d'un code python, mettre en œuvre la méthode de Monte Carlo pour estimer l'incertitude sur R et présenter le résultat final (protocole D). On utilisera le code fourni.

☐ **11** – Comparer les résultats des protocoles A, B, C et D et surtout l'incertitude liée à chacun des ces protocoles. Que pouvez-vous dire ?