

Corrigé - DM 10

Structure et énergie des étoiles

1 - Énergie gravitationnelle

1. $W_g < 0$ car l'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative, la force de gravitation étant attractive. Pour "séparer" les atomes de l'étoile il faut fournir une énergie E_L qu'on appelle donc énergie de liaison.

2. On a : $M = \iiint_{\text{sphère}} \rho \, dV = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$
 $\uparrow$
 ρ uniforme

D'où : $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$

Et : $m(r) = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$ soit $m = M\left(\frac{r}{R}\right)^3$

$dm = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^2 dr$ soit $dm = 3M \cdot \frac{r^2 dr}{R^3}$

volume d'une
coquille sphérique
de rayon r et épaisseur dr

3. En constituant l'étoile, on amène la masse dm de $r_0 \rightarrow \infty$ à r , de plus par le théorème de Gauss gravitationnel le champ créé par l'étoile à l'extérieur de l'étoile est le même que si toute la masse était concentrée au centre, et on a :

$dW_g = - G \cdot \frac{m \, dm}{r}$
 Alors $W_g = - G \int \frac{m \, dm}{r} = - \frac{3GM^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr$

$W_g = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$

2 - Pression de confinement quantique

4. La masse d'un atome d'hydrogène étant $m = m_p + m_e \approx m_p$
on a : $N \approx \frac{M}{m_p}$. De plus $V = N\theta = \frac{4}{3} \pi R^3$

d'où $\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \times \frac{m_p}{M}$ soit $a = R \sqrt[3]{\frac{4\pi m_p}{3M}}$

5. On réinjecte dans l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \times (-i\omega) e^{-i\omega t} \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} e^{-i\omega t} \psi''(x)$$

Soit : $\psi''(x) + \frac{2m\omega}{\hbar} \psi(x) = 0$

Les conditions aux limites sont $\psi = 0$ en $x=0$ et $x=a$.

D'où : $\psi(x) = A_k \times \sin\left(k\frac{\hbar}{a}x\right)$, $k \in \mathbb{N}^*$

avec $\left(\frac{k\hbar}{a}\right)^2 = \frac{2m\omega_k}{\hbar} \Leftrightarrow \underbrace{\hbar\omega_k = \varepsilon_k}_{\text{énergie de l'état } k} = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{k\hbar}{a}\right)^2$

Pour l'état fondamental :

$\psi_1(x) = A_1 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ or $\int_0^a |\psi_1|^2 dx = 1 = \frac{A_1^2}{2} \times a$

D'où : $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ et $e_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}$ Rq : $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ pour la particule doit avoir une énergie cinétique non nulle.

6. En 3D on peut supposer une séparation des variables :

$\Psi(M, t) = \psi_x(x) \psi_y(y) \psi_z(z) e^{-i\omega t}$

Alors l'équation (2) divisée par Ψ donne :

$$i\hbar \times (-i\omega) = -\frac{\hbar^2}{2m} \times \left(\underbrace{\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)}}_{\text{ne dépend que de } x} + \underbrace{\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)}}_{\text{ne dépend que de } y} + \underbrace{\frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)}}_{\text{ne dépend que de } z} \right)$$

Une somme de termes ne dépendant que de variables différentes est constante ainsi chacun de ces termes est constant et :

$\frac{\psi_x''(x)}{\psi_x(x)} = \alpha$; $\frac{\psi_y''(y)}{\psi_y(y)} = \beta$; $\frac{\psi_z''(z)}{\psi_z(z)} = \gamma$

avec $\hbar\omega = -\frac{\hbar^2}{2m} (\alpha + \beta + \gamma)$

Les conditions aux limites imposent $\Psi_x = 0$ en $x = 0, a$;

$\Psi_y = 0$ en $y = 0, a$; $\Psi_z = 0$ en $z = 0, a$.

Ainsi les seules solutions satisfaisant les conditions aux limites sont du type :

$$\begin{cases} \Psi_x(x) = A_x \sin\left(k_x \pi \frac{x}{a}\right) & k_x \in \mathbb{N}^* \\ \Psi_y(y) = A_y \sin\left(k_y \pi \frac{y}{a}\right) & k_y \in \mathbb{N}^* \\ \Psi_z(z) = A_z \sin\left(k_z \pi \frac{z}{a}\right) & k_z \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Alors : $\alpha = -\left(\frac{k_x \pi}{a}\right)^2$ $\beta = -\left(\frac{k_y \pi}{a}\right)^2$ $\gamma = -\left(\frac{k_z \pi}{a}\right)^2$

et : $E = \hbar \omega = \frac{\hbar^2}{2m} \times \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$

le mode fondamental correspond à l'énergie minimale donc $k_x = k_y = k_z = 1$, alors de même qu'en Q5, $A_x = A_y = A_z = \sqrt{\frac{2}{a}}$

et : $\Psi(M, t) = \left(\frac{2}{a}\right)^{3/2} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) e^{-i \frac{Et}{\hbar}}$

avec $E = \hbar \omega = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m a^2}$ l'énergie de confinement

7. On a alors une énergie totale de confinement :

$E_c = N \times (E_{\text{électron}} + E_{\text{proton}})$ car les électrons et les protons sont confinés

$= N \times \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2a^2} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right)$

$\approx N \times \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m_e a^2}$ car $m_e \ll m_p$

Or $N \approx \frac{M}{m_p}$ et $a = R \times \left(\frac{4\pi m_p}{3M} \right)^{1/3}$

$\Rightarrow E_c = \frac{M}{m_p} \cdot \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2m_e} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{3M}{4\pi m_p} \right)^{2/3} = \frac{3^{5/3} \pi^2}{2^{7/3}} \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3}} \cdot \frac{M^{5/3}}{R^2}$

Soit $E_c = \gamma \frac{M^{5/3}}{R^2}$ avec : $\gamma = \frac{3^{5/3} \pi^2}{4\pi^2} \frac{\hbar^2}{2^{7/3} m_e m_p^{5/3}}$

$\gamma = \frac{3^{5/3}}{2^{13/3} \cdot \pi^{2/3}} \cdot \frac{\hbar^2}{m_e m_p^{5/3}}$

soit $\gamma = \frac{\hbar^2}{m_e} \frac{3}{\sqrt{8192} \pi^2} \times \frac{1}{m_p^5}$

3 - Le cas des naines blanches

8. On a alors une énergie mécanique totale :

$$E = W_g + E_c = - \frac{3}{5} \frac{\rho_g M^2}{R} + \gamma \frac{M^{5/3}}{R^2}$$

$$\frac{dE}{dR} = + \frac{3}{5} \frac{\rho_g M^2}{R^2} - \frac{2\gamma M^{5/3}}{R^3} = 0 \Leftrightarrow R = R_{eq} = \frac{10\gamma M^{5/3}}{3\rho_g M^2}$$

Soit :
$$R_{eq} \approx \frac{10\gamma}{3\rho_g} \times \frac{1}{M^{1/3}}$$

9. AN :
$$R_{eq} \sim \frac{10 \times 1,6 \cdot 10^6}{3 \times 7 \cdot 10^{-11}} \times \frac{1}{(2 \cdot 10^{30})^{1/3}} \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m}$$

soit $R_{eq} \sim 6000 \text{ km}$ soit le rayon de la Terre, c'est beaucoup trop petit.

10. On utilise le résultat de Q7 :
$$E_c = N \times e = \gamma \frac{M^{5/3}}{R_{eq}}$$

Or $e = \frac{1}{2} m_e v^2$ d'où :

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m_e}} = \sqrt{\frac{2E_c}{N m_e}} = \sqrt{2 \frac{m_p}{m_e} \gamma \frac{M^{1/3}}{R_{eq}}}$$

AN :
$$v \approx 1,6 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
 est de l'ordre de la vitesse de la lumière, il y a donc des effets relativistes à prendre en compte.