# TP10 : Echantillonnage

MP 2025-2026, Lycée Baimbridge

1er décembre 2025

*Matériel*

GBF, Oscilloscope, Plaquette de conversion analogique/numérique et son alimentation, boîtes à décades de résistances et de condensateurs.

*Objectif*

Visualiser l'influence d'un échantillonnage numérique sur la forme et le spectre d'un signal analogique.
Récupérer le signal d'origine par filtrage analogique.

*Compétences évaluées*

- Réaliser l'échantillonnage d'un signal
- Mettre en évidence le phénomène de repliement de spectre
- Illustrer la condition de Nyquist-Shannon

*Consignes pour le compte rendu de TP :*

- *Décrire le protocole expérimental utilisé*
- *Utiliser un maximum de schémas*
- *Apporter un soin particulier aux chiffres significatifs et au traitement des incertitudes*
- *Si la question n'est pas aboutie, indiquer tout de même ce que vous avez fait, vos mesures, et ce que vous auriez fait si vous aviez eu plus de temps*
- *Ne pas y passer trop de temps, vous êtes avant tout là pour manipuler !*

## 1 Théorème de Fourier

*Théorème de Fourier*

Soit $s(t)$ un signal périodique de fréquence $f$ et de forme quelconque, alors peut se décomposer en une somme de signaux harmoniques de fréquences multiples de $f$. Il existe ainsi deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles telles que :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n) \tag{1}$$

Cette écriture est appelée développement en série de Fourier ou décomposition de Fourier de $s(t)$. L'ensemble des fréquences de la décomposition de Fourier de $s$ définissent son **spectre**.

On appelle :

— La composante continue le terme $n = 0$ qui correspond à la valeur moyenne du signal ;

— Le fondamentale le terme $n = 1$, de même fréquence que le signal ;

— Harmoniques les autres termes, qui ont des fréquences multiples de $f$.

☐ **1** – A l'aide de l'oscilloscope, faire la transformée de Fourier de trois signaux de fréquence 1 kHz (sinusoïdal, créneau et triangle). Lequel contient le plus d'harmoniques ?

## 2 Principe de la numérisation d'un signal

On appellera dans la suite *signal* une grandeur physique porteuse d'information que l'on souhaite mesurer en fonction d'une variable continue (en général le temps $t$ ou une coordonnée d'espace $x$). Le signal peut être une intensité lumineuse, une tension, un courant, une vitesse, un pH... Dans toute la suite, on étudiera un signal $X(t)$ en fonction du temps.

*Définition*

Un signal est dit **analogique** s'il peut prendre un ensemble continu de valeurs, et est défini dans un intervalle de temps continu. C'est le cas de la plupart des variables en physique classique.
Un signal est dit **numérique** si il n'est défini que pour un nombre fini d'instants, et ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

On numérise couramment les signaux pour :

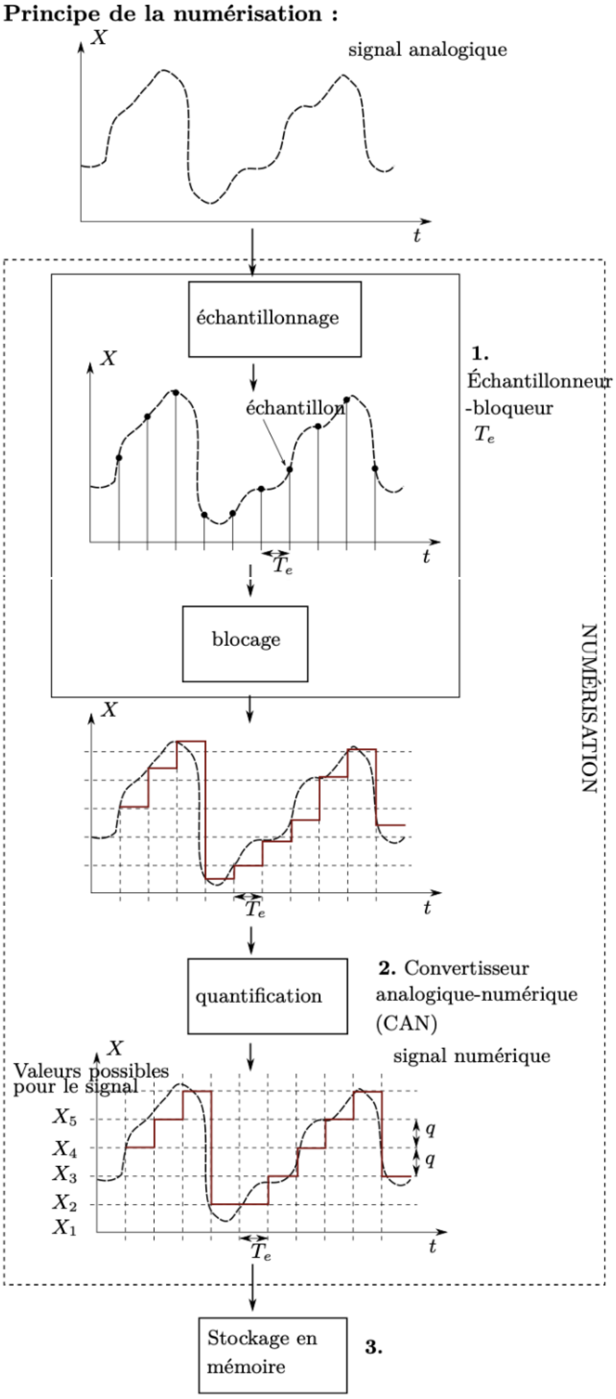
— les stocker (sur un disque dur par exemple)

— Faire des calculs

— Parfois pour les transmettre. Un signal numérique est moins sensible aux bruits de faible amplitude.

La numérisation se fait en général à l'aide de plusieurs étapes, comme indiqué dans le document page suivante.

**Principe de la numérisation :**




**Bloc 1 : transducteur**

Le signal analogique d'intérêt (température, vitesse, position, etc.) est converti en tension analogique.

**Bloc 2 : échantillonneur-bloqueur**

La tension analogique est envoyée en entrée d'un échantillonneur-bloqueur. Son rôle est de bloquer la valeur de la tension à un niveau constant pendant une durée $T_e$ appelée **période d'échantillonnage**. La valeur est actualisée tous les $T_e$.

**Bloc 3 : convertisseur analogique numérique**

En sortie de l'échantillonneur-bloqueur, la tension est toujours analogique : elle peut prendre n'importe quelle valeur. Comme un système numérique ne peut traiter que des données codées en binaire avec un nombre de bits fini, il faut discrétiser les valeurs prises. C'est le rôle du convertisseur analogique numérique, usuellement abrégé CAN, qui attribue à la tension la valeur binaire permise la plus proche (ou immédiatement inférieure) à sa valeur réelle.

Les cartes d'acquisition, par exemple SYSAM ou ARDUINO, contiennent les deux blocs échantillonneur-bloqueur et CAN.

**Bloc 4 : stockage**

Les valeurs de sortie du CAN sont enfin stockées en mémoire pour être affichées ou manipulées.

FIGURE 1 – Document montrant les différentes étapes de la numérisation.

# 3 Échantillonnage d'un signal

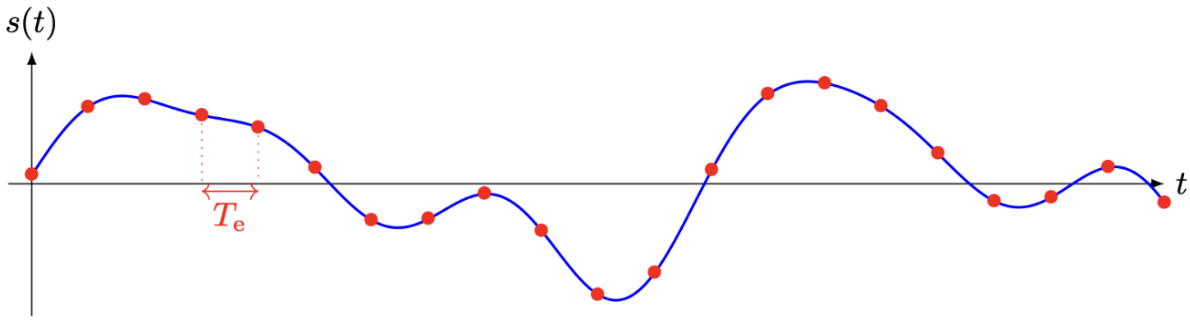


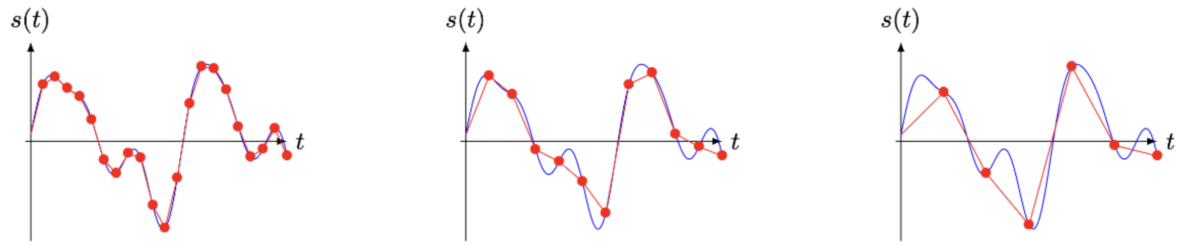

FIGURE 2 – Signal analogique (courbe continue) et numérique (points sur la courbe, séparés par la période d'échantillonnage $T_e$).

*Définition*

L'échantillonnage d'un signal correspond au prélèvement d'un nombre fini de valeurs d'un signal analogique à des instants $t_i$.
Lorsque ces instants sont régulièrement espacés, on appelle $T_e = t_{i+1} - t_i$ la **période d'échantillonnage**.
On définit la **fréquence d'échantillonnage** : $f_e = \dfrac{1}{T_e}$.

On peut alors relier la durée totale d'acquisition $T$ à la période d'échantillonnage et au nombre d'échantillons $N$ : $T = NT_e$.

Plus la fréquence d'échantillonnage est élevée, et mieux on pourra représenter les variations du signal, en particulier ses variations rapides qui correspondent aux hautes fréquences. Cela est bien visible sur la figure suivante :




Cet effet se traduit mathématiquement sous la forme du critère de Nyquist-Shannon :

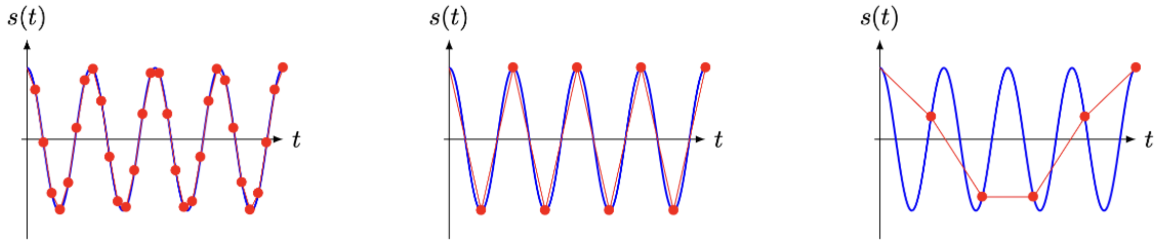
*Critère de Nyquist-Shannon*

Pour qu'un signal numérique obtenu par échantillonnage contienne toutes les fréquences du signal analogique d'origine, la fréquence d'échantillonnage doit vérifier :

$$f_e \geq 2 f_{max} \tag{2}$$

où $f_{max}$ est la fréquence maximale du signal analogique.

Ce critère s'illustre très simplement à partir de la figure suivante :



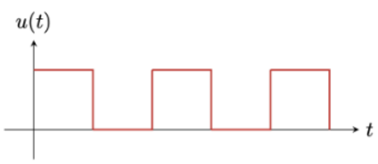

(a) $f_e > 2f$ (b) $f_e = 2f$ (c) $f_e < 2f$

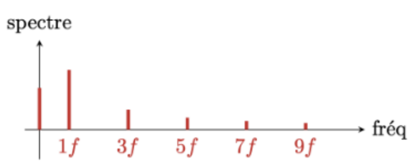
Afin de visualiser expérimentalement l'influence de la fréquence d'échantillonnage, on travaille avec une maquette spécialement conçue à cet effet.

☐ **2** – Délivrer un signal sinusoïdal à la fréquence $f = 1\,\text{kHz}$ à l'aide du GBF sur l'entrée $U_E$ de la plaquette. Récupérer le signal de sortie $U_B$ à l'issue de l'échantillonneur-bloqueur. Modifier la fréquence d'échantillonnage de 1 à 20 kHz. Commenter à chaque fois l'allure du signal en sortie de l'échantillonneur bloqueur.

☐ **3** – Répéter l'opération avec un signal de 5 kHz en entrée, et les mêmes fréquences d'échantillonnage. Le critère de Nyquist-Shannon est-il vérifié expérimentalement ?

On va maintenant s'intéresser à un signal créneau, dont le spectre est composé d'un fondamental ainsi que d'harmoniques :

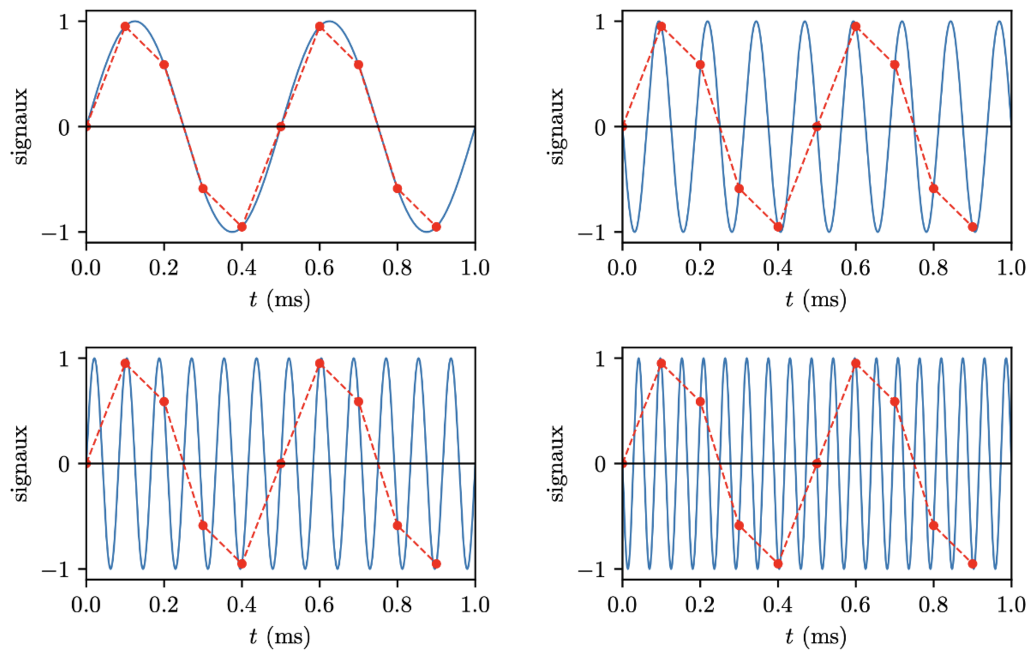



☐ **4** – Délivrer maintenant en entrée un signal créneau à la fréquence $f = 1\,\text{kHz}$, et l'échantillonner à $f_e = 5\,\text{kHz}$. Le fondamental vérifie-t-il le critère de Nyquist-Shannon ? Qu'en est-il pour les harmoniques ?

☐ **5** – Observer le spectre à l'oscilloscope. Correspond-il à celui d'un signal créneau ?

Pour comprendre cette observation, nous allons nous intéresser au spectre d'un signal échantillonné. Le spectre fait apparaître des pics à la fréquence du signal (logique), mais aussi aux fréquences des autres signaux sinusoïdaux qui auraient donné les mêmes échantillons, comme visible sur la figure suivante :




Il est possible de calculer les fréquences de ces signaux, et on admettra le résultat suivant :

*Propriété*

Lorsqu'on échantillonne un signal de fréquence $f_0$, on fait apparaître des fréquences de la forme $f = kf_e \pm f_0$ avec $k \in \mathbb{N}$. Ceci entraîne une réplication périodique du spectre, comme visible sur la figure ci-dessous : Le spectre bleu indique le spectre du signal analogique, et les parties vertes sont les parties qui se retrouvent ajoutées lors de la procédure d'échantillonnage.

Deux cas de figure se présentent pour la résolution de ce problème :

### Cas 1 : le signal analogique d'origine respecte le critère de Nyquist-Shannon

C'est typiquement le cas d'un signal triangle qui contient peu d'harmoniques. Envoyer un signal triangle de fréquence 1 kHz en entrée, que l'on échantillonne avec une fréquence de 5 kHz.

☐ **6** – Que constate-t-on ? Commenter la forme et le spectre du signal numérique par rapport au signal analogique.

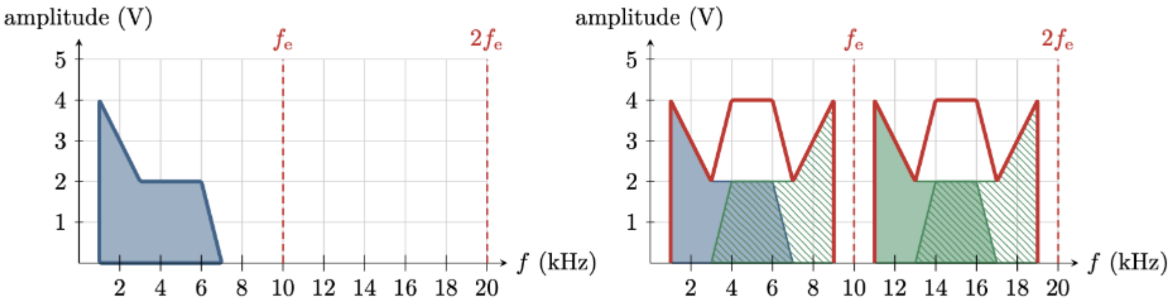
On peut remédier au problème de façon simple : il suffit d'ajouter un filtre passe-bas en sortie de l'échantillonnage.

☐ **7** – Quelle fréquence de coupure faut-il choisir ? Réaliser un tel filtre avec une résistance et un condensateur et visualiser son action sur le spectre et la forme du signal. Arrive-t-on à récupérer le signal d'origine ?

### Cas 2 : le signal analogique d'origine ne respecte pas le critère

☐ **8** – Reprendre le signal créneau à la place du signal triangle. Commencer lar l'échantillonner à une fréquence élevée, puis réduisez progressivement la fréquence d'échantillonnage jusqu'à 5 kHz. Qu'observe-t-on sur la transformée de Fourier ? Ce phénomène est connu sous le nom de **repliement de spectre**.

Ce phénomène est expliqué sur la figure suivante, analogue à la précédente, sauf que cette fois-ci les spectres ajoutés par la procédure d'échantillonnage se superposent au signal analogique, ce qui rend impossible l'utilisation d'un filtre pour récupérer le signal d'origine :




☐ **9** – Utiliser le même filtre que pour le signal triangle. Peut-on récupérer le signal d'origine ?

### Cas particulier : $f \approx f_e$

On s'intéresse maintenant à un cas particulier du cas 2, dans lequel la fréquence d'échantillonnage est nettement trop basse et se retrouve proche de la fréquence du signal.

☐ **10** – Se placer dans cette configuration. Qu'observe-t-on à l'oscilloscope ? Ce phénomène, connu sous le nom de *aliasing*, est courant par exemple dans un film lorsque l'on voit les roues d'une voiture tourner très lentement, à l'endroit ou à l'envers.