

Diffusion thermique

Chapitre 13

Incontournables	CCINP/E3A	Mines/Centrale	X/ENS
2 - 6 - 11	1 - 4 - 7 - 13 - 14	3 - 5 - 9 - 10 - 14	3 - 8 - 9 - 10 - 12

I - Loi de Fourier

1 Analyse de documents : sources d'énergie en Guadeloupe et en Hexagone

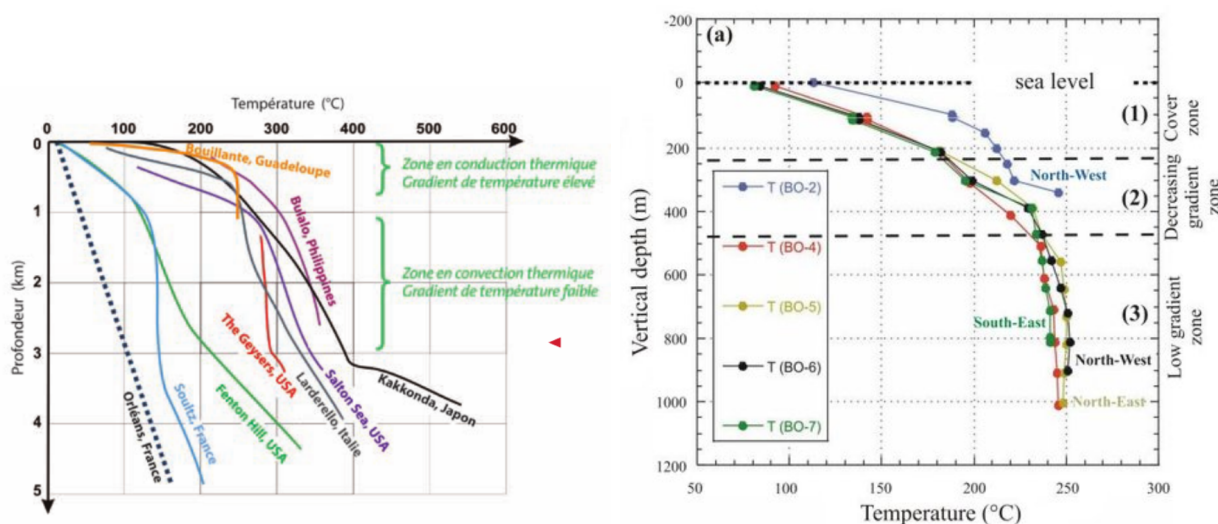


Figure 1: A gauche : température en fonction de la profondeur dans différentes régions du monde. La courbe en pointillés indique la région d'Orléans dans laquelle il n'y a pas de phénomène de volcanisme. A droite : zoom sur les mesures en Guadeloupe, à partir de mesures réalisées dans les puits géothermiques de Bouillante. Sources : Guillou-Frottier, L. (2011). *La convection hydrothermale et les ressources associées*. Géosciences, 13, 40-47. Guillou-Frottier, L. (2003). *Compilation et analyse des données thermiques sur le champ géothermique de Bouillante. Premières interprétations pour le fonctionnement du champ géothermique.*, BRGM Report N°BRGM/RP-52452-FR.

On s'intéresse à la possibilité d'utiliser de l'énergie solaire et géothermique en Guadeloupe et en France hexagonale. On souhaite quantifier l'énergie qui peut être produite par ces méthodes.

On donne la conductivité thermique de la croûte terrestre $\lambda = 2.5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



FICHE CLIMATOLOGIQUE

Statistiques 1991–2020 et records

LE RAZET AERO (971)

Indicatif : 97101015, alt : 11m, lat : 16°15'50"N, lon : 61°30'58"O

Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Année
Rayonnement global (moyenne en J/cm²)												
48816	50328	60391	60604	63761	61878	62700	62827	55862	52361	45571	45561	670660.0

PARIS-MONTSOURIS (75)

Indicatif : 75114001, alt : 75m, lat : 48°49'18"N, lon : 2°20'16"E

Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Année
Degrés Jours Unifiés (moyenne en °C)												
390.6	337.8	272.7	176.7	91.5	29.2	8.2	7	47.6	151.8	279.7	375.2	2168.0
Rayonnement global (moyenne en J/cm²)												
9136	15528	30359	44932	55839	59245	60637	53205	37755	22504	11250	7585	407975.0

Figure 2: Données climatiques enregistrées par Météo-France aux Abymes (en haut) et à Paris (en bas). La station Météo-France d'Orléans ne mesure pas le rayonnement solaire, on supposera que l'ensoleillement est similaire à Paris et à Orléans.

1. On s'intéresse d'abord à la région d'Orléans, qui n'est pas soumise au volcanisme. Estimer la densité de courant thermique qui s'échappe à la surface de la Terre à Orléans.
2. Quel est le mode de transfert thermique exploité lorsque l'on utilise un panneau solaire ? Comparer la densité de flux géothermique au flux solaire et commenter.

En réalité, les centrales géothermiques s'appuient sur des nappes phréatiques de grande surface, qui permettent de capturer l'énergie sur toute la surface de la nappe. Ainsi, une centrale de petite taille, si elle exploite une grande nappe, peut capter le flux géothermique sur une surface importante. Ce n'est pas possible pour une centrale photovoltaïque.

3. On s'intéresse maintenant aux régions volcaniques, dans lesquelles la température ne dépend plus linéairement de la profondeur. En s'appuyant sur la figure 1, proposer une explication de la forme du profil de température dans ces régions.
4. Proposer une estimation du vecteur densité de flux thermique à Bouillante.
5. La centrale géothermique de Bouillante produit environ 95 GWh par an. En déduire une estimation de la surface sur laquelle le flux géothermique est capturé (via la nappe phréatique).
6. Pour produire la même énergie avec des panneaux solaires, quelle surface faudrait-il

couvrir ? Le rendement d'une centrale photovoltaïque est typiquement de 15 %.

7. Commenter les variations du rayonnement solaire au cours de l'année en hexagone. Expliquer alors un avantage majeur de la géothermie, qui est par exemple exploitée à Soultz en Alsace malgré le gradient de température relativement faible (figure 1). Cet argument est-il toujours pertinent en Guadeloupe ?

II - Équation de diffusion en régime stationnaire

II.A - Problèmes à une dimension

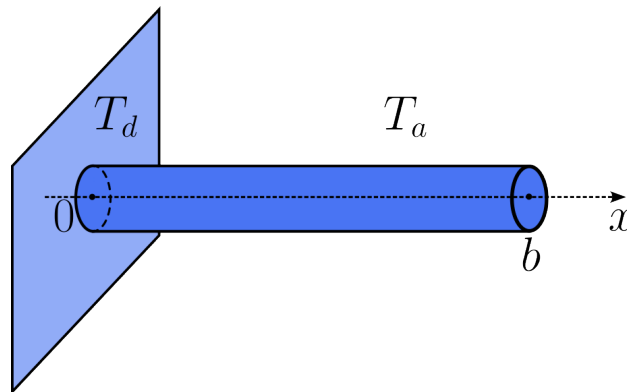
2 Ailette de refroidissement

On considère une ailette de longueur b , de rayon a et de conductivité thermique λ . Elle est en contact avec un thermostat à la température T_d en $x = 0$ et entourée d'air à la température T_a .

On rappelle les lois de Newton:

$$\vec{j} = h (T(x) - T_a) \vec{n} \quad (1)$$

avec $\vec{n}$ un vecteur unitaire orienté du système à la température T vers l'extérieur à la température T_a et $\vec{j}$ est le vecteur densité de courant thermique par transfert conducto-convectif à la surface du solide.



1. Rappeler la loi de Fourier.
2. À l'aide d'un bilan énergétique, montrer que

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} (T(x) - T_a) = 0 \quad (2)$$

et exprimer δ en fonction des données de l'énoncé.

- Exprimer $T(x)$ lorsque $b \gg \delta$.
- On donne la résistance thermique

$$R_{th} = \frac{T_d - T_a}{P} \quad (3)$$

avec P la puissance cédée au milieu. Expliquer que R_{th} tend vers une même valeur pour différents matériaux lorsque $b \ll \delta$. Retrouver cette valeur.

II.B - Problèmes à symétrie cylindrique

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z \quad (4)$$

3 Barreau d'uranium

Un barreau d'uranium homogène isotrope a la forme d'un long cylindre de rayon $a = 10^{-2}$ m. Des réactions nucléaires y produisent une puissance thermique P par unité de volume. Le barreau d'uranium est caractérisé par sa conductivité thermique $\lambda = 38 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. La température de surface du barreau est fixée à $T_s = 400^\circ\text{C}$. L'étude se fera en régime permanent.

Déterminer la puissance volumique maximale que l'on peut extraire du barreau si on ne veut pas que la température dépasse la valeur de $T_{max} = 600^\circ\text{C}$ au centre du barreau.

4 Homéothermie d'un phoque

La loi phénoménologique de Fourier, relative à la diffusion thermique, traduit la proportionnalité entre la densité de flux thermique $\vec{J}_d$ et le gradient de température :

$$\vec{J}_d = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}(T). \quad (5)$$

- Quels sont le nom et la dimension du coefficient λ ? En déduire son unité SI. Justifier physiquement le sens du vecteur densité de flux thermique $\vec{J}_d$.

On se place en coordonnées cylindriques (**figure 1**) pour étudier une situation physique stationnaire, unidimensionnelle à symétrie cylindrique, telle que la température en un point $M(r, \theta, z)$ ne dépend que de r .

Le gradient de la température $T(r)$ est égal à $\overrightarrow{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$.

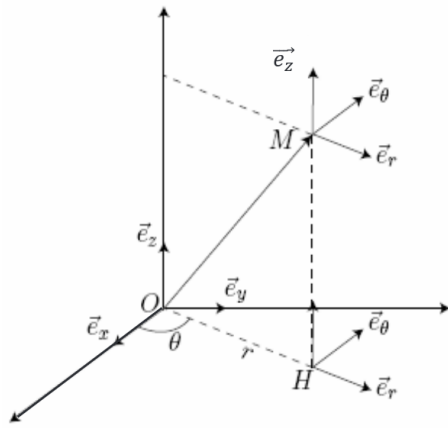


Figure 1 – Coordonnées cylindriques

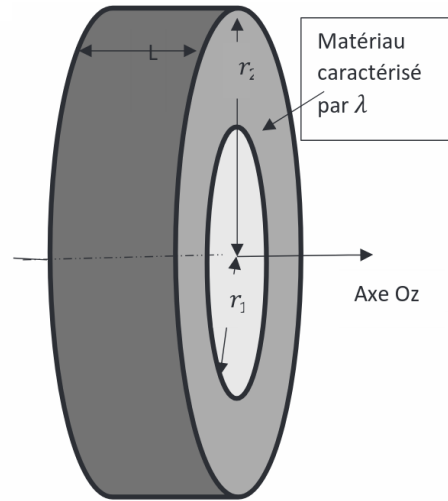


Figure 2 – Conducteur thermique

On considère un cylindre conducteur thermique creux de longueur L , occupant l'espace $r_1 < r < r_2$ constitué d'un matériau de conductivité λ (**figure 2**) dans lequel il n'y a aucune source thermique dans le matériau.

2. A partir d'un bilan énergétique pour le matériau compris entre les cylindres de rayons r et $r + dr$, établir l'équation différentielle vérifiée par le flux thermique :

$$\frac{\partial}{\partial r}(rj_d(r)) = 0 \quad (6)$$

En déduire la loi $T(r)$ en notant T_1 et T_2 les températures des rayons r_1 et r_2 :

$$T_1 = T(r = r_1) \quad \text{et} \quad T_2 = T(r = r_2). \quad (7)$$

3. Exprimer la puissance thermique φ qui traverse le cylindre de rayon r et de longueur L , dans le sens des r croissants.
4. En déduire que la résistance thermique du cylindre s'exprime par :

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \quad (8)$$

Prenons l'exemple d'un phoque marin de taille moyenne de masse $M = 150$ kg, vivant dans un océan à la température $\theta_0 = 2^\circ\text{C}$. On le modélise par un cylindre de longueur $L = 1,6$ m, de rayon $r = 25$ cm, qui ne perd l'énergie que par sa surface latérale, considérée comme "partiellement isolée" de l'eau froide par une épaisseur $e = 50$ mm de graisse de coefficient caractéristique $\lambda = 7,0 \times 10^{-2}$ SI. Sa température corporelle est égale à $\theta_{\text{eq}} = 36,5^\circ\text{C}$ supposée uniforme. Il pêche 4,0 kg de poisson pour sa consommation journalière. Cette nourriture lui fournit une énergie de 4600 kJ par kg de poisson consommé.

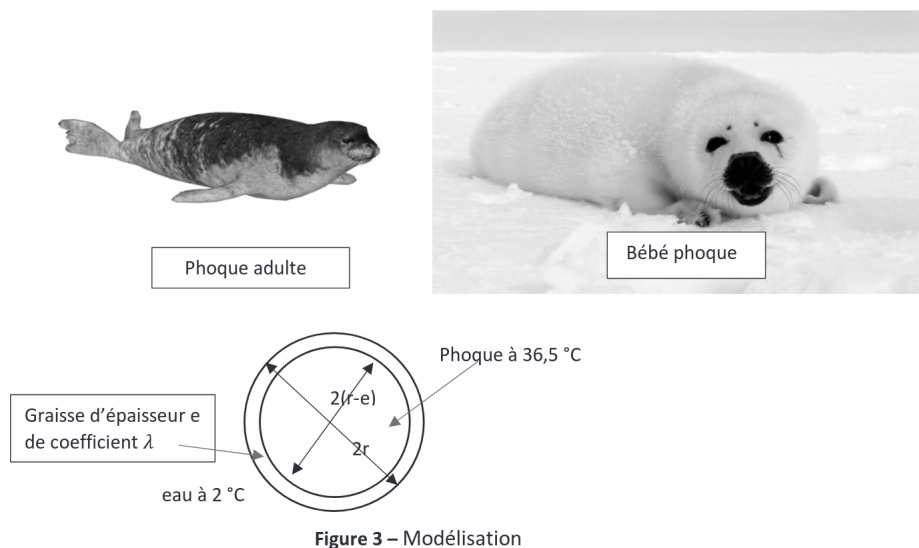
5. Évaluer l'énergie thermique perdue par le phoque en une journée et la comparer à l'énergie apportée par sa nourriture.

Un bébé phoque a ses dimensions divisées par 2,5 par rapport au phoque adulte, y compris l'épaisseur e' de graisse.

6. Justifier pourquoi sa masse vaut $m = 9,6$ kg.

Ses besoins métaboliques nécessitent une consommation de $5,0 \cdot 10^{-1}$ kg de poisson par jour. Son corps est entouré d'un duvet d'épaisseur $e'' = 10$ mm et de coefficient $\lambda'' = 1,0 \cdot 10^{-2}$ SI.

7. Évaluer la consommation de poisson journalière nécessaire à ce bébé phoque. Combien aurait-il dû consommer en plus par jour s'il n'avait pas eu de duvet protecteur ?



5 Pilier parasismique

Un type de dispositif parasismique à l'étude pour protéger une zone d'habitation (immeubles en général) consiste en un ensemble de piliers en béton et armature en acier, répartis autour de la zone à protéger, dont le rôle est de modifier suffisamment l'onde sismique (diffraction et interférences) pour que l'onde résultante passe autour de cette zone. On s'intéresse ici aux contraintes thermiques concernant un pilier donné, que l'on considérera pour simplifier comme constitué d'un cylindre central en acier, entouré de béton lui aussi à symétrie cylindrique (rayon intérieur $r_1 = 10$ cm, rayon extérieur $r_2 = 1.0$ m). Ce pilier est enfoncé profondément dans le sol (profondeur $h = 20$ m). L'extrémité inférieure du cylindre en acier est en contact thermique avec la terre à cette profondeur (température supposée fixe $T_a = 10^\circ\text{C}$), mais son extrémité supérieure est isolée thermiquement.

On suppose que la répartition de température dans le béton est à symétrie cylindrique : $T = T(r, t)$.

1. En considérant l'acier comme très bon conducteur thermique, quelle hypothèse simplificatrice peut-on envisager concernant sa température ?
2. Faire un bilan d'énergie pour obtenir l'équation gérant l'évolution spatiale et temporelle de la température dans le béton.
3. La température T_b du sol en surface est supposée constante, égale à 20°C . Déterminer le profil de température dans le béton une fois le régime stationnaire atteint. Des fissures peuvent apparaître pour un gradient de température de typiquement 0.5°C pour 1 cm d'épaisseur. Les contraintes thermiques étudiées ici sont-elles supportables par le béton ?
4. En prenant en compte les variations temporelles de T_b , quelle est la durée caractéristique d'évolution de la température dans le béton ? Commentez.

Donnée : coefficient de diffusivité thermique pour le béton $D_{th} = 5.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

II.C - Problème à symétrie sphérique

6 Bilan thermique d'un astéroïde

On étudie la température au sein d'un astéroïde modélisé par une sphère de rayon R , de conductivité λ , en régime stationnaire. De l'énergie est libérée à l'intérieur de l'astéroïde par radioactivité : pendant un temps dt , chaque élément de volume $d\tau$ de l'astéroïde reçoit une énergie $\mathcal{P}d\tau dt$, $\mathcal{P}$ étant une constante. On raisonne sur une sphère de rayon $r < R$, indéformable et au repos.

On donne l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

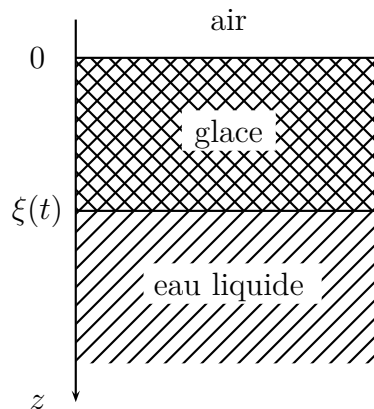
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi.$$

1. De quelles variables dépend la température dans l'astéroïde ?
2. Déterminer l'expression de la puissance thermique cédée par la sphère de rayon r par conduction, en fonction notamment de la conductivité λ de l'astéroïde, de la température T et du rayon r de la sphère.
3. Calculer la puissance produite par radioactivité dans la sphère de rayon r .
4. Énoncer le premier principe de la thermodynamique. En déduire une relation entre ces deux quantités.

5. Exprimer $T(r)$ en fonction de λ, P, r et T_0 la température au centre de l'astéroïde.
L'astéroïde émet à sa surface par rayonnement une puissance surfacique $\mathcal{P}_{ray} = \sigma T_s^4$, avec σ une constante et T_s la température de surface.
6. Déterminer la température T_0 au centre de l'astéroïde en fonction de R, λ, σ et $\mathcal{P}$.
7. On donne $\lambda = 2.5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$ et $\mathcal{P} = 10 \mu\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$. La température de fusion des roches est typiquement de 1300°C . Estimer numériquement (avec votre calculatrice ou avec un code python) le rayon minimal d'un astéroïde avant que la roche ne fonde au centre.
8. On se place maintenant dans le cas général où T et $\mathcal{P}$ peuvent dépendre du temps. On note μ la masse volumique de la roche et c_p sa capacité thermique massique. Établir l'équation de la chaleur vérifiée dans la sphère. On ne cherchera pas à la résoudre.

III - Régime instationnaire

7 Gel d'un lac



La figure ci-dessus illustre le problème de la formation d'une couche de glace sur un lac. L'eau du lac, en phase liquide, est à la température de l'équilibre eau-glace à la pression atmosphérique moyenne $P = 1 \text{ bar}$ soit $T_F = 0^\circ\text{C}$, température supposée constante. L'air au dessus de l'eau est à la température $T_A = -30^\circ\text{C}$, également supposée constante.

Le lac, non gelé à l'instant initial $t = 0$, se recouvre progressivement d'une couche de glace. Le changement d'état a lieu à pression constante. Le problème est à une variable d'espace. On oriente l'axe Oz de la surface vers le fond du lac.

L'interface entre l'air et la surface du lac est supposée maintenue à une position fixe en $z = 0$. On note $\xi(t)$ la position de l'interface entre l'eau et la glace.

La glace occupe donc l'espace $0 < z < \xi(t)$. Soit $T(z, t)$ le champ de température dans la glace, supposé unidimensionnel.

Données numériques et notations

- Capacité thermique massique de la glace $c_G = 2 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau $c_E = 4 \text{ kJ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductivité thermique de l'eau $\lambda_E = 0.3 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Conductivité thermique de la glace $\lambda_G = 1 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$
- Masse volumique de l'eau $\rho_E = 1 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Masse volumique de la glace $\rho_G = 0.9 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$
- Enthalpie massique de fusion de la glace $L = 300 \text{ kJ kg}^{-1}$

1. Établir l'équation de la diffusion thermique vérifiée par $T(z, t)$ pour $0 < z < \xi(t)$.
2. Quelles sont les conditions aux limites pour le champ de température de la glace ? Permettent-elles de déterminer $T(z, t)$?

On suppose que $\frac{d\xi(t)}{dt}$ est suffisamment faible pour admettre que la distribution de température dans la glace est à tout instant celle de l'état stationnaire pour l'épaisseur de glace formée à cet instant (approximation quasi stationnaire).

3. Sous cette hypothèse, établir l'expression de la température $T(z, t)$.

Soit un cylindre $\mathcal{C}$ vertical de section S dont la face supérieure est dans la glace et dont la face inférieure est dans l'eau. Entre t et $t + dt$, une masse dm d'eau se solidifie dans $\mathcal{C}$.

4. Faire un bilan d'enthalpie sur le cylindre $\mathcal{C}$ entre t et $t + dt$. En déduire la masse d'eau qui se solidifie dm .
5. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(t)$.
6. En déduire l'expression de $\xi(t)$. Quelle est l'épaisseur de glace au bout de 1 heure ? 1 jour ? 1 semaine ? 1 mois ? 6 mois ?

8 Âge de la Terre

Au milieu du XIX^e siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre était formée à une température élevée uniforme T_0 au moment $t = 0$. Instantanément, sa surface a été soumise à une température T_S . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé ce refroidissement pour en déduire l'âge de la Terre.

On supposera que la température ne dépend que de la profondeur z comptée positivement, et on suppose la surface de la Terre localement plane si bien que l'on travaille en

coordonnées cartésiennes : $T = T(z, t)$. La température vérifie donc l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (9)$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre.

1. Écrire l'équation vérifiée par la densité de courant thermique j . On notera $D = \lambda/(\rho c_p)$ la diffusivité thermique.
2. Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de $j(z, t)$ lorsque $t \rightarrow 0$, et lorsque $t \rightarrow \infty$? Quelle doit être la valeur de $j(z \neq 0, t)$ lorsque $t \rightarrow 0$ et $t \rightarrow \infty$? Que doit valoir $j(t, z \rightarrow \infty)$?
3. Vérifier que la solution proposée par Lord Kelvin satisfait bien l'équation de diffusion et les conditions aux limites :

$$j(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) \quad (10)$$

Dessiner schématiquement $j(z, t)$ en fonction de z pour deux instants différents.

4. Les paramètres du problème sont $T_0 - T_S, \lambda, \rho$ et c_p . On suppose que $A = a(T_0 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c_p^\delta$. Par analyse dimensionnelle, calculer les exposants $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Par un raisonnement que l'on ne cherchera pas à reproduire, on peut montrer que $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

5. Exprimer $\frac{\partial T}{\partial z}$, le gradient thermique en surface de la Terre.
6. Lord Kelvin a admis que $(T_0 - T_S)$ était de l'ordre de 1000 K à 2000 K et que $D \sim 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Sachant que le gradient thermique mesuré à la surface de la Terre est d'environ $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?
7. Que pensez-vous de l'estimation précédente ? Quels ingrédients physiques Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ?

9 Formation d'une croûte de lave

On s'intéresse à une coulée de lave en fusion et à la formation d'une croûte solide à sa surface. On étudie alors l'augmentation de l'épaisseur de cette croûte en fonction du temps.

À la surface extérieure, en $y = 0$, la lave est en contact avec l'air à la température constante T_0 . La lave en fusion à la température T_f est donc soudainement portée à la température T_0 à $t = 0$. Dans ces conditions, la couche superficielle de la lave se solidifie, et

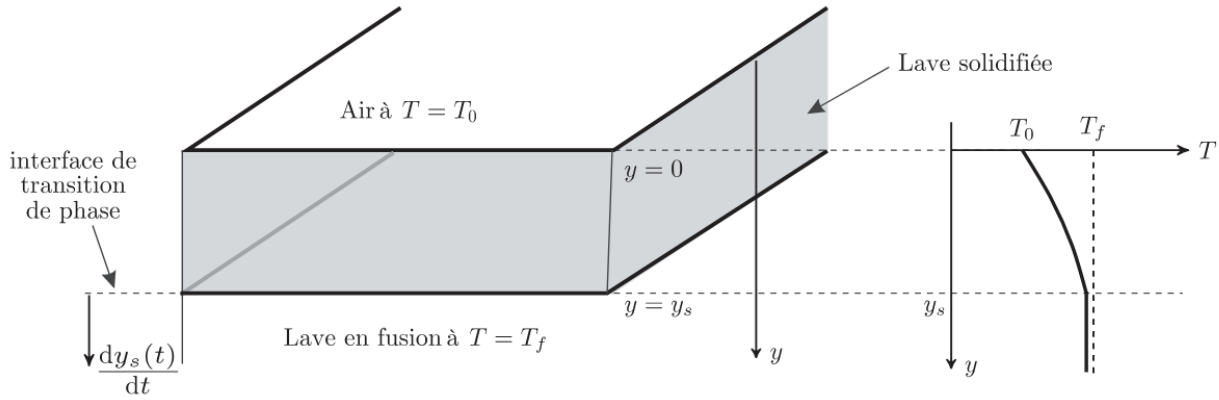


Figure 3: Formation d'une croûte de lave solide

on note $y_s(t)$ l'épaisseur de la couche de lave solide. On note κ la conductivité thermique de la lave solide.

Nous devons donc résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace $0 \leq y \leq y_s(t)$ avec comme conditions aux limites $T = T_0$ en $y = 0$, et $T = T_f$ en $y = y_s(t)$, et comme condition initiale $y_s = 0$ à $t = 0$.

La température vérifie l'équation de la chaleur à une dimension $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

On utilisera la température adimensionnée

$$\theta(y, t) = \frac{T(y, t) - T_0}{T_f - T_0}$$

1. Quelle est l'équation vérifiée par $\theta(y, t)$? Déterminer les valeurs de $\theta(y > 0, t = 0)$, $\theta(y = 0, t > 0)$ et $\theta(y = y_s(t), t > 0)$.
2. Préciser la dimension du coefficient D de diffusion thermique. En déduire l'expression d'une longueur caractéristique L en fonction de D et du temps t .

La position $y_s(t)$ de l'interface de transition de phase est une fonction *a priori* inconnue du temps, mais on peut supposer que celle-ci varie proportionnellement à la longueur caractéristique de diffusion thermique, de telle sorte que : $\eta_s = \frac{y_s(t)}{2\sqrt{Dt}} = \text{cte} = \lambda$. Cette constante est inconnue et reste à déterminer.

On peut ainsi introduire une variable de similarité sans dimension $\eta = \frac{y}{2\sqrt{Dt}}$ et on suppose que θ n'est une fonction que de cette seule variable η .

3. Montrer que

$$\frac{d^2\theta(\eta)}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d\theta(\eta)}{d\eta} = 0$$

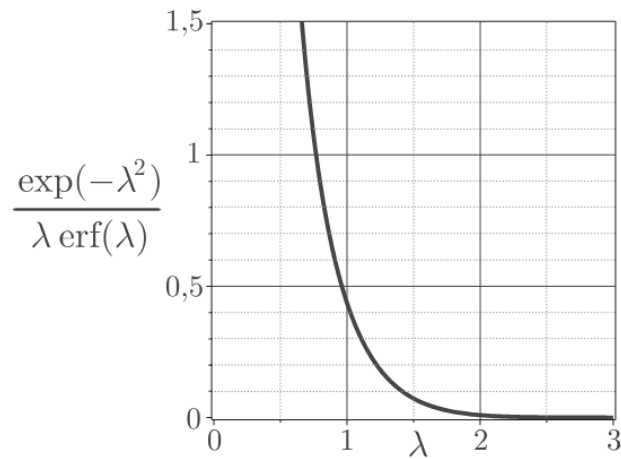
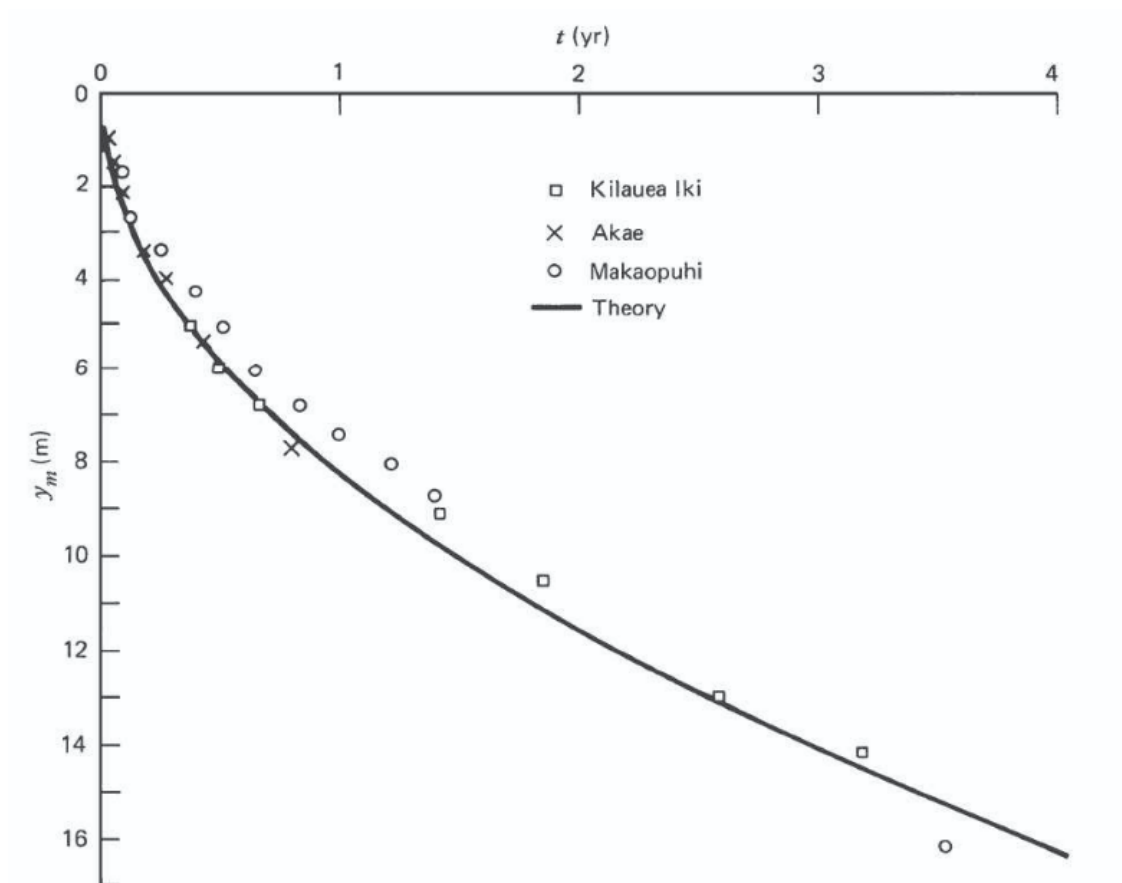


Figure 4: Graphique de $\lambda \mapsto \frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)}$.



On donne $\int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et on définit la fonction d'erreur de GAUSS :

$$\text{erf} : \chi \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\chi e^{-z^2} dz \quad (11)$$

4. En utilisant la fonction $\varphi(\eta) = \frac{d\theta}{d\eta}$, montrer que :

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)}$$

Afin d'obtenir l'expression puis la valeur de la constante λ nous allons étudier la solidification d'une tranche de lave d'épaisseur dy_s entre les instants t et $t + dt$.

5. Quelle est l'énergie libérée par la solidification à la température T_f d'une tranche dy_s de lave de surface $\mathcal{S}$ en fonction de la masse volumique ρ de la lave en fusion et l'enthalpie de fusion massique : $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}$?
6. Toute l'énergie libérée par la solidification doit être évacuée par diffusion dans la lave solide car la lave en fusion reste à la température T_f . Montrer que :

$$\rho \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) \frac{dy_s}{dt} = \kappa \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=y_s}$$

7. En déduire que :

$$\frac{e^{-\lambda^2}}{\lambda \text{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{c(T_f - T_0)} \Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f)$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $\Delta h_{\text{sol} \rightarrow \text{liq}}(T_f) = 400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$
- $\rho = 2600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $c = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- $D = 7 \times 10^{-7} \text{ SI}$
- $T_f - T_0 = 1000 \text{ K}$
- $\sqrt{\pi} \sim 1,77$

8. À l'aide de la figure ci-dessous, estimer la valeur numérique de λ . En déduire l'épaisseur de la croûte de lave six mois après l'éruption.
9. Comparer votre résultat à ceux de la figure 5 tirés d'une expérience.

10 Expérience de Fourier

Joseph Fourier a étudié la diffusion thermique le long d'un anneau de fer torique, de rayon moyen $R = 16 \text{ cm}$, de section carrée de côté $a \ll R$, de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ . L'anneau est chauffé en un point

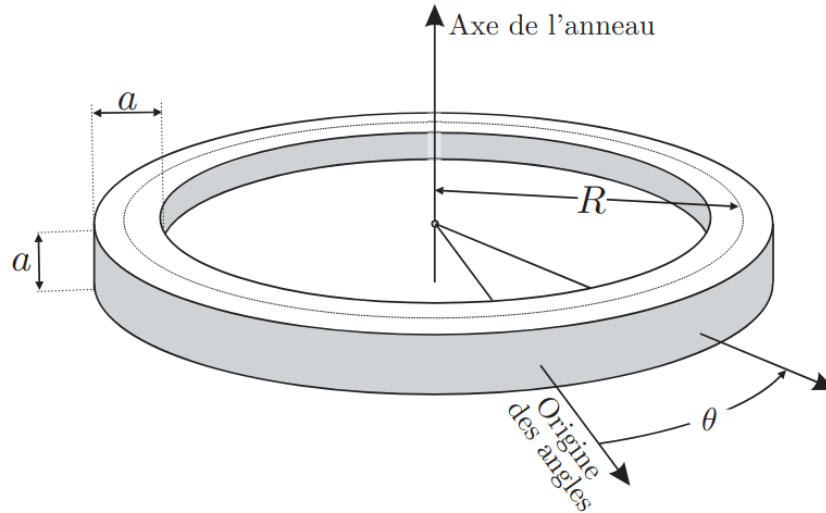


Figure 6: Géométrie du problème étudié par Fourier : le tore à section carrée.

pris comme origine des angles $\theta = 0$ dans une base cylindrique puis on suit l'évolution de la température à différents instants et pour différentes valeurs de l'angle θ .

On notera $T(\theta, t)$ la température de l'anneau supposée uniforme sur une section droite. On choisira $\theta \in]-\pi, \pi]$. On rappelle l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial T}{\partial z}\vec{e}_z \quad (12)$$

C'est en étudiant la diffusion thermique dans le dispositif expérimental décrit précédemment que Joseph Fourier découvrit les séries trigonométriques, dites "séries de Fourier". L'anneau est chauffé en $\theta = 0$ puis enfoui presque complètement dans du sable, excellent isolant thermique.

1. A partir d'arguments de symétrie, justifier que $T(\theta)$ est une fonction paire.
2. En supposant que $a \ll R$, montrer que :

$$\frac{\lambda}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (13)$$

A l'instant $t = 0$, la température initiale est une fonction $T_0(\theta)$ paire et 2π -périodique et dont le développement en série de Fourier est de la forme :

$$T_0(\theta) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(n\theta) \quad (14)$$

Les coefficients b_n sont supposés connus.

3. Que représente la constante T_m ? Justifier précisément pourquoi la solution générale $T(\theta, t)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(\theta, t) = T_m + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\theta, t) \quad (15)$$

On cherche des solutions à variable séparée de la forme $T_n(\theta, t) = f_n(\theta)g_n(t)$.

4. Déterminer les expressions générales de $f_n(\theta)$ et $g_n(t)$ puis montrer que $T_n(\theta, t)$ s'écrit sous la forme :

$$T_n(\theta, t) = B_n \cos\left(\frac{R\theta}{d_n}\right) e^{-t/\tau_n} \quad (16)$$

Expliciter B_n, d_n et τ_n en fonction de b_n, n, R, μ, c et λ . Commenter la relation entre d_n et τ_n .

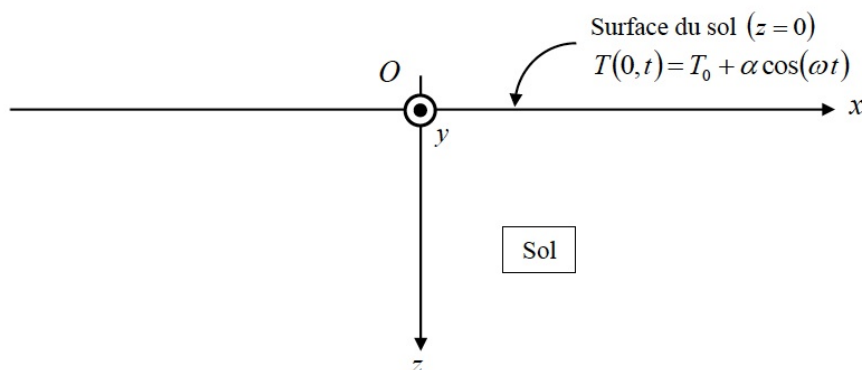
5. Joseph Fourier remarque, en mesurant la température en fonction du temps en différents points de l'anneau, que $T(\theta, t) - T_m$ devient rapidement proportionnel à $\cos \theta$. Commenter cette constatation.

III - Ondes thermiques

11 Onde thermique

L'objet de cet exercice est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation d'une installation géothermique.

On se place en repère cartésien. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy) . La température au niveau de cette surface, notée $T(0, t)$, varie sinusoidalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 : $T(0, t) = T_0 + \alpha \cos(\omega t)$, où α est une constante. Soit un point M dans le sol repéré par ses coordonnées (x, y, z) , avec $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température en M , noté $T(M, t)$.



1. Justifier que $T(M, t)$ ne dépend ni de x ni de y . On notera dans la suite: $T(M, t) = T(z, t)$.

- Donner l'expression de la loi de Fourier relative à la conduction thermique, en rappelant les grandeurs intervenant dans cette loi et leurs unités.

On notera λ la conductivité thermique du sol, supposée constante.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant: $\theta(z, t) = T(z, t) - T_0$. Tout autre phénomène que la conduction thermique est négligé. On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur:

$$\rho c \frac{\partial \theta(z, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \theta(z, t)}{\partial z^2} \quad (17)$$

où ρ et c désignent respectivement la masse volumique et la capacité thermique massique du sol. Ces deux paramètres sont supposés constants.

On cherche la solution de l'équation de la chaleur en régime sinusoïdal permanent. A cet effet, on introduit la variable complexe:

$$\underline{\theta}(z, t) = \underline{f}(z) e^{j\omega t} \quad (18)$$

avec $j^2 = -1$ et $\underline{f}(z)$ une fonction de z . L'inconnue $\theta(z, t)$ est alors donnée par: $\theta(z, t) = \text{Re}(\underline{\theta}(z, t))$, où Re désigne la partie réelle.

- Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f}(z)$. On fera intervenir la diffusivité thermique du sol donnée par: $D = \frac{\lambda}{\rho c}$.
- Exprimer la solution générale de cette équation, en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B . Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces deux constantes est nulle.
- Montrer que $\underline{\theta}(z, t)$ se met sous la forme: $\underline{\theta}(z, t) = \alpha e^{-z/\delta} \times e^{i(\omega t - z/\delta)}$, où δ est une grandeur à exprimer en fonction de ω et de D .
- Exprimer $T(z, t)$ à l'aide des paramètres: T_0 , δ , α , ω et des variables z et t . Interpréter physiquement l'expression obtenue. Interpréter physiquement le paramètre δ .
- On donne pour un sol humide: $D = 0,257 \times 10^{-6} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer numériquement δ dans les deux cas suivants:
 - Cas 1: variation quotidienne de température ;
 - Cas 2: variation annuelle de température.

A quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir la canalisation de l'installation géothermique?

- Le modèle développé vous paraît-il pertinent? Quels phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir? Répondre succinctement.

12 Réflexion et transmission d'une onde thermique

A l'interface entre deux matériaux présentant des paramètres thermiques différents, des phénomènes de réflexion et de transmission d'ondes thermiques peuvent se produire. Nous nous limiterons à une analyse unidimensionnelle. Dans ce contexte, nous considérons trois ondes $\theta_i(z, t)$, $\theta_r(z, t)$ et $\theta_t(z, t)$ respectivement incidente, réfléchie, et transmise au niveau d'une interface en $z = 0$ séparant un milieu 1 ($z < 0$) et un milieu 2 ($z > 0$). En l'absence d'ondes thermiques, la température sera supposée uniforme.

1. Quelle relation lie les fonctions $\theta_i(z = 0, t)$, $\theta_r(z, t)$ et $\theta_t(z, t)$?
2. Traduire la conservation de l'énergie au niveau de l'interface. En déduire une relation entre trois dérivées spatiales prises en $z = 0$.
3. On suppose maintenant que l'onde thermique incidente est de la forme :

$$\theta_i(z, t) = A_i e^{-z/\delta_1} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta_1} + \varphi_i\right) \quad (19)$$

avec $A_i > 0$. On admet que l'expression des ondes réfléchie et transmise s'écrit :

$$\theta_r(z, t) = A_r e^{+z/\delta_1} \cos\left(\omega t + \frac{z}{\delta_1} + \varphi_r\right) \quad (20)$$

$$\theta_t(z, t) = A_t e^{-z/\delta_2} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta_2} + \varphi_t\right) \quad (21)$$

avec $A_r, A_t > 0$. Justifier la forme des expressions données ci-dessus.

On adopte pour la suite une représentation complexe :

$$\underline{\theta}_i(r, t) = \underline{A}_i e^{j(\omega t - k_1 z)} \quad (22)$$

$$\underline{\theta}_r(r, t) = \underline{A}_r e^{j(\omega t + k_1 z)} \quad (23)$$

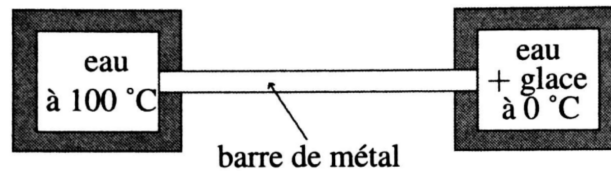
$$\underline{\theta}_t(r, t) = \underline{A}_t e^{j(\omega t - k_2 z)} \quad (24)$$

4. Déterminer les expressions des coefficients de transmission en amplitude $\underline{r} = \frac{\underline{A}_r}{\underline{A}_i}$ et $\underline{t} = \frac{\underline{A}_t}{\underline{A}_i}$ en fonction des effusivités $e_1 = \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_{p,1}}$ et $e_2 = \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_{p,2}}$.

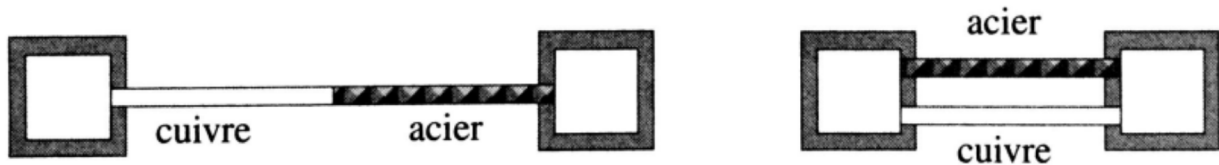
IV - Résistances thermiques

13 Association de résistances thermiques

On considère le dispositif schématisé sur la figure suivante: Les parois sont adiabatiques. Si la barre de métal est en cuivre, la glace fond en 20 minutes. Si elle est en acier, elle fond en 40 minutes.



1. En combien de temps fond la glace dans les deux configurations représentées ci-dessous?



14 Combinaison de plongée

Il y a risque d'hypothermie lorsque la température du corps passe en-dessous de 35°C.

1. Déterminer le temps au bout duquel il y a risque d'hypothermie pour un baigneur dans une eau à la température T_{eau} . Faire l'application numérique pour la mer des Caraïbes ($T_{eau} = 27^\circ\text{C}$), la Manche ($T_{eau} = 17^\circ\text{C}$) et en plongeant sous la banquise ($T = -4^\circ\text{C}$)¹
2. Quelle doit être, dans ces trois cas, l'épaisseur d'une combinaison en néoprène pour éviter l'hypothermie dans le cas d'une baignade infiniment longue ?

Données :

- Capacité thermique massique du corps humain $c_m = 3.5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Résistance thermique de la peau $R_{peau} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
- Conductivité thermique du néoprène $\lambda = 0.2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Puissance produite par le métabolisme $\mathcal{P} = 100 \text{ W}$
- Coefficient de conducto-convection eau-corps humain : $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$

¹L'eau salée a un point de fusion plus bas que l'eau douce et peut donc avoir une température négative.